

线性微分方程解在角域内的性质

魏文龙, 魏冬梅, 黄志刚

(苏州科技大学数理学院, 江苏 苏州 215009)

摘要: 本文主要研究了线性微分方程 $f'' + A(z)f' + B(z)f = F(z)$ 解的精确级 Borel 方向的问题. 利用熊庆来的无限级型函数和庄圻泰的关于无穷级 Borel 方向的一个等价条件, 获得了方程非齐次项的精确级 Borel 方向就是方程解的精确级 Borel 方向的结果, 推广了已有的结论.

关键词: 亚纯函数; Borel 方向; 零点聚值线; 精确级

MR(2010) 主题分类号: 30D35; 34A35

中图分类号: O174.52

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)02-0269-10

1 引言及主要结果

本文主要研究非齐次线性微分方程 $f'' + Af' + Bf = F$ 中方程解的 Borel 方向和非齐次项之间的关系. 关于奇异方向中 Borel 方向的发展已经有了较长的时间, 本文所讨论的是精确级 Borel 方向的某些性质, 作为对 Borel 方向的一个发展和补充, 同时给出了亚纯函数的精确级 Borel 方向和零点聚值线的部分性质. 假设读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 理论的基本定义, 定理和标准符号^[1-4]. 为了叙述方便, 给出以下定义.

定义 1.1 设 $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, 复平面上的角域和扇形域分别定义为

$$\Omega(\alpha, \beta) = \{z | \alpha \leq \arg z \leq \beta\};$$

$$\Omega(\alpha, \beta, r) = \{z | z \in \Omega(\alpha, \beta), |z| < r\}.$$

设 $f(z)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 亚纯函数 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ 上的零点收敛指数 $\lambda_{\theta, \varepsilon}(f)$ 定义为

$$\lambda_{\theta, \varepsilon}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = 0)}{\log r}$$

且 $\lambda_{\theta}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{\theta, \varepsilon}(f)$.

*收稿日期: 2017-11-20

接收日期: 2018-02-23

基金项目: 国家自然科学基金 (11001157); 江苏省自然科学基金 (BK2010234); 苏州科技大学研究生科研创新计划项目 (SKYCX16-007).

作者简介: 魏文龙 (1993-), 男, 江苏泰州, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

通讯作者: 黄志刚.

定义 1.2 设 $f(z)$ 是角域上的亚纯函数, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $k = \frac{\pi}{\beta - \alpha}$. 记

$$A_{\alpha, \beta}(r, f) = \frac{k}{\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^k} - \frac{t^k}{r^{2k}} \right) \{ \log^+ |f(te^{i\alpha})| + \log^+ |f(te^{i\beta})| \} \frac{dt}{t};$$

$$B_{\alpha, \beta}(r, f) = \frac{2k}{\pi r^k} \int_{\alpha}^{\beta} \log^+ |f(re^{i\theta})| \sin k(\theta - \alpha) d\theta;$$

$$C_{\alpha, \beta}(r, f) = 2 \sum_{1 < |b_v| < r} \left(\frac{1}{|b_v|^k} - \frac{|b_v|^k}{r^{2k}} \right) \sin k(\beta_v - \alpha);$$

$$D_{\alpha, \beta}(r, f) = A_{\alpha, \beta}(r, f) + B_{\alpha, \beta}(r, f);$$

$$S_{\alpha, \beta}(r, f) = A_{\alpha, \beta}(r, f) + B_{\alpha, \beta}(r, f) + C_{\alpha, \beta}(r, f),$$

其中 $b_v = |b_v| e^{i\beta_v}$ ($v = 1, 2, \dots$) 是 $f(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha, \beta)$ 内极点 (不计重数), $S_{\alpha, \beta}(r, f)$ 称为 $f(z)$ 在角域中 Nevanlinna 特征函数, $C_{\alpha, \beta}(r, f)$ 称为 $f(z)$ 在角域上极点的计数函数 (重级极点按重数计算), 则亚纯函数在角域上的级定义为

$$\sigma_{\alpha, \beta}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ S_{\alpha, \beta}(r, f)}{\log r}.$$

