

一种混合算法求解可分离带线性约束的变分不等式问题

张从军¹, 李 赛¹, 吕丽霞¹, 王月虎²

(1. 南京财经大学应用数学学院, 江苏 南京 210023)

(2. 南京财经大学管理科学与工程学院, 江苏 南京 210023)

摘要: 本文研究了大规模的可分离带线性约束的变分不等式问题, 提出了基于对数二次临近点法的交替方向法, 新算法的每步用一个非线性方程组来代替变分不等式问题. 通过有效求解非线性方程组, 使得新算法简单易行而且一定程度上提高了计算的效率. 同时, 在映射单调和原问题解集非空的条件下, 证明了此算法具有全局收敛性, 最后通过数值实验说明了此算法是有效可行的.

关键词: 变分不等式; 交替方向法; 全局收敛性

MR(2010) 主题分类号: 49J40

中图分类号: O177.91

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)02-0234-15

1 引言

本文研究一类特殊的变分不等式问题: 寻找一点 $u^* \in \Omega$, 使得

$$(u - u^*)^T F(u^*) \geq 0, \forall u \in \Omega,$$

其中 $u = (x, y)^T$, $F(u) = (f(x), g(y))^T$, $\Omega = \{(x, y) | x \in X, y \in Y, Ax + By \geq b\}$. 将此类问题记作 $SMVI(\Omega, F)$, 这里 $X \subseteq R^n$ 和 $Y \subseteq R^m$ 为非空闭凸集, $A \in R^{l \times n}$, $B \in R^{l \times m}$ 是矩阵, $b \in R^l$ 是向量, $f: X \rightarrow R^n$, $g: Y \rightarrow R^m$ 为单调映射, 并且以上各量均已给定. 因为映射 f 只取决于变量 x , 映射 g 只取决于变量 y , 所以被称为是可分离带线性约束的变分不等式问题. 这类问题被广泛应用于研究网络分析、交通运输、图论等领域. 目前对于问题 $SMVI(\Omega, F)$ 的研究, 首先要在线性约束条件 $Ax + By = b$ 中引入拉格朗日乘子 $\lambda \in R^l$, 进而得到原 $SMVI(\Omega, F)$ 的等价形式如下: 求 $w^* \in Z$, 满足 $(w - w^*)^T Q(w^*) \geq 0, w \in Z$, 其中 $w = (x, y, \lambda)^T$, $Q(w) = (f(x) - A^T \lambda, g(y) - B^T \lambda, Ax + By - b)^T$, $Z = X \times Y \times R^l$. 接着再对该等价形式进行求解.

交替方向法 (ADM) 是用来求解原问题 $SMVI(\Omega, F)$ 最经典的算法. 一直以来, 如何快速求解两个子变分不等式问题成了考查 ADM 有效性的关键, 为此很多学者作了大量工作, 对 ADM 进行了相应的改进^[1-5]. 虽然提出的各种改进策略在一定程度上有效提高了 ADM 的计算速度, 但需要注意的是, 此类改进的方法并没有完全避免求解子变分不等式问题. 因为从计算角度看, 在大部分情况下, 直接求解变分不等式并不是件容易的事情. 为了能更好的提出新混合算法, 接下来我们介绍对数二次临近点法. 对数二次临近

*收稿日期: 2017-09-13

接收日期: 2017-12-13

基金项目: 江苏省高校自然科学研究面上项目 (16KJB110009); 江苏省自然科学基金 (BK20171041); 江苏高校哲学社会科学研究项目 (2017SJB0238).

作者简介: 张从军 (1957-), 男, 安徽淮北, 教授, 主要研究方向: 非线性分析与经济应用.

