

## 基于 LSQR 法的外部数值保角逆变换计算法

吕毅斌<sup>1</sup>, 王 坚<sup>1</sup>, 王樱子<sup>2</sup>, 吴 爽<sup>1</sup>

(1. 昆明理工大学理学院, 云南 昆明 650500)

(2. 昆明理工大学计算中心, 云南 昆明 650500)

**摘要:** 本文提出了基于模拟电荷法的外部数值保角逆变换计算法. 利用 LSQR (Least Square QR-factorization) 方法来求解基于模拟电荷法的外部数值保角逆变换中的约束方程, 得到了电荷量和逆变换半径, 进而构造了近似保角逆变换函数. 数值实验证明本文提出的算法是有效的.

**关键词:** 数值保角逆变换; 模拟电荷法; LSQR 方法

MR(2010) 主题分类号: 65E05; 30C30      中图分类号: O241. 85

文献标识码: A      文章编号: 0255-7797(2019)02-0287-10

### 1 引言

保角变换是复变函数中非常重要的理论之一, 广泛应用于物理学和工学领域. 特别是在电磁理论、膜和板的振动、弹性理论、热传输、流体力学等方面有很多应用<sup>[1-5]</sup>. 通常将保角变换的求解方法分为解析法和数值法. 解析法只能在一些特殊区域给出变换函数表达式, 对于复杂区域问题没有解决方法. 因此, 对于很多实际中的复杂问题必须采用数值法求解保角变换函数. 数值保角变换计算法的主要有: 积分方程式法<sup>[6]</sup>、正交多项式法<sup>[7-8]</sup>和有限差分法<sup>[9-10]</sup>等. 德国人 Steinbigler<sup>[11]</sup> 首次提出用若干个虚设电荷来模拟电极表面上电荷分布的电场计算法, 形成了模拟电荷法的基本思想; 日本的天野要等数学学者从 20 世纪 80 年代开始对模拟电荷法和数值保角变换作了大量研究工作, 并提出了基于模拟电荷法的数值保角变换计算法(天野法)<sup>[12-16]</sup>. 天野法适用于单连通区域及多连通区域的数值保角变换问题<sup>[15,17,18,19,20]</sup>.

单连通区域的数值保角变换, 分为内部数值保角变换和外部数值保角变换. 本文通过对基于模拟电荷法的双方向的内部数值保角变换计算法<sup>[13,15,16]</sup>的研究, 提出了外部数值保角逆变换计算法. 该方法的原理是基于模拟电荷法来求 Laplace 方程的 Dirichlet 问题的解, 并通过预先建立的边界对应关系构造从标准区域到问题区域的近似保角逆变换函数, 误差用正则函数的最大值原理进行评价. 计算数值保角逆变换最主要的就是确定模拟电荷的位置和数量, 以及约束方程组的求解.

LSQR 方法<sup>[21-24]</sup>是 Paige 和 Saunders 提出的一种适用于求解系数矩阵为大型、稀疏矩阵线性方程组的方法. LSQR 方法求解的思路是把任意系数矩阵方程化为系数矩阵为方阵的方程, 然后利用 Lanczos 方法, 求解最小二乘解. 由于在求解过程中应用到 QR 分解, 因此称为 LSQR (Least Square QR-factorization) 方法. 本文利用 LSQR 方法求解出了外部数值

\*收稿日期: 2018-04-26      接收日期: 2018-07-31

基金项目: 国家自然科学基金资助(11461037).

作者简介: 吕毅斌(1972-), 男, 黑龙江牡丹江, 副教授, 主要研究方向: 科学计算和图像处理.

保角变换模拟电荷法中的约束方程组, 得到电荷量和逆变换半径, 从而构造出近似逆保角变换函数, 最后利用数值实验验证了所提算法的有效性.

## 2 基于模拟电荷法的外部数值保角变换算法

本节主要阐述了基于模拟电荷法的外部区域数值保角变换算法<sup>[12,15,17,18]</sup>. 如图 1 所示,  $C$  对于  $z$  平面上的任意 Jordan 曲线, 围绕  $C$  的外部区域为  $D$ , 通过数值保角变换将区域  $D$  映射成  $w$  平面上的单位圆的外部  $|w| > 1$ ,  $\bar{D} = D + C$ .