定义 1.3 设 $f(z)$ 是无限级亚纯函数, 实函数 $\rho(r)$ 称为 $f(z)$ 的熊庆来无限级, 如果 $\rho(r)$ 满足如下性质:

[i] $\rho(r)$ 是 $r \geq r_0$ ($r_0 > 0$) 上的连续非减函数并且 $\rho(r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$);

[ii] 函数 $U(r) = r^{\rho(r)}$ ($r \geq r_0$) 满足 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log U(R)}{\log U(r)} = 1, R = r + \frac{r}{\log U(r)}$;

[iii] $R = r + \frac{r}{\log U(r)}$.

上述定义最先为熊庆来所介绍, 关于 $\rho(r)$ 的存在性, 庄圻泰给出了其简单的证明.

定义 1.4 射线 $J: \arg z = \theta$ 称为 $f(z)$ 的 1 条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 如果

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = a)}{\rho(r) \log r} = 1,$$

$\forall \varepsilon > 0$ 和任意的复数 $a \in C_{\infty}$ 成立, 最多除去 2 个例外的 a 值.

射线 $J: \arg z = \theta$ 称为 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级零点聚值线, 如果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = 0)}{\rho(r) \log r} = 1,$$

其中 $n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = a)$ 表示 $f(z)$ 在扇形域 $\Omega(\theta, \varepsilon, r) = \{z: \theta - \varepsilon < \arg z < \theta + \varepsilon, |z| < r\}$ 内 a 值点的个数.

在文献 [5] 中, 伍胜健首次研究了二阶微分方程的解的零点的幅角分布, 发现了方程解的乘积的零点聚值线和 Borel 方向之间的联系, 给出了如下的结论.

定理 A 设 $A(z)$ 是一个级为 $\rho < \infty$ 的超越整函数和 f_1, f_2 为方程 $f'' + A(z)f = 0$ 的两个线性无关解, 记 $E = f_1 f_2$. 再设 E 的零点收敛指数 $\lambda(E) = \infty$, 则射线 $\arg z = \theta$ 是 E 的一条 ∞ 级 Borel 方向的充分必要条件是 $\lambda_{\theta}(E) = \infty$.

定理 A 中对于 Borel 方向的级的估计还是比较粗糙的, 吴昭君就针对定理 A 给出了猜想, 将定理 A 中的无穷级换成熊庆来的无限级, 是否能得到相类似的结论? 在文献 [6] 中, 吴昭君给出了证明, 即定理 B.

定理 B 设 $A(z)$ 是级为 $\rho < \infty$ 的超越整函数, f_1, f_2 为方程 $f'' + A(z)f = 0$ 的两个线性无关解. 令 $E = f_1 f_2$, 再设 $\lambda(E) = \infty$, $\rho(r)$ 是 E 的一个无限级, 则射线 $\arg z = \theta$ 是 E 的一个 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充分必要条件是

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), E = 0)}{\rho(r) \log r} = 1.$$

从定理 A 到定理 B, 不难看出, 定理 B 对 Borel 方向的估计比定理 A 要精确得多, 使得结论得到了进一步的完善, 这提供了一个思路. 在文献 [10] 中, 黄志刚、王珺研究了二阶非齐次线性微分方程的非齐次项和方程解的 Borel 方向之间的关系, 得到了定理 C.

定理 C 假设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是有限级的整函数, $F(z)$ 是无穷级的超越整函数, 并且满足 $\max\{\sigma(A), \sigma(B)\} < \sigma(F) = \infty$, 如果 $\arg z = \theta$ 是 $F(z)$ 的一条 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 也是方程 $f'' + Af' + Bf = F$ 的任意非平凡解的一条 Borel 方向.

在定理 B 的启发之下, 同时在定理 C 的基础之上, 研究非齐次方程解的精确级 Borel 方向和方程非齐次项之间的关系, 得到定理 1.

