Vol. 39 (2019)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

延迟索赔风险模型的最优投资策略

肖鸿民, 刘月娣, 刘爱玲
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了延迟索赔风险模型最小化破产概率的最优投资决策问题. 利用鞅中心极限定理将风险过程逼近为伊藤扩散过程, 在此基础上将盈余投资于风险市场和无风险市场, 采用随机马尔可夫控制理论将其转化为相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程, 获得了最优投资策略的显式表达式. 得到的结果推广了延迟索赔风险模型的研究.

关键词: 延迟风险模型; 鞅中心极限定理; 最优投资; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程
MR(2010) **主题分类号**: 91B30; 46N30 **中图分类号**: O211.67
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)02-0297-08

1 引言

近年来, 根据保险公司的实际运行状况, 很多学者在经典保险风险模型 [1−2] 的基础上提出了许多改进模型. 其中 Water 和 Papartriandafylou [3] 首次提出了带延迟索赔的风险模型, 它描述了保险公司会常常遇到的一种情况: 在主索赔发生后的某个不定时间还会产生由此引起的附加索赔, 即延迟索赔. 诸多学者对该模型产生了浓厚的兴趣. Yuen 和 Guo [4] 研究了一类带有复合二项延迟风险模型的有限时间破产概率; Yuen [5] 等运用鞅的方法研究了连续时间的绝对破产概率; 肖鸿民等 [6] 研究了重尾分布 $L \cap D$ 下延迟索赔风险模型的精细大偏差; 肖鸿民等 [7] 研究了相依赔付带投资的延迟风险模型的极限性质.

随着金融市场的迅速发展, 保险公司的保费收入不断增加, 累积的保险资金越来越多, 如何保值增值也是保险公司抵抗风险的主要工作. 通常运作资金的最佳途径就是投资, 但是如何选择投资策略又成为他们目前所面临的重要问题. 若选择的好, 投资可以给保险公司带来丰厚的收益. 若选择不好, 不但不能从投资中获得收益, 还可能加快公司破产的步伐. 关于保险公司如何选择投资策略的问题, 文献 [8] 研究了最优比例再保险问题; 文献 [9] 研究了当索赔遵循布朗运动时的最小破产概率; 文献 [10] 研究了扩散逼近模型下绝对破产概率最小化的投资与再保险问题; 文献 [11] 研究了相依双险种模型的扩散逼近及其最优再保险问题. 最近, 文献 [12] 又研究了相依多险种模型的扩散逼近与最优投资.

基于上述背景, 但不同的是本文针对延迟索赔风险模型, 讨论了最小化破产概率下的最优投资策略, 这一结果丰富了延迟索赔风险模型的研究并对保险公司的风险管理控制有重要的参考价值.

本文结构如下: 第二部分介绍模型及其扩散逼近结果; 第三部分运用随机控制理论, 通过求解相应的 HJB 方程得到了最优投资策略的显式表达式.

*收稿日期: 2018-03-08 接收日期: 2018-07-10
基金项目: 国家自然科学基金项目 (71261023).
作者简介: 肖鸿民 (1967–), 女, 甘肃兰州, 教授, 主要研究方向: 金融统计与保险数学.

2 模型分析与扩散逼近

假定保险公司的初始资金为 u $(u \geq 0)$, 单位时间收取的保费为 c $(c > 0)$; 第 i 次主索赔的时刻为 S_i 且主索赔额 $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 独立同分布于 X, 它们的共同分布为 F, 其一阶矩和二阶矩存在, 分别记为 $\mu_X^{(1)}$ 和 $\mu_X^{(2)}$; 延迟索赔额 $\{Y_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 独立同分布于 Y, 它们的共同分布为 G, 其一阶矩和二阶矩存在, 分别记为 $\mu_Y^{(1)}$ 和 $\mu_Y^{(2)}$; 延迟赔付间隔 $\{T_i, i = 1, 2, \cdots\}$ 独立同分布于 T, 它们的共同分布为 H .