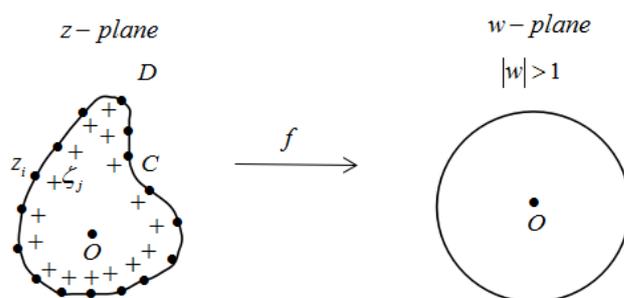


图 1: 基于模拟电荷法的外部区域数值保角变换  
(+ 代表模拟电荷点, • 代表约束点)

保角变换函数  $w = f(z)$ ,  $f(z)$  满足正规化条件  $f(\infty) = \infty$ ,  $f(\infty) > 0$  时, 可以表示如下

$$f(z) = \frac{z}{\gamma} e^{g(z) + ih(z)}, \quad z \in \bar{D}, \quad (2.1)$$

$g(z)$  是 Dirichlet 型场势问题

$$\begin{cases} \nabla^2 g(z) = 0, & z \in D, \\ g(z) = -\log |\gamma| - \log |z|, & z \in C, \\ g(\infty) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

的解, 其中  $h(z)$  是  $g(z)$  的共轭调和函数, 且  $h(\infty) = 0$ . 在下面的叙述中,  $F, G, H, \Gamma$  表示  $f, g, h, \gamma$  的近似值. 由模拟电荷法,  $g(z)$  可以用  $C$  围绕的区域内部里配置的  $N$  个电荷点  $\xi_j$  作为极的对数势场的 1 次结合

$$G(z) = -\sum_{j=1}^N Q_j \log |z - \zeta_j|, \quad z \in \bar{D}, \quad (2.3)$$

高度近似  $g(z)$ . 此时  $h(z)$  的高度近似函数为

$$H(z) = -\sum_{j=1}^N Q_j \arg |z - \zeta_j|, \quad z \in \bar{D}, \quad (2.4)$$

未知电荷  $Q_j$  通过满足下面边界条件进行求解, 即

$$\sum_{j=1}^N Q_j \log |z_i - \zeta_j| = \log \Gamma - \log |z_i| \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.5)$$

另外, 由条件  $g(\infty) = 0, h(\infty) = 0$ , 可得

$$\sum_{j=1}^N Q_j = 0. \quad (2.6)$$

因此, 通过 (2.5) 式和 (2.6) 式能推导出以  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 和  $\log \Gamma$  作为未知数的  $N + 1$  维线性方程组的构成如下

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,N} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N,N} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \\ \log \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log |z_1| \\ \log |z_2| \\ \vdots \\ \log |z_N| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

式中,

$$a_{ij} = \log |z_j - \zeta_i|, \quad (2.8)$$

通过式 (2.3), (2.4) 和 (2.7) 得到近似保角变换函数

$$F(z) = \frac{z}{\Gamma} \exp(G(z) + iH(z)), \quad z \in \bar{D}. \quad (2.9)$$

最后利用  $z_i, Q_j, \Gamma, \zeta_j$  计算双连通保角变换.

### 3 外部区域数值保角逆变换算法

根据上节内容, 本节提出基于模拟电荷法的外部区域数值逆保角变换算法. 如图 2 在  $w$  平面上, 单位圆围成的外部区域  $|w| > 1$ , 通过数值保角逆变换将数值保角正变换映射成的单位圆的边界及外部区域变换成  $z$  平面上封闭的 Jordan 曲线  $C$  及所围成的外部区域  $D$  [16].