定理 1 假设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是有限级的整函数, $F(z)$ 是无穷级的超越整函数, 如果 $\arg z = \theta$ 是 $F(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 也是方程 $f'' + Af' + Bf = F$ 的任意非平凡解的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

在文献 [8] 中, Rossi 和 Wang 讨论了方程 $f'' + A(z)f = 0$ 整函数解与其导数零点之间的关系, 得到

定理 D 假设 $A(z)$ 是一个有限级的超越整函数, 当 $\arg z = \theta$ 是复平面上任意一条射线, 于是方程 $f'' + Af = 0$ 的任意解有 $\lambda_\theta(f) = \infty$ 当且仅当 $\lambda_\theta(f') = \infty$.

结合定理 D 的结论, 不难得出一个问题, 方程 $f'' + Af = 0$ 的任意整函数解的精确级零点聚值线和方程解导数的零点聚值线是否有这样的关系? 经过讨论, 得到了肯定的回答.

定理 2 设 $B(z)$ 为有限级的超越整函数, $\arg z = \theta$ 是从原点出发的一条射线. 则对方程 $f'' + B(z)f = 0$ 的任意非平凡解 f , 都有 $\arg z = \theta$ 是 f 的精确级零点聚值线当且仅当 $\arg z = \theta$ 是 f' 的精确级零点聚值线.

此外, 我们知道定理 1 的结论是对定理 C 的改进, 使得对 Borel 方向的增长级的估计更加精确. 关于定理 1 的证明将主要利用定理 3 的结论以及定理 3 的推论, 从新的角度来研究方程解的性质.

定理 3 令 $h(z) = f(z)g(z)$, 其中 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是复平面上的亚纯函数. 设 $\rho(r)$ 是 $h(z)$ 的一个无限级, 射线 $\arg z = \theta$ 是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则射线 $\arg z = \theta$ 一定是 $f(z)$ 或者 $g(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

由定理 3 的结论, 可以给出以下 4 个推论.

推论 1 令 $h(z) = f(z)g(z)$, 其中 $f(z)$ 和 $h(z)$ 都是复平面上的亚纯函数. 设 $\rho(r)$ 是 $h(z)$ 的一个无限级, 并且射线 $\arg z = \theta$ 是 $f(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级但不是 $g(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 必是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

推论 2 是推论 1 的推广. 推论 1 是两个亚纯函数的乘积, 推论 2 是多个亚纯函数的乘积所对应的结论.

推论 2 令 $h(z) = f_1(z)f_2(z) \cdots f_n(z)$, 其中 $f_i(z) (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是复平面上的亚纯函数. 设 $\rho(r)$ 是 $h(z)$ 的一个无限级, 并且射线 $\arg z = \theta$ 是某一个 $f_m(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级

Borel 方向但不是 $f_n(z)(n \neq m)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 必是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

推论 3 主要讨论两个亚纯函数之和关于精确级 Borel 方向的结论.

推论 3 令 $h(z) = f(z) + g(z)$, 其中 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都是复平面上的亚纯函数. 设 $\rho(r)$ 是 $h(z)$ 的一个无限级, 并且射线 $\arg z = \theta$ 是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 必为 $f(z)$ 或者 $g(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

下面推论 4 是推论 3 的推广, 推论 4 将直接用于定理 1 的证明中.

推论 4 令 $h(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$, 其中 $f_i(z)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是复平面上的亚纯函数. 设 $\rho(r)$ 是 $h(z)$ 的一个无限级, 并且 $\arg z = \theta$ 为 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 必为某一个 $f_i(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

2 引理

为了定理的证明, 需要下面的引理.

引理 2.1 ^[1] (i) 设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha, \beta)(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数, 则 $\forall a \in \mathbb{C}$, 有

$$S_{\alpha, \beta}(r, \frac{1}{f-a}) = S_{\alpha, \beta}(r, f) + \varepsilon(r, a),$$

其中当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon(r, a) = O(1)$.

(ii) 对于任意的 $r < R$,

$$A_{\alpha, \beta}(r, \frac{f'}{f}) \leq K \left\{ \left(\frac{R}{r} \right)^k \int_1^R \frac{\log^+ T(r, f)}{t^{1+k}} dt + \log^+ \frac{r}{R-r} + \log^+ \frac{R}{r} + 1 \right\},$$

$$B_{\alpha, \beta}(r, \frac{f'}{f}) \leq \frac{4k}{r^k} m(r, \frac{f'}{f}),$$

其中 $k = \frac{\pi}{\beta - \alpha}$ 且 k 是不取决于 r 和 R 的常数.