延迟索赔计数过程与主索赔计数过程遵循相依结构

$$N_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} I_{\{S_i+T_i \leq t\}}.$$

于是累积索赔额为

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i + \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i.$$

设主索赔计数过程 $N_1(t)$ 是强度为 λ 的齐次 Poisson 过程, 索赔额 X 和 Y 相互独立, 并独立于索赔计数过程. 据此定义保险公司的盈余过程为

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i I_{\{S_i+T_i \leq t\}} =: u + ct - S_t.$$

由假设 $EN_1(t) = \lambda t$, 根据齐次 Poisson 过程的性质, 可得 $EN_2(t) = E(\sum\limits_{i=1}^{N_1(t)} I_{\{S_i+T_i \leq t\}}) = \lambda t p(t)$, 其中 $p(t) = p\{U + T \leq t\}$, U 为 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

下面进一步讨论两种索赔过程及索赔额之间的关系, 为扩散逼近结果做准备.

$$\begin{aligned} E[N_1(t)N_2(t)] &= E\left[N_1(t) \sum_{i=1}^{N_1(t)} I_{\{S_i+T_i \leq t\}}\right] \\ &= E\left[N_1(t) E\left[\sum_{i=1}^{N_1(t)} I_{\{S_i+T_i \leq t\}} \mid N_1(t)\right]\right] = \lambda t(1 + \lambda t)p(t), \end{aligned}$$

进而计算得到索赔计数过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 的相关系数为 $\sqrt{p(t)}$.

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i\right] &= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i \mid N_1(t)\right]\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i N_1(t) \mu_Y^{(1)} E[I_{\{U+T \leq t\}}]\right] = \mu_X^{(1)} \mu_Y^{(1)} p(t) \lambda t(1 + \lambda t), \end{aligned}$$

又有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i\right) = \lambda t \mu_X^{(2)}, \ \ \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i\right) = \lambda t p(t) \mu_Y^{(2)},$$

从而主索赔额与延迟索赔额过程的相关系数为

$$\frac{\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)}}{\sqrt{\mu_X^{(2)}\mu_Y^{(2)}}}\sqrt{p(t)}.$$

首先给出延迟索赔风险模型的扩散逼近结果.

定理 2.1 延迟索赔风险模型 U_t 可逼近为扩散过程

$$\tilde{U}_t = u + ct - \lambda t\mu_X^{(1)} - \lambda t\mu_Y^{(1)} - \sqrt{\lambda(\mu_X^{(2)} + \mu_Y^{(2)} + 2\rho\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)})}B_t, \tag{2.1}$$

其中 B_t 表示标准布朗运动.

下面的引理对证明上述扩散逼近结果是必要的.

引理 2.2 [11] (鞅中心极限定理) 对 $n = 1, 2, \cdots$, 记 R 表示实数集, $\{F_t^n\}$ 为滤子空间, $D_{R^m[0,\infty)}$ 为赋予了 Skorohod 拓扑右连左极函数空间. 令 $R_n(t)$ 为样本轨道在 $D_{R^m[0,\infty)}$ 上的 F_t^n - 局部鞅, 满足 $R_n(0) = 0$, $E[R_n(t)] = 0$, $A_n = ((A_n^{ij}))$ 为 $m\times m$ 的对称矩阵值过程, $A_n^{ij} \in D_{R^m[0,\infty)}$ 且 $A_n(t) - A_n(s)$ 对 $t > s \geq 0$ 非负定. 假定对任意的 $i, j = 1, 2, \cdots, m$, 有 $A_n^{ij} = \langle R_n^i, R_n^j\rangle$, 且对每个 $T > 0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} E\big[\sup\limits_{t\leq T} \mid R_n(t) - R_n(t-) \mid\big] = 0$. 如果 $n\to\infty$ 时, 对每个 $t > 0$ 和 $i, j = 1, 2, \cdots, m$, 有 $A_n^{ij}(t)$ 依概率收敛到 $\sigma_{ij}(t)$, 则 R_n 弱收敛到 R, 其中 R 为 M - 维布朗运动, 漂移向量为 $(0, 0, \cdots, 0)_{1\times m}$, 协方差阵为 $(\sigma_{ij}(t))_{m\times m}$.