点算法 (LQP) ^[6-11] 主要用于求解如下这样一类变分不等式问题, 即找一点 $u^* \in \Omega$, 满足 $(u - u^*)^T F(u^*) \geq 0, \forall u \in \Omega$, 其中 $u = (x, y)^T, F(u) = (f(x) + Ay, -A^T + b)^T, \Omega = R_+^n \times Y$ 这里矩阵 $A \in R^{m \times n}$, 向量 $b \in R^m, Y$ 为 R^m 中的闭凸子集, $f: R^n \rightarrow R^n$ 是连续单调映射. LQP 在每次迭代时只需解决这样一个非线性方程组

$$\beta_k (f(x) + Ay) + x - (1 - \mu)x^k - \mu X^k x^{-1} = 0.$$

一般而言, 求解一个非线性方程组比一个变分不等式组更容易操作. 尽管此方法是对子问题进行非精确求解, 但是相对于精确求解子问题, 非精确求解更可行、快速. 因为从数值计算角度分析, 精确求解一个子问题往往不太容易实现. 考虑到这个方法求解较容易的特点, LQP 方法值得关注和借鉴. 基于上面的考虑, 本文提出了一种新的混合算法. 此算法在预测步只需求解一系列相关联的非线性方程组, 而不是去处理一系列的子变分不等式问题. 同时这样做还可以在可行集中产生一个内点序列, 在一定程度上提高了算法的有效性和可行性: 在修正步中, 修正值是由当前预测点和一个投影算子构成的凸组合得到的. 这样保证了如果前一个迭代点是内点, 那么这样一个凸组合得到的下一个迭代点也将会是内点. 另一方面需要注意的是, 当可行集为简单集时, 投影算子更容易执行.

本文结构如下: 第 2 节主要概述了本文所需要的预备知识, 参见文献 [12-15]; 第 3 节在映射单调和原变分不等式解集非空的条件下提出一种新的混合算法, 并给出算法的一些性质, 相关证明技巧参见文献 [16-21]; 第 4 节和第 5 节分析了新算法的收缩性及全局收敛性, 参见文献 [22-26]; 第 6 节利用数值算例验证了算法的有效性.

2 预备知识

用 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ 表示 2 - 范数, $\|u\|_G$ 表示向量的 G - 范数, 记为 $\|u\|_G = \sqrt{u^T G u}$, 其中 G 为给定的对称正定矩阵.

令 $P_\Omega(\cdot)$ 为 R^n 到 Ω 上的投影映射, 即 $P_\Omega(x) = \arg \min \{\|y - x\| \mid y \in \Omega\}$. 投影映射有如下重要性质.

引理 1 ^[6] 若 $\Omega \subseteq R^n$ 为一非空闭凸子集, $P_\Omega(\cdot)$ 为 R^n 到 Ω 上的投影映射, 对于任意的 $x, y \in R^n$, 任意 $z \in \Omega$, 有

$$(x - P_\Omega(x))^T (z - P_\Omega(x)) \leq 0, \quad (2.1)$$

$$\|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\| \leq \|x - y\|. \quad (2.2)$$

定义 1 集合 $\Omega \subseteq R^n$, 设 f 是 $\Omega \rightarrow R^n$ 的映射, 如果 f 满足 $(x - y)^T (f(x) - f(y)) \geq 0, \forall x, y \in \Omega$, 则称 f 在 Ω 上是单调的. 若不等号严格成立, 则称 f 在 Ω 上是严格单调的.

3 算法的设计和性质

以下给出新的 LQP-ADM ^[11-24] 混合算法用于求解可分离带线性约束的变分不等式问题的步骤, 然后给出此算法的一些性质. 算法的步骤如下.

步 0 令 $\varepsilon > 0, \mu_1, \mu_2 \in (0, 1), t \in (0, 1), k=0, w^0 = (x^0, y^0, \lambda^0) \in X \times Y \times R^l, H$ 为一给定的 $l \times l$ 阶对称正定矩阵, $X \subseteq R^n$ 和 $Y \subseteq R^m$ 为非空闭凸集, $A \in R^{l \times n}, B \in R^{l \times m}$ 是矩阵, $b \in R^l$ 是向量, $f: X \rightarrow R^n, g: Y \rightarrow R^m$ 为单调映射.

步 1 (预测步) 计算预测值 $\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$.