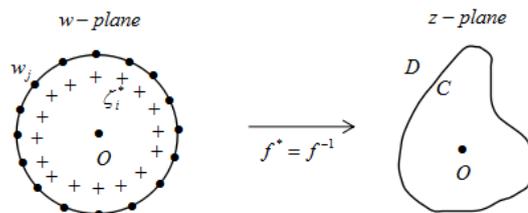


图 2: 基于模拟电荷法的外部区域数值保角逆变换  
(+ 代表模拟电荷点, • 代表约束点)

在不失一般性的情况下, 假定映射函数  $z = f^*(w)$  满足正规化条件  $f^*(\infty) = \infty$ ,  $f^*(\infty) > 0$  时是正则的, 即

$$f^*(w) = \frac{w}{\gamma^*} \exp(g^*(w) + ih^*(w)), \quad |w| > 1, \quad (3.1)$$

式中,  $\gamma^*$  是变换半径,  $g^*(w)$  是 Dirichlet 型势场问题

$$\begin{cases} \nabla^2 g^*(w) = 0, & w \in D, \\ g^*(w) = \log |z| - \log |w| - \log \gamma^*, & |w| > 1, \\ g^*(\infty) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

的解, 其中  $h^*(w)$  是  $g^*(w)$  的共轭调和函数, 且  $h^*(\infty) = 0$ . 分别用  $F^*$ ,  $G^*$ ,  $H^*$ ,  $\Gamma^*$  表示  $f^*$ ,  $g^*$ ,  $h^*$ ,  $\gamma^*$  的近似值.

根据模拟电荷法,  $g^*(w)$  可以用单位圆的内部区域配置的  $N^*$  个电荷点  $\zeta_j^*$  作为极的对数势场的 1 次结合

$$G^*(w) = - \sum_{j=1}^{N^*} Q_j^* \log |w - \zeta_j^*| \quad |w| > 1, \quad (3.3)$$

高度近似, 这里  $h^*(w)$  可以用

$$H^*(w) = - \sum_{j=1}^{N^*} Q_j^* \arg(1 - \zeta_j^*/w), \quad |w| > 1 \quad (3.4)$$

高度近似.

未知电荷  $Q_j^*$  可以通过满足下面的边界条件进行求解,

$$\sum_{j=1}^{N^*} Q_j^* \log |w_i - \zeta_j^*| = \log |w_i| - \log |z_i| - \log \Gamma^*, \quad j = 1, 2, \dots, N^*, \quad (3.5)$$

同时, 由条件  $g^*(\infty) = 0$ ,  $h^*(\infty) = 0$  可得

$$\sum_{j=1}^{N^*} Q_j^* = 0, \quad (3.6)$$

其中  $z_i$  是外部的数值正保角变换的约束点,  $w_i$  是经过  $z_i$  数值正保角变换得到的映射结果,  $\zeta_j^*$  通过  $w_i$  来确定. 因此, 由 (3.5) 和 (3.6) 式可得  $Q_j^*$  ( $1 \leq j \leq N^*$ ) 和  $\log \Gamma^*$  作为未知数的  $(N^* + 1)$  维线性方程组如下

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N^*} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2N^*} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N^*1} & a_{N^*2} & \cdots & a_{N^*N^*} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \\ \vdots \\ Q_{N^*}^* \\ \log \Gamma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log |w_1| - \log |z_1| \\ \log |w_2| - \log |z_2| \\ \vdots \\ \log |w_{N^*}| - \log |z_{N^*}| \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

其中

$$a_{ij} = \log |w_i - \zeta_j^*|. \quad (3.8)$$

通过 (3.3), (3.4) 和 (3.7) 式可得近似保角逆变换函数

$$F^*(w) = \frac{w}{\Gamma^*} \exp(G^*(w) + iH^*(w)), \quad |w| > 1. \quad (3.9)$$

最后利用  $z_i, w_i, Q_j^*, \Gamma^*, \zeta_j^*$  计算外部区域数值保角逆变换.