引理 2.3 令 $F_t^n = \sigma(R_n^X(s), R_n^Y(s), s\leq t)$, 则 (R_n^X, R_n^Y) 弱收敛到 $(\nu_1 B^X, \nu_2 B^Y)$, 其中 B^X 和 B^Y 为两个相关的标准布朗运动, 相关系数为

$$\rho = \frac{\lambda}{\nu_1\nu_2}\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)},$$

其中

$$\nu_1 = \sqrt{\lambda\mu_X^{(2)}},\ \nu_2 = \sqrt{\lambda\mu_Y^{(2)}}.$$

证 对 $n = 1, 2, \cdots$, 下面构造随机过程序列

$$R_n^X(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{N_1(nt)} X_i - \lambda(nt)\mu_X^{(1)}\right),\ \ R_n^Y(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{N_2(nt)} Y_i - \lambda(nt)p(nt)\mu_Y^{(1)}\right).$$

通过构造过程得知 $R_n^X(t)$ 和 $R_n^Y(t)$ 均为零均值鞅, 根据文献 [13], 可知 (R_n^X, R_n^Y) 为 F_t^n - 局部鞅, 取值于 $D_{R^2[0,\infty)}$. 令

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} A_n^{11}(t) & A_n^{21}(t) \\ A_n^{12}(t) & A_n^{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(nt)\mu_X^{(2)}}{n} & \frac{\lambda(nt)p(nt)\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)}}{n} \\ \frac{\lambda(nt)p(nt)\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)}}{n} & \frac{\lambda(nt)p(nt)\mu_Y^{(2)}}{n} \end{pmatrix}.$$

那么对 $n\geq 1$ 和 $i, j = 1, 2, \cdots$, 有 $A_n^{ij} \in D_{R^2[0,\infty)}$. 对任意 $t > s \geq 0$, 因为

$$\begin{aligned} \mid A_n(t) - A_n(s) \mid &= \frac{\mu_X^{(2)}\mu_Y^{(2)}(\lambda(nt) - \lambda(ns)) - (\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)})^2(\lambda(nt)p(nt) - \lambda(ns)p(ns))}{\frac{n^2}{\lambda(nt)p(nt) - \lambda(ns)p(ns)}} \\ &\geq \frac{\mu_X^{(2)}\mu_Y^{(2)} - (\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)})^2}{n^2}(\lambda(nt)p(nt) - \lambda(ns)p(ns))^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

即 $A_n(t)-A_n(s)$ 非负定.

对任意的 $M>0$, 由 λt 连续, 则有

$$\lim_{n\to\infty} E\big[\sup_{t\leq M} \mid R_n^X(t)-R_n^X(t-)\mid\big]=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_X^{(1)}}{\sqrt{n}}=0$$

和

$$\lim_{n\to\infty} E\big[\sup_{t\leq M} \mid R_n^Y(t)-R_n^Y(t-)\mid\big]=\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_Y^{(1)}}{\sqrt{n}}=0.$$

下证 $A_n^{11}=\langle R_n^X,R_n^X\rangle,\ A_n^{12}=\langle R_n^X,R_n^Y\rangle,\ A_n^{22}=\langle R_n^Y,\ R_n^Y\rangle$. 而

$$\langle R_n^X,R_n^X\rangle=E[(R_n^X)^2]=\mathrm{Var}\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{N_1(nt)}X_i\bigg),$$