引理 2.2 ^[1] 设 $f(z)$ 为角域 $\Omega(\alpha, \beta)(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$ 上的非常数亚纯函数, 则 $\forall a_j \in C_\infty$, $j = 1, 2, \cdots, q$, 有

$$(q-2)S_{\alpha, \beta}(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \bar{C}_{\alpha, \beta}(r, \frac{1}{f-a_j}) + O(\log U(r)).$$

引理 2.3 ^[9] 设 $f(z)$ 是复平面上的一个无限级亚纯函数, $\rho(r)$ 是 $f(z)$ 的一个级, 射线 $L: \arg z = \theta_0$ 是函数 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充分必要条件是对于任意的 $\eta(0 < \eta < \frac{\pi}{2})$,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S_{\theta-\eta, \theta+\eta}(r, f)}{\rho(r) \log r} = 1.$$

引理 2.4 ^[10] 设 $f(z)$ 是复平面上的一个亚纯函数, 在角域 $\Omega(\alpha, \beta)(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$ 内, $f(z)$ 和 $\frac{1}{f(z)}$ 具有相同的 Borel 方向.

引理 2.5 ^[8] 设 $f(z)$ 是复平面上的一个亚纯函数, 在角域 $\Omega(\alpha, \beta)(0 < \beta - \alpha \leq 2\pi)$ 内, a 为任意一个有穷复数, 则函数 $f(z)$ 和 $f(z) + a$ 必有相同的 Borel 方向.

引理 2.6 ^[11] 设 $f(z)$ 是无限级亚纯函数, 其型函数为 $U(r) = r^{\rho(r)}$, 则射线 $\arg z = \theta_0$ 是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向的充分必要条件是: 射线 $\arg z = \theta_0$ 是它的导数 $f'(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

3 定理及推论证明

在给出定理 1 的证明之前, 先给出定理 3 及其推论的证明.

定理 3 的证明 假设该结论不成立, 即 $\arg z = \theta$ 同时不是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 根据定义 1.4, 分别存在三个判别的复数 a_1, a_2, a_3 和 b_1, b_2, b_3 和任意的 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ n(r, \Omega(\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0), f = a_j)}{\log U(r)} < 1, \quad (3.1)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ n(r, \Omega(\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0), g = b_j)}{\log U(r)} < 1, \quad (3.2)$$

其中 $j = 1, 2, 3$. 对于 $f(z)$ 不失一般性, 令 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty$, 否则只需要考虑

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a_1)}{f(z) - f(a_3)} \frac{f(a_2) - f(a_3)}{f(a_2) - f(a_1)}.$$

对于 (3.1) 式, 对于充分大的 r , 有

$$\begin{aligned} & n(r, \Omega(\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0), f = 0) + n(r, \Omega(\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0), f = 1) \\ & + n(r, \Omega(\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0), f = \infty) < 3U(r)^{1-\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

即

$$\sum_{j=1}^3 n(r, \Omega(\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0), f = a_j) < 3U(r)^{1-\varepsilon_0}. \quad (3.3)$$

注意到不等式

$$C_{\theta, \varepsilon}(r, \frac{1}{f - a_j}) \leq 2n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = a_j). \quad (3.4)$$

结合 (3.3) 式和 (3.4) 式, 可以得出

$$\sum_{j=1}^3 C_{\theta, \varepsilon_0}(r, \frac{1}{f - a_j}) \leq 6U(r)^{1-\varepsilon_0}, \quad (3.5)$$

运用引理 2.2 并结合 (3.5) 式, 于是有

$$\begin{aligned} S_{\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0}(r, f) & \leq \sum_{j=1}^q \bar{C}_{\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0}(r, \frac{1}{f - a_j}) + O(\log U(r)) \\ & \leq 6U(r)^{1-\varepsilon_0} + O(\log U(r)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