#### 4 基于 LSQR 方法的数值保角逆变换模拟电荷求解

将约束方程组 (3.7) 式写成标准线性方程组的

$$Ax = b \quad (4.1)$$

形式, 其中

$$A \in R(N+1) \times (N+1), x \in R(N+1), b \in R(N+1).$$

约束方程的系数矩阵  $A$  是非对称的且病态的, LSQR 方法<sup>[20-23]</sup>是求解系数矩阵为病态的大型稀疏矩阵线性方程组的有效算法之一. 利用 Lanczos 双对角化方法来求解方程的最小二乘解  $\min \|Ax - b\|_2$ . 假定  $U_k = [u_1, \dots, u_k]$  和  $V_k = [v_1, \dots, v_k]$  是正交阵且  $L_k$  为如下的  $(k+1) \times k$  的下双对角阵

$$L_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_k \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_{k+1} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

用下列迭代方法可以实现  $A$  矩阵的双对角分解

$$\begin{cases} \beta_1 u_1 = b, & \alpha_1 v_1 = A^T u_1, \\ \beta_{i+1} = Av_i - \alpha_i u_i & (i = 1, 2, \dots), \\ \alpha_{i+1} v_{i+1} = A^T \beta_{i+1} v_i, \end{cases} \quad (4.3)$$

其中  $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ . 使上式 (3.21) 可写成

$$\begin{cases} U_{k+1}(\beta_1 e_1) = b, \\ AV_k = U_{k+1}L_k, \\ A^T U_{k+1} = V_k L_k^T + \alpha_{k+1} v_{k+1} e_{k+1}^T, \end{cases} \quad (4.4)$$

其中  $e_{k+1}^T$ , 表示  $n$  阶单位矩阵的第  $k+1$  行, 再设

$$x_k = V_k y_k, r_k = b - Ax_k, t_{k+1} = \beta_1 e_1 - L_k y_k, \quad (4.5)$$

可以确定

$$r_k = b - Ax = U_{k+1}(\beta_1 e_1) - AV_k y_k = U_{k+1}(\beta_1 e_1) - U_{k+1} L_k y_k = U_{k+1} t_{k+1} \quad (4.6)$$

在满足给定精度时停止迭代. 我们希望  $\|r_k\|_2$  尽量小, 且  $U_{k+1}$  理论上是正交阵, 取  $y_k$  使  $\|t_{k+1}\|_2$  最小, 解最小二乘问题  $\min \|\beta_1 e_1 - L_k y_k\|_2$ . 得到 LSQR 算法如下:

---

**Algorithm 1** LSQR Algorithm

---

**Input:**  $A, b, x_0, \varepsilon$ .

Initialize  $\beta_1 u_1 = b, \alpha_1 v_1 = A^T u_1, h_1 = v_1, \tilde{\varphi}_1 = \beta_1, \tilde{\rho}_1 = \alpha_1$ .

**for**  $i = 1, 2, 3, \dots$

**while** stopping criterion is not satisfied **do**

$$\beta_{i+1} u_{i+1} = Av_i - \alpha_i u_i;$$

$$\alpha_{i+1} u_{i+1} = A_i^T - \beta_{i+1} V_i;$$

$$\rho_i = \sqrt{\tilde{\rho}_i^2 + \beta_{i+1}^2}, c_i = \tilde{\rho}_i / \rho_i, s_i = \beta_{i+1} / \rho_i;$$

$$\theta_{i+1} = s_i \alpha_{i+1}, \tilde{\rho}_{i+1} = -c_i \alpha_{i+1}, \varphi_i = c_i \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_{i+1} = s_i \tilde{\varphi}_i;$$

$$x_i = x_{i-1} + (\tilde{\varphi}_i / \tilde{\rho}_i) h_i;$$

$$h_{i+1} = v_{i+1} - (\theta_{i+1} / \rho_i) h_i;$$

**if**  $\min \|Ax_i - b\| < \varepsilon$ ; **end if**

**end while**

**end for**

**Output**  $x_i$ .

---

上述算法中,  $\varepsilon$  是给定精度.

这里给出基于 LSQR 法的外部区域数值保角逆变换计算法的具体步骤如下.