由前面 $\mathrm{Var}\bigg(\sum\limits_{i=1}^{N_1(t)}X_i\bigg)=\lambda t\mu_X^{(2)}$, 则 $\langle R_n^X,R_n^X\rangle=\frac{1}{n}\lambda(nt)\mu_X^{(2)}=A_n^{11}$. 类似地,

$$\begin{aligned}\langle R_n^Y,R_n^Y\rangle &= E[(R_n^Y)^2]=\mathrm{Var}\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{N_2(nt)}Y_i\bigg)=\frac{1}{n}\lambda(nt)p(nt)\mu_Y^{(2)}=A_n^{22},\\ \langle R_n^X,R_n^Y\rangle &= E[R_n^XR_n^Y]=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}\bigg(\sum_{i=1}^{N_1(nt)}X_i,\sum_{i=1}^{N_2(nt)}Y_i\bigg)\\ &= \frac{1}{n}\lambda(nt)p(nt)\mu_Y^{(1)}\mu_X^{(1)}=A_n^{12}.\end{aligned}$$

最后, 根据关系 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=1$, 得到

$$A_n^{11}(t)\to\lambda\mu_X^{(2)}t,\ A_n^{12}(t)\to\lambda\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)}t,\ A_n^{22}(t)\to\lambda\mu_Y^{(2)}t.$$

由引理 2.2 可知 (R_n^X,R_n^Y) 弱收敛到以 $(0,0)$ 漂移向量, 以

$$\begin{pmatrix}\lambda\mu_X^{(2)}t & \lambda\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)}t\\ \lambda\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)}t & \lambda\mu_Y^{(2)}t\end{pmatrix}$$

为协方差阵的二维布朗运动. 即 (R_n^X,R_n^Y) 弱收敛到 $\bigg(\sqrt{\lambda\mu_X^{(2)}}B^X,\sqrt{\lambda\mu_Y^{(2)}}B^Y\bigg)$.

根据上面的引理, 给出定理 2.1 的证明.

证 由引理 2.2 知, U_t 可逼近为

$$\tilde{U}_t=u+ct-\lambda t\mu_X^{(1)}-\lambda t\mu_Y^{(1)}-\nu_1B^X-\nu_2B^Y,$$

再根据引理 2.3 知

$$\rho=\frac{\lambda}{\nu_1\nu_2}\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)},\ \nu_1=\sqrt{\lambda\mu_X^{(2)}},\ \nu_2=\sqrt{\lambda\mu_Y^{(2)}}.$$

代入上式即知定理 2.1 成立.

3 带延迟索赔风险投资模型的最优投资策略

在承保风险过程中, 利用扩散逼近是为了更好的研究最优决策问题. 本文考虑最小化破产概率下的盈余投资策略选择问题. 保险公司为了获得更多收益, 一般会将盈余投资于风险市场和无风险市场. 假定保险人将部分盈余投资于股票市场, 它的价格过程 P_t 服从几何布朗运动 $dP_t = aP_t dt + bP_t dW_t,\ \ t \geq 0$, 其中 $a, b \in R$ 为常数, a 为股票瞬时条件期望收益率, b 为股票瞬时条件标准差, W_t 为标准布朗运动且独立于 B_t.

将另一部分投资于债券市场, 它的价格过程满足微分方程 $dQ_t = rQ_t dt,\ \ t \geq 0$, 其中 r 为无风险利率.

记保险人在时刻 t 将部分盈余 π_t 投资到风险市场, 选定 π_t 后的总盈余记为 $\tilde{U}_t^\pi$, 则无风险投资的盈余为 $\tilde{U}_t^\pi - \pi_t$. 令 $A = c - \lambda\mu_X^{(1)} - \lambda\mu_Y^{(1)},\ \ B = \sqrt{\lambda(\mu_X^{(2)} + \mu_Y^{(2)} + 2\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)})}$. 则在原盈余的基础上嵌入投资策略 π_t 后的盈余过程满足下面的随机微分方程

$$\begin{cases} d\tilde{U}_t^\pi = [r\tilde{U}_t^\pi + (a-r)\pi_t + A]dt + b\pi_t dW_t - BdB_t, \\ \tilde{U}_0^\pi = u, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 W_t 与 B_t 相互独立.