再运用精确级的定义, 并结合 (3.6) 式可以得出

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S_{\theta - \varepsilon_0, \theta + \varepsilon_0}(r, f)}{\rho(r) \log r} \leq \frac{\log(6U(r)^{1-\varepsilon_0} + O(\log U(r)))}{\rho(r) \log r} < 1. \quad (3.7)$$

同理可得

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S_{\theta-\varepsilon_0, \theta+\varepsilon_0}(r, g)}{\rho(r) \log r} < 1, \quad (3.8)$$

由于 $h(z) = f(z)g(z)$, 结合 (3.7) 式和 (3.8) 式所以得出

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S_{\theta-\varepsilon_0, \theta+\varepsilon_0}(r, h)}{\rho(r) \log r} < 1. \quad (3.9)$$

另一方面, 根据引理 3 的结论, 因为 $h(z)$ 是复平面上无限级的亚纯函数, 且射线 $L: \arg z = \theta$ 是函数 $h(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 所以得出

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S_{\theta-\varepsilon_0, \theta+\varepsilon_0}(r, h)}{\rho(r) \log r} = 1. \quad (3.10)$$

于是 (3.9) 式与 (3.10) 式矛盾, 于是定理 3 得证.

推论 1 的证明 因为 $h(z) = f(z)g(z)$, 将其变形为 $f(z) = h(z)\frac{1}{g(z)}$. 因为 $\arg z = \theta$ 是 $f(z)$ 但不是 $g(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 由定理 3 可得 $\arg z = \theta$ 是 $h(z)$ 或者 $\frac{1}{g(z)}$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 根据引理 2.4 得知, $g(z)$ 和 $\frac{1}{g(z)}$ 具有相同的 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 同样不是 $\frac{1}{g(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 所以 $\arg z = \theta$ 必定是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 推论 1 完证.

推论 2 的证明 因为 $h(z) = f_1(z)f_2(z) \cdots f_n(z)$, 将其变形为

$$f_m(z) = h(z) \frac{1}{f_1} \frac{1}{f_2} \cdots \frac{1}{f_{m-1}} \frac{1}{f_{m+1}} \cdots \frac{1}{f_n}.$$

因为 $\arg z = \theta$ 是 $f_m(z)$ 但不是 $f_n(z) (n \neq m)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 由定理 3 可得 $\arg z = \theta$ 是 $h(z)$ 或者 $\frac{1}{f_n} (n \neq m)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 根据引理 2.4 得知, $f_n(z)$ 和 $\frac{1}{f_n(z)}$ 具有相同的 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 同样不是 $\frac{1}{f_n(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 所以 $\arg z = \theta$ 必是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 推论 2 完证.

推论 3 的证明 因为 $h(z) = f(z) + g(z)$, 于是可以变形为 $h(z) = f(z)(1 + \frac{g(z)}{f(z)})$. 因为 $\arg z = \theta$ 是 $h(z)$ 的一条 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 根据定理 3 的结论, 于是有 $\arg z = \theta$ 一定是 $f(z)$ 或者 $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 如果 $\arg z = \theta$ 是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则推论 3 得证. 如果 $\arg z = \theta$ 不是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则一定是 $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 根据引理 2.5, 则 $\arg z = \theta$ 一定是 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 再次运用定理 3 的结论, 则 $\arg z = \theta$ 一定是 $g(z)$ 或者 $\frac{1}{f(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 由于前面的假设, $\arg z = \theta$ 不是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则根据引理 2.4 可知, $\arg z = \theta$ 也不是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 于是 $\arg z = \theta$ 一定是 $g(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 于是推论 3 完证.