步 1.1 通过代入点 (x^k, y^k, λ^k) 求解下面的非线性方程得到 $\tilde{x}^k$,

$$f(\tilde{x}^k) - A^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)] + \tilde{x}^k - (1 - \mu_1)x^k - \mu_1 X_k^2 (\tilde{x}^k)^{-1} = 0. \quad (3.1)$$

这里设 $(\tilde{x}^k) = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $x^k = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, 则

$$(\tilde{x}^k)^{-1} = (\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_n}), X_k^2 = \text{diag}\{w_1^2, w_2^2, \dots, w_n^2\}.$$

下面的符号类似.

步 1.2 通过代入点 $(\tilde{x}^k, y^k, \lambda^k)$ 求解下面的非线性方程得到 $\tilde{y}^k$.

$$g(\tilde{y}^k) - B^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)] + \tilde{y}^k - (1 - \mu_2)y^k - \mu_2 Y_k^2 (\tilde{y}^k)^{-1} = 0. \quad (3.2)$$

步 1.3

$$\tilde{\lambda}^k = \lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b). \quad (3.3)$$

步 2 如果 $\max\{\|\tilde{w}^k - w^k\|, \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|\} < \varepsilon$, 则停止. 否则转到步 3.

步 3 计算步长

$$\alpha_k = \frac{(\tilde{w}^k - w^k)^T Q(\tilde{w}^k)}{\|Q(\tilde{w}^k)\|^2}.$$

步 4 (修正步) 计算下一个迭代点 $w^{k+1} = (x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^{k+1})$,

$$w^{k+1} = (1-t)w^k + t\{w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k)\}. \quad (3.4)$$

步 5 如果 $\max\{\|w^{k+1} - \tilde{w}^k\|, \|Ax^{k+1} + By^{k+1} - b\|\} < \varepsilon$, 则停止. 否则令 $k := k + 1$ 转到步 1.

观察新算法的预测步可知, 此算法的主要任务是解下面两个非线性方程的近似解: 代入点 (x^k, y^k, λ^k) 求解 x ,

$$f(x) - A^T [\lambda^k - H(Ax + By^k - b)] + x - (1 - \mu_1)x^k - \mu_1 X_k^2 x^{-1} = 0. \quad (3.5)$$

代入点 $(x^{k+1}, y^k, \lambda^k)$ 求解 y ,

$$g(y) - B^T [\lambda^k - H(Ax^{k+1} + By^k - b)] + y - (1 - \mu_2)y^k - \mu_2 Y_k^2 y^{-1} = 0. \quad (3.6)$$

比较 (3.5), (3.6) 两式的共同点就相当于求解如下方程的近似解

$$q(u) + u - (1 - \mu)u^k - \mu U_k^2 u^{-1} = 0, \quad (3.7)$$

其中 $u^k = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $u = (w_1, w_2, \dots, w_n)$,

$$U_k^2 = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, \dots, m_n^2), u^{-1} = (\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, \dots, \frac{1}{w_n}).$$

引理 2 ^[6] 如果 $q(u)$ 为 R^n 上的单调映射, 则对于给定的 $u^k \in R_+^n$, 方程 (3.7) 存在唯一的 $u \in R_+^n$.

因为 $(x), g(y)$ 分别是关于 x 和 y 的单调映射, 所以由此性质可知非线性方程 (3.5) 和 (3.6) 都有唯一的解.

引理 3 对给定的 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in R_+^n \times R_+^m \times R^l$ 和 $q = (q_x, q_y, q_\lambda) \in R^n \times R^m \times R^l$, 若 $w = (x, y, \lambda)$ 是如下方程组的解:

$$\begin{cases} q_x + x - (1 - \mu_1)x^k - \mu_1 X_k^2 x^{-1} = 0, \\ q_y + y - (1 - \mu_2)y^k - \mu_2 Y_k^2 y^{-1} = 0, \\ q_\lambda + \gamma\lambda - \gamma\lambda^k = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

则对任意 $v \geq 0$, 有下面不等式成立:

$$\begin{aligned} (v - w)^T q &\geq \frac{1}{2} \left(\|w - v\|_G^2 - \|w^k - v\|_G^2 \right) + \frac{1 - \mu_1}{2} \|x^k - x\|^2 \\ &\quad + \frac{1 - \mu_2}{2} \|y^k - y\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\lambda^k - \lambda\|^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中

$$G = \begin{pmatrix} (1 + \mu_1)I_n & & \\ & (1 + \mu_2)I_m & \\ & & \gamma I_l \end{pmatrix}.$$