现在的目标是要在所有可行策略中寻找最优策略 π^* 使得 $\Pr(\widetilde{U}_t^{\pi^*} < 0$ 对某个 $t > 0 \mid \widetilde{U}_0^{\pi^*} = u) = \inf\limits_\pi \Pr(\widetilde{U}_t^\pi < 0$ 对某个 $t > 0 \mid \widetilde{U}_0^\pi = u)$, 即破产概率达到最小, 记为

$$\psi(u). \tag{3.2}$$

为解决优化问题, 采用随机马尔可夫控制理论和 HJB 方程, 如果最优值函数 $\psi(u)$ 二阶连续可微, 则 $\psi(u)$ 必然满足下面 HJB 方程

$$\begin{cases} (ru+A)\psi' + \frac{1}{2}(-B)^2\psi'' + \min\limits_\pi[(a-r)\pi\psi' + \frac{1}{2}b^2\pi^2\psi''] = 0, \\ \psi(0) = 1, \lim\limits_{u\to\infty}\psi(u) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

下述寻求 HJB 方程 (3.3) 的二次连续可微解. 根据文献 [14], 最优风险投资量 π_t^* 即为最大化盈余过程漂移项与波动项平方的商的对应值. 也就是说, 只需求解 π 使得

$$\phi(\pi) = \frac{ru + (a-r)\pi + A}{b^2\pi^2 + (-B)^2}$$

达到最大. 据此, 令 $\phi'(\pi) = 0$, 可得

$$\pi^*(u) = \frac{1}{a-r}\left[-(ru+A) + \sqrt{(ru+A)^2 + \left(-B\frac{a-r}{b}\right)^2}\right], \tag{3.4}$$

其中 $A = c - \lambda\mu_X^{(1)} - \lambda\mu_Y^{(1)},\ \ B = \sqrt{\lambda(\mu_X^{(2)} + \mu_Y^{(2)} + 2\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)})}$.

为求解最优值函数 $\psi(u)$, 先假定 $\psi(u)$ 为凸函数, 满足 $\psi''(u) > 0$. 由此, 根据最优解 $\pi^*(u)$ 应满足 HJB 方程 (3.3) 第一式且为唯一解, 又得到

$$\pi^*(u) = -\frac{a-r}{b^2}\frac{\psi'(u)}{\psi''(u)}. \tag{3.5}$$

结合 (3.4) 式和 (3.5) 式解得

$$\psi'(u)=\psi'(0)\exp\Big(-\frac{a-r}{b^2}\int_0^u\frac{1}{\pi^*(v)}dv\Big),$$

其中 $\pi^*(v)$ 由 (3.4) 式确定. 据此, 又进一步可得

$$\psi(u)=1+\int_0^u\psi'(v)dv=1+\psi'(0)\int_0^u\exp\Big(-\frac{a-r}{b^2}\int_0^v\frac{1}{\pi^*(\xi)}d\xi\Big)dv.$$

其中 $\psi'(0)$ 可由边界条件 $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u)=0$ 得到.

下面给出识别定理, 说明由 HJB 方程 (3.3) 的二次可微解即得到优化问题 (3.2) 的唯一解.

引理 3.1 [9] 对任意的常数 $\pi\in R$, 定义二次可微算子 L^π 如下: 对任意的开集 $G\subset R^+$ 和 $h\in C^2(G)$, 定义函数 $L^\pi h:G\to R$ 形如

$$L^\pi h(u)=(ru+(a-r)\pi+A)h'(u)+\frac{1}{2}(b^2\pi^2+(-B)^2)h''(u).$$

如果函数 $h:\ R^+\to[0,1]$ 递减, 函数 $\psi:R^+\to R$ 可行, 且满足

(A1) $h\in C^2(R^+)$, h' 在 R^+ 上有界;

(A2) 对 $\pi\in R$ 有 $L^\pi h(u)\geq 0$, 对 $u\in R^+$ 有 $L^{\pi^*}h(u)=0$;

(A3) $h(0)=1$ 且 $\lim\limits_{u\to\infty}h(u)=0$.