**步骤 1** 通过外部区域数值保角正变换 (2.9) 得到映射点  $F(z_i)$ , 将  $F(z_i)$  的位置作为数值保角逆变换的约束点  $w_i$  的位置.

**步骤 2** 根据约束点  $w_i$  的位置配置外部区域数值保角逆变换模拟电荷点  $\zeta_j^*$  的位置.

**步骤 3** 通过 LSQR 方法求解约束方程组 (3.7) 得到模拟电荷  $Q_1^*, Q_2^*, \dots, Q_N^*$  和逆变换半径  $\log \Gamma^*$ .

**步骤 4** 对单位圆的边界及外部区域的每一个点通过 (3.3) 和 (3.4) 式计算得到  $G^*(w)$  和  $H^*(w)$  后, 构造近似保角逆变换函数 (3.9), 然后计算对应的变换点.

## 5 数值实验

针对橙形为边界的外部区域, 在 MATLAB 13b 环境下, 检验双方向的外部区域数值保角变换计算方法的有效性. 基于模拟电荷法的单连通区域的外部区域数值正保角变换的误差由  $E_z = \max(|f(z)| - 1)$  确定, 外部数值保角逆变换的误差由  $E_w = \max(|f^*(w) - z|)$  确定.

**例 1** 橙形边界及外部区域的双方向数值保角变换. 边界

$$\{(x+1)^2 + y^2\}\{(x-1)^2 + y^2\} = a^4. \quad (5.1)$$

约束点的位置由

$$\begin{cases} x_i = r \cos(\theta), \\ y_i = r \sin(\theta), \\ r = \{\cos(2\theta) + ((\cos(2\theta))^2 + a^4 - 1)^{1/2}\}^{1/2}, \\ \theta = 2\pi(j - 1)/N \end{cases} \quad (5.2)$$

确定, 其中  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . 约束点分布在边界上, 边界由粗实线表示.

保角正变换模拟电荷点的位置由下面公式给出

$$\zeta_j = z_i + r_z |z_i - z_{i-1}| \exp^{i\{\arg(z_i - z_{i-1}) + (\pi/2)\}}. \quad (5.3)$$

保角逆变换模拟电荷点的位置由下面公式给出

$$\zeta_j = z_i + r_w |z_i - z_{i-1}| \exp^{i\{\arg(z_i - z_{i-1}) - (\pi/2)\}}, \quad (5.4)$$

其中  $a = 2^{1/16}$ ,  $r_z = r_w = 3$ ,  $r > 0$  是确定模拟电荷点位置的参数, 模拟电荷点的分布在区域  $D$  的外部, 如图 3 所示为数值保角正变换的模拟电荷点分布. 如图 4 所示为数值保角逆变换的模拟电荷点分布. 约束点和模拟电荷点一一对应, 数量都为  $N$ .

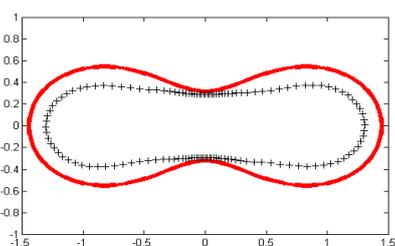


图 3: 橙形保角变换边界及电荷点位置

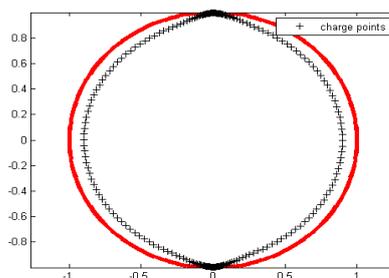


图 4: 橙形保角逆变换边界及电荷点位置

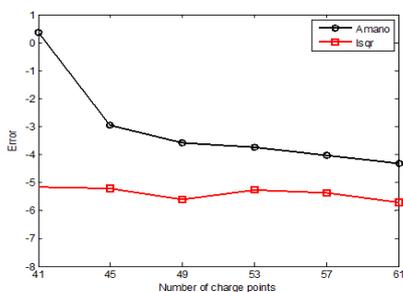


图 5: 橙形保角逆变换误差曲线

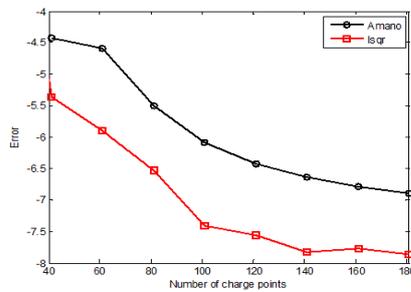


图 6: 橙形保角逆变换误差曲线

分别用 Amano 和 lsqr 分别表示天野法和基于 LSQR 方法的单连通外部区域数值保角逆变换算法. 图 5 给出的是当  $a = 2^{1/16}$ ,  $r_z = r_w = 3$  两种数值保角逆变换方法的误差曲

线, 图 5 说明误差随着电荷量的增大而减小, 同时可看出 lsqr 的误差值一直小于 Amano 的误差值, 在  $N = 61$  时, Amano 误差为  $2.4243 \times 10^{-5}$  而 lsqr 误差为  $1.3025 \times 10^{-6}$ , 说明了本文采用的算法可以得到更高的误差精度, 验证了算法的有效性.