推论 4 的证明 将 $h(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$ 变形为

$$h(z) = f_1(z) \left(1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)} + \cdots + \frac{f_n(z)}{f_1(z)} \right).$$

根据定理 3 的结论, 于是有 $\arg z = \theta$ 一定是 $f_1(z)$ 或者 $1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)} + \cdots + \frac{f_n(z)}{f_1(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 如果 $\arg z = \theta$ 是 $f_1(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则推论 4 得证. 否则 $\arg z = \theta$ 一定是

$1 + \frac{f_2(z)}{f_1(z)} + \cdots + \frac{f_n(z)}{f_1(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 根据引理 2.5, 则 $\arg z = \theta$ 一定是 $\frac{f_2(z)}{f_1(z)} + \cdots + \frac{f_n(z)}{f_1(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 将 $\frac{f_2(z)}{f_1(z)} + \cdots + \frac{f_n(z)}{f_1(z)}$ 变形为

$$\frac{1}{f_1(z)}(f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z)).$$

根据假设 $\arg z = \theta$ 不是 $f_1(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则利用引理 2.4, $\arg z = \theta$ 同样不是 $\frac{1}{f_1(z)}$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则 $\arg z = \theta$ 是 $f_2(z) + f_3(z) + \cdots + f_n(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 后半部分的证明类似前面, 反复利用引理 2.4、引理 2.5 和定理 3 的结论, 并结合方程变形, 则推论 4 完证.

定理 1 的证明 对于方程 $f'' + A(z)f' + B(z)f = F(z)$, 因为 $A(z)$ 和 $B(z)$ 都是有限级整函数, 所以都没有 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 因为 $\arg z = \theta$ 是 $F(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则根据推论 4 可得, $\arg z = \theta$ 一定是 $f''(z)$ 或者 $A(z)f'(z)$ 或者 $B(z)f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 现将定理证明分为 3 种情形.

情形 1 如果 $\arg z = \theta$ 是 $f''(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则根据引理 2.6 可得, $\arg z = \theta$ 是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

情形 2 如果 $\arg z = \theta$ 是 $A(z)f'(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则根据定理 3 的结论可得, $\arg z = \theta$ 一定是 $A(z)$ 或者 $f'(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 因为 $A(z)$ 没有 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 所以 $\arg z = \theta$ 是 $f'(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 再根据引理 6 可得, $\arg z = \theta$ 是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

情形 3 如果 $\arg z = \theta$ 是 $B(z)f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则根据定理 3 的结论可得, $\arg z = \theta$ 一定是 $B(z)$ 或者 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向. 因为 $B(z)$ 没有 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 所以 $\arg z = \theta$ 是 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向.

综上所述, 非齐次项 $F(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向一定是方程解 $f(z)$ 的 $\rho(r)$ 级 Borel 方向, 则定理 1 完证.

定理 2 的证明 设 $f(z)$ 为方程 $f'' + B(z)f = 0$ 的非平凡解, 可以将方程变形为

$$\frac{f''}{f} = -B. \quad (3.11)$$

类似文献 [12], 对 (3.11) 式运用 Wiman-Valiron 理论, 于是得到

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \leq \sigma(B). \quad (3.12)$$

因此对于足够大的 r , 有

$$\log T(r, f) \leq r^{\sigma(B)+1}. \quad (3.13)$$

对 (3.13) 式运用引理 1 的 (ii), 对任意的 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2(\sigma(B)+1)})$. 可以推出

$$\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2(\sigma(B)+1)})$$

和

$$B_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) \leq \frac{2\pi}{\varepsilon} r^{\frac{-\pi}{2\varepsilon}} m(r, \frac{f'}{f}) = \frac{2\pi}{\varepsilon} r^{\frac{-\pi}{2\varepsilon}} O(\log(rT(r, f))) = O(r^{\sigma(A)+1-\frac{\pi}{2\varepsilon}}) = O(1),$$

除去可能的一个有限测度集外成立.

由 $D_{\alpha,\beta}(r, f)$ 的定义, 根据上述不等式可得

$$D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) = O(1) \quad (3.14)$$

在除去可能的一个有限测度集外成立. 因此, 类似于上述的证明可得

$$D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f}) \leq D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f'}) + D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) + O(1) = O(1) \quad (3.15)$$

在除去可能的一个有限测度集外成立. 结合 (3.11) 式, 有

$$D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f}) = D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, B). \quad (3.16)$$

另一方面, 将方程 $f'' + B(z)f = 0$ 变形为

$$\frac{f''}{f'} = -B \frac{f}{f'},$$

则可以得到

$$D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) \leq D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f'}) + D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{B}) + O(1).$$