那么 h 即最小破产概率为 ψ, π^* 即为最优风险投资量.

定理 3.2 在延迟索赔风险模型的扩散逼近形式 (2.1) 下, 带投资的优化问题 (3.1) 的最小破产概率为

$$\psi(u)=1-\frac{\displaystyle\int_0^u\exp[g(v)]dv}{\displaystyle\int_0^\infty\exp[g(v)]dv},\tag{3.6}$$

最优投资策略 $\pi^*(u)$ 为

$$\pi^*(u)=\frac{1}{a-r}\Big[-(ru+A)+\sqrt{(ru+A)^2+\big(-B\frac{a-r}{b}\big)^2}\Big],$$

其中

$$\begin{aligned}&A=c-\lambda\mu_X^{(1)}-\lambda\mu_Y^{(1)},\ \ B=\sqrt{\lambda(\mu_X^{(2)}+\mu_Y^{(2)}+2\mu_X^{(1)}\mu_Y^{(1)})},\\&g(v)=-\frac{1}{rB^2}(rv(A+\frac{rv}{2})+h(rv+A)-h(A)),\\&h(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+(-B\frac{a-r}{b})^2}+\frac{1}{2}(-B\frac{a-r}{b})^2\log\Big(x+\sqrt{x^2+\big(-B\frac{a-r}{b}\big)^2}\Big).\end{aligned}$$

证 由于 $\exp[g(v)]>0$ 恒成立, 所以 $\displaystyle\int_0^u\exp[g(v)]dv$ 关于 u 递增, 由 (3.6) 式定义的 $\psi(u)$ 关于 u 递减, 易见 $\psi(u)\in[0,1]$. 又由于 $\pi^*(u)$ 关于 u 连续, 所以 π^* 为可行策略.

由引理 3.1 知, 只要 $\psi(u)$ 满足 (A1)–(A3) 三个条件, 即得 $\psi(u)$ 为最小破产概率, π^* 为最优投资策略. 下面逐步进行证明.

由初等函数 $h(x)$ 关于 x 连续, 则函数 $g(v)$ 关于 v 连续, 从而 $\int_0^u \exp[g(v)]dv$ 关于 u 可微. 进一步, $\psi(u)$ 关于 u 可微且

$$\psi'(u) = -\frac{\exp[g(u)]}{\int_0^\infty \exp[g(v)]dv}.$$

另外, 由于函数

$$h'(x) = \sqrt{x^2 + (-B\frac{a-r}{b})^2} > | x | \geq 0,$$

则函数 $g(v)$ 具有连续导函数且

$$g'(v) = -\frac{1}{B^2}(A + rv + h'(A + rv)) \leq 0.$$

因此函数 $g(v)$ 关于 v 单调递减, 函数 $\psi(u)$ 具有二阶连续导函数且

$$\psi''(u) = -\frac{\exp[g(u)]}{\int_0^\infty \exp[g(v)]dv} g'(u) > 0.$$

即 $\psi \in C^2(R^+)$ 且为凸函数. 同时, 由函数 g 的单调性有 $g(u) \leq g(0) = 0,\ u \geq 0$, 所以

$$-\frac{1}{\int_0^\infty \exp[g(v)]dv} \leq \psi'(u) = -\frac{\exp[g(u)]}{\int_0^\infty \exp[g(v)]dv} \leq 0.$$

即 ψ' 在 R 上有上界. 即得条件 (A1) 满足. 对任意的 $\pi \in R$, 由函数 $L^\pi : G \to R$ 的定义知

$$L^\pi \psi = \frac{b^2}{2}\psi''\pi^2 + (a-r)\psi'\pi + (ru + A)\psi' + \frac{1}{2}(-B)^2\psi''.$$

将此式看作是 π 的一元二次函数, 利用关系式 $\psi'' = \psi' g'$, 经计算判别式为零. 又因为 $\frac{b^2}{2} > 0$, 则对任意的 $\pi \in R$, 有 $L^\pi \psi \geq 0$, 等号成立当且仅当

$$\pi = -\frac{(a-r)\psi'(u)}{b^2\psi''(u)}.$$

将 $\psi'' = \psi' g'$ 代入上式, 经过计算可得 $\pi = \pi^*(v)$. 因此条件 (A2) 成立. 由 $\psi(u)$ 的表达式得条件 (A3) 显然成立. 综上所述, 定理 3.2 证毕.