图 6 是当  $a = 2^{1/14}$ ,  $r_z = r_w = 2$  时两种方法的误差曲线, 由图 6 可看出电荷点越多误差值越小, 且各个数量的电荷量上, lsqr 的误差值均比 Amano 的误差值小. 电荷点数为 180 时, Amano 误差为  $1.0366 \times 10^{-7}$ , lsqr 误差为  $1.6639 \times 10^{-8}$ , 因此数值实验再次验证了外部数值保角逆变换计算算法的有效性.

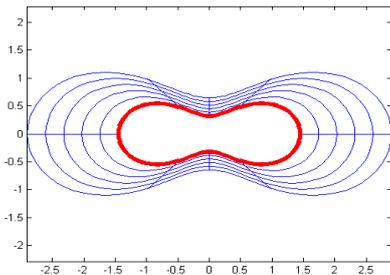


图 7: 橙形边界和外部区域及等高线

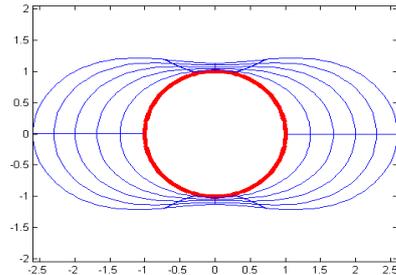


图 8: 图 7 的保角变换

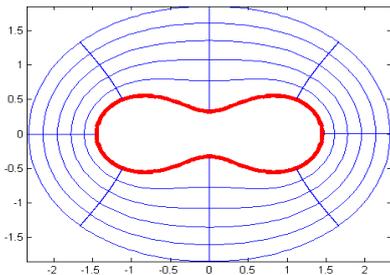


图 9: 图 10 的保角逆变换

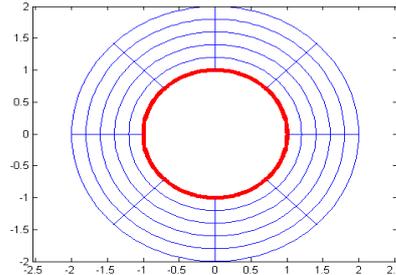


图 10: 图 8 的边界和其外部区域及其等高线

图 7-10 中的粗实线表示边界, 细实线表示等高线. 图 7 是橙形的边界及外部区域等高线, 图 8 是图 7 通过近似保角变换函数  $F(z)$  映射后得到的结果. 由图 8 可知, 近似保角变换函数  $F(z)$  将橙形的边界映射成了单位圆. 图 10 表示的是单位圆的边界和外部区域  $|w| > 1$  及其等高线, 以及模拟电荷点的配置位置. 图 9 是图 10 通过近似保角逆变换函数  $F^*(w)$  映射后得到的结果. 由图 9 和图 10 可知, 近似逆保角变换函数  $F^*(w)$  将橙单位圆边界映射成了橙形边界, 实现了数值保角逆变换.

## 6 结束语

本文利用 LSQR 方法求解出了基于模拟电荷法的外部数值保角逆变换中的约束方程组, 提出了 LSQR 方法的外部数值保角逆变换算法. 并通过数值实验验证了所提算法的有效性并用等高线模拟了外部数值保角逆变换的计算结果. 在今后的研究中, 本方法同样可以应

用于多连通区域的数值保角逆变换问题.