结合定义 1.2 和引理 2.1 的 (i) 和上式可得

$$\begin{aligned} D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) &\leq D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f'}) + D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{B}) + O(1) \\ &\leq D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f'}) + S_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{B}) + O(1) \\ &\leq D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f'}) + S_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, B) + O(1) \\ &\leq D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f''}{f'}) + D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, B) + O(1) \\ &\leq O(1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

由于 f 的零点是单的, 则

$$C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) = C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{f'}), \quad (3.18)$$

再由定义 1.2、(3.14) 式、(3.17) 式和 (3.18) 式, 考虑

$$\begin{aligned} S_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) &= C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) + D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) \\ &= C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f}{f'}) + O(1) \\ &= C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{f'}) + O(1) \end{aligned} \quad (3.19)$$

和

$$\begin{aligned} S_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) &= C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) + D_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) \\ &= C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{f'}{f}) + O(1) \\ &= C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{f}) + O(1). \end{aligned} \quad (3.20)$$

根据引理 2.1 的 (i) 和 (3.19)–(3.20) 式, 有

$$C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{f}) = C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{f'}) + O(1), \quad (3.21)$$

根据不等式

$$n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = 0) \leq C_{\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon}(r, \frac{1}{f}) \leq 2n(r, \Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), f = 0),$$

并且知道

$$T(r, f) = T(r, f') + O(1), \quad (3.22)$$

结合定义 1.4 可得

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\rho(r) \log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f')}{\rho(r) \log r} = 1. \quad (3.23)$$

即函数 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 具有相同的精确级为 $\rho(r)$, 于是结合 (3.21)–(3.23) 式以及定义 1.4, 则有

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \theta, \varepsilon, f = 0)}{\rho(r) \log r} = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \theta, \varepsilon, f' = 0)}{\rho(r) \log r}.$$

故有 $\arg z = \theta$ 是 f 的精确级零点聚值线当且仅当 $\arg z = \theta$ 是 f' 的精确级零点聚值线.

参 考 文 献

- [1] Goldberg A A, Ostrovskii I V. The distribution of values of meromorphic functions[M]. Moscow: Izdat Nauk, 1970.
- [2] Zheng Jianhua. Value distribution of meromorphic functions [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
- [3] Hayman W. Meromorphic function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [4] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [5] 伍胜健. 复振荡中的幅角分布 [J]. 中国科学 A, 2004, 34(5): 567–573.
- [6] 吴昭君, 孙道椿. 复振荡中的辐角分布 [J]. 数学学报, 2007, 50(6): 1297–1304.
- [7] Huang Z G, Wang J. The radial oscillation of entire solutions of complex differential equations ☆ [J]. Math. Anal. App., 2015, 431(2): 988–999.
- [8] Rossi John, Wang Shupe. The radial oscillation of solutions to ode's in the complex domain[J]. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1996, 39: 473–483.
- [9] Chuang C. On Borel directions of meromorphic functions of infinite order (II) [J]. Bull. Hongkong Math. Soc., 1999, 2(2): 305–323.

- [10] 石磊, 伍鹏程, 龙见仁. 亚纯函数的 Borel 方向 [J]. 贵州师范大学学报 (自然版), 2012, 30(3): 55–59.
- [11] 孙道椿. 无限级半纯函数与其导数的公共 Borel 方向 [J]. 数学学报, 1987, 30(5): 641–647.
- [12] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: de Gruyter, 1993.

THE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ANGULAR DOMAIN

WEI Wen-long, WEI Dong-mei, HUANG Zhi-gang

*(School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology,
Suzhou 215009, China)*

Abstract: In this paper, we mainly study the problem on the Borel directions of precise order of solutions of linear differential equations $f'' + Af' + Bf = F(z)$. By using the infinity order type function of Xiong Qinglai and a sufficient and necessary condition for infinity order Borel direction which was established by Chuang Chatai, we obtain the result that the Borel directions of precise order of solutions of linear differential equations also belongs to $F(z)$ which generalizes the previously results.

Keywords: meromorphic function; Borel direction; zero accumulation ray; precise order

2010 MR Subject Classification: 30D35; 34A35