注 定理 3.2 表明, 在最小化破产概率的优化准则下, 最优投资策略和最小破产概率的显式表达式由索赔额和风险投资的参数决定. 对同一模型之前只是进行了常数比例的投资并得到了渐进破产概率. 而本文进行了非常数比例的投资, 然后通过随机微分方程的求解得到最优投资策略. 这一结果丰富了延迟索赔风险模型的研究并且更符合保险实际.

参 考 文 献

[1] Embrechts P, Klüppelberg C, Mikosch T. Modelling extremal events for insurance and finance [M]. Berlin: Springer, 1997.

[2] Asmussen S. Ruin probabilities[M]. Singapore: World Scientific, 2000.

[3] Waters H R, Papatriandafylou A. Ruin probabilities allowing for delay in claims settlement[J]. Insurance Math. Econom., 1985, 4(2): 113–122.

[4] Yuen K C, Guo J Y. Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial model[J]. Insurance Math. Econom., 2001, 29(1): 47–57.

[5] Yuen K C, Guo J Y, Ng K W. On ultimate ruin in a delayed-claims risk model[J]. J. Appl. Prob., 2005, 42(1): 163–174.

[6] 肖鸿民, 王英, 崔艳君. 重尾分布 $L \cap D$ 下延迟索赔风险模型的精细大偏差 [J]. 西北师范大学学报, 2013, 49(2): 14–19.

[7] 肖鸿民, 刘爱玲, 何艳. 相依赔付带投资的延迟风险模型的极限性质 [J]. 兰州大学学报, 2017, 53(5): 696–700.

[8] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. Scand. Actuar. J., 2001, 2001(1): 55–68.

[9] Promislow D, Young V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow brownian motion with drift[J]. N. Am. Actuar. J., 2005, 9(3): 110–128.

[10] Bi X C, Zhang S G. Minimizing the risk of absolute ruin under a diffusion approximation model with reinsurance and investment[J]. J. Sys. Sci. Comp., 2015, 28(1): 144–155.

[11] Bai L H, Cai J, Zhou M. Optimal meinsurance policies for an insurer with a bivariate reserve risk process in a dynamic setting[J]. Insur. Math. Econom., 2013, 53(3): 664–670.

[12] 张节松, 肖庆宪. 相依多险种模型的扩散逼近与最优投资 [J]. 云南大学学报, 2016, 38(3): 362–368.

[13] Liu C S, Yang H L. Optimal investment for an insurer to minimize its probability of ruin[J]. N. Am. Actuar. J., 2004, 8(2): 11–31.

[14] 普兴成, 张毅. 随机微分方程及其在数理金融中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.

OPTIMAL INVESTMENT STRATEGY FOR RISK MODEL OF DELAYED CLAIMS

XIAO Hong-min, LIU Yue-di, LIU Ai-ling

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

Abstract: In this paper, we study the optimal investment strategy of minimizing the ruin probability in the delayed risk model. By using martingale center limit theorem, the risk process is approximated to an Ito diffusion process. On the basis of this, the company invest its surplus into a risk market and a risk-free market. The stochastic Markov control theory is used to convert into the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation, and explicit expression of optimal investment strategy is obtained. This result enriches the research of delayed claims risk model and has important reference value for risk management and control of insurance companies.

Keywords: delayed risk model; martingale center limit theorem; investment strategy; Hamilton-Jacobi-Bellman equation

2010 MR Subject Classification: 91B30; 46N30