### 参 考 文 献

- [1] 祝颖润, 曹俊飞, 王瑞庭. 保形映射的一个充分必要条件 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2016, 1: 159–160.
- [2] 朱满座. 数值保角变换及其在电磁理论中的应用 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008.
- [3] 张家玲, 吕毅斌. 广义 Willmore 泛函及其极值子流形 [J]. 昆明理工大学学报 (自然科学版), 2016, 5: 138–142.
- [4] Kytke P K. Computational conformal mapping[M]. Birkhauser: Boston, 1998.
- [5] Dirscoland T A, Trefethen L N. Schwarz-Christoffel mapping[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [6] Sangawia A W K, Murid A H M, Nasser M M S. Annulus with circular slit map of bounded multiply connected regions via integral equation method[J]. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 2012, 4(4): 945–959.
- [7] Kim J W, Lee D J. Optimized compact finite difference schemes with maximum resolution[J]. AIAA J., 1996, 34(5): 887–893.
- [8] Kokkinos C A, Papamichael N, Sideridis A B. An orthonormalization method for the approximate conformal mapping of multiply-connected domains [J]. IMAJ. Numer. Anal., 1990, 10(3): 343–359.
- [9] Papamichael N, Pritsker I E, Saff E B, et al. Approximation of conformal mappings of annular regions[J]. Numer. Math., 1997, 76(4): 489–513.
- [10] Lo W L, Wu N J, Chen C S, et al. Exact boundary derivative formulation for numerical conformal mapping method[J]. Math. Prob. Engin., 2016, 2: 1–18.
- [11] Singer H, Steinbigler H, Weiss P. A charge simulation method for calculation of high voltage field[J]. IEEE Trans. Power Apparatus Syst., 1974, 9(3): 1660–1668.
- [12] Amano K. Numerical conformal mappings of exterior domains based on the charge simulation method (in Japanese)[J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1988, 29(1): 62–72.
- [13] Amano K. Numerical conformal mappings of interior domains based on the charge simulation (in Japanese)[J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1988, 29(7): 697–699.
- [14] Amano K, Dai O, Ogata H, et al. Numerical conformal mappings onto the linear slit domain[J]. Japan J. Ind. Appl. Math., 2012, 7(29): 165–186.
- [15] Amano K. A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains[J]. J. Comput. Appl. Math., 1994, 53(3): 354–361.
- [16] Amano K. Numerical conformal mappings of interior both directions domains based on the charge simulation method (in Japanese)[J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1990, 5: 623–632.
- [17] 吕毅斌, 赖富明, 王樱子, 武德安. 基于 GMRES( $m$ ) 法的双连通区域数值保角变换的算法 [J]. 数学杂志, 2016, 36(6): 1028–1034.
- [18] 王樱子, 赖富明, 吕毅斌等. 基于 Padé 迭代法的数值保角变换算法 [J]. 数值计算与计算机应用, 2016, 37(4): 299–306.
- [19] Lu Y, Wu D, Wang Y, et al. The accuracy improvement of numerical conformal mapping using the modified Gram-Schmidt method [C]. The 19th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 555–56.
- [20] Lai F, Wang Y, Lu Y, et al. Improving the accuracy of the charge simulation method for numerical conformal mapping[J]. Math. Prob. Engin., 2017, 4: 1–9.

- [21] Paige C C, Saunders M A. LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares[J]. *Acm Trans. Math. Soft.*, 1982, 8(1): 43–71.
- [22] 曹志浩著. 变分迭代法 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [23] 栾颖著. MATLAB R2013a 求解数学问题 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [24] 周茜, 雷渊, 乔文龙. 一类线性约束矩阵不等式及其最小二乘问题 [J]. *计算数学*, 2016, 2: 171–186.

## EXTERNAL NUMERICAL CALCULATION OF CONFORMAL INVERSE TRANSFORM BASED ON LSQR METHOD

LÜ Yi-bin<sup>1</sup>, WANG Jian<sup>1</sup>, WANG Ying-zi<sup>2</sup>, WU Shuang<sup>1</sup>

(1. School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

(2. Computer Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:** In this paper, a bidirectional method for the numerical conformal mapping of exterior domain is proposed. The LSQR (least square QR-factorization method) is used to solve the approximate inverse conformal mapping of the constraint equations. The maximum modulus theorem for regular function can be used to estimate error. Numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the method.

**Keywords:** numerical conformal inverse mapping; charge simulation method; LSQR method

**2010 MR Subject Classification:** 65E05; 30C30