证 令 $v = (v_x, v_y, v_\lambda)$, 则 (3.8) 式证明包括下面三个不等式的证明:

$$(v_x - x)^T q_x \geq \frac{1 + \mu_1}{2} \left(\|x - v_x\|^2 - \|x^k - v_x\|^2 \right) + \frac{1 - \mu_1}{2} \|x^k - x\|^2, \quad (3.10)$$

$$(v_y - y)^T q_y \geq \frac{1 + \mu_2}{2} \left(\|y - v_y\|^2 - \|y^k - v_y\|^2 \right) + \frac{1 - \mu_2}{2} \|y^k - y\|^2, \quad (3.11)$$

$$(v_\lambda - \lambda)^T q_\lambda = \frac{\gamma}{2} \left(\|\lambda - v_\lambda\|^2 - \|\lambda^k - v_\lambda\|^2 \right) + \frac{\gamma}{2} \|\lambda^k - \lambda\|^2. \quad (3.12)$$

不失一般性, 可以将不等式 (3.10) 中的 x, x^k, q_x, v_x 简化为实数. 因为 $x > 0, x^k > 0, v_x > 0$, 故有 $v_x(x^k)^2/x \geq v_x(2x^k - x)$. 结合方程组 (3.8) 有

$$\begin{aligned} (v_x - x)q_x &= (x - v_x) \left(x - (1 - \mu_1)x^k - \mu_1(x^k)^2/x \right) \\ &\geq (x)^2 - (1 - \mu_1)xx^k - \mu_1(x^k)^2 - xv_x + (1 - \mu_1)x^k v_x + \mu_1 v_x(2x^k - x) \\ &= (x)^2 - (1 - \mu_1)xx^k - \mu_1(x^k)^2 - (1 + \mu_1)xv_x + (1 + \mu_1)x^k v_x \\ &= \frac{1 + \mu_1}{2} \left((x - v_x)^2 - (x^k - v_x)^2 \right) + \frac{1 - \mu_1}{2} (x^k - x)^2, \end{aligned}$$

则 (3.10) 式得证. 同理可证得 (3.11) 式也是成立的. 下面来证明 (3.12) 式, 由方程组 (3.8) 可得

$$\begin{aligned} (v_\lambda - \lambda)^T q_\lambda &= \gamma(v_\lambda - \lambda)^T (\lambda^k - \lambda) \\ &= \gamma \left(v_\lambda^T \lambda^k - v_\lambda^T \lambda - \lambda^T \lambda + \|\lambda\|^2 \right) \\ &= \frac{\gamma}{2} \left(\|\lambda - v_\lambda\|^2 - \|\lambda^k - v_\lambda\|^2 \right) + \frac{\gamma}{2} \|\lambda^k - \lambda\|^2, \end{aligned}$$

则 (3.12) 式得证. 综上所述, 要证的不等式成立. 证毕.

下面给出一个引理来解释算法中的停机准则.

引理 4 如果 $A\tilde{x}^k + By^k - b = 0$, $\tilde{x}^k = x^k$, $\tilde{y}^k = y^k$, 则 (x^k, y^k, λ^k) 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解.

证 由 $A\tilde{x}^k + By^k - b = 0$ 与 $\tilde{y}^k = y^k$ 可得 $A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b = 0$. 由式 (3.3) 得 $\tilde{\lambda}^k = \lambda^k$. 由 (3.5) 式, $A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b = 0$ 以及 $\tilde{x}^k = x^k$ 可知 $f(\tilde{x}^k) - A^T\lambda^k = 0$. 由此可得

$$(x' - \tilde{x}^k)^T (f(\tilde{x}^k) - A^T\lambda^k) = 0, \forall x' \in X,$$

同理可得

$$(y' - \tilde{y}^k)^T (g(\tilde{y}^k) - B^T\lambda^k) = 0, \forall y' \in Y.$$

所以 (x^k, y^k, λ^k) 满足问题 $SMVI(\Omega, F)$ 中所有条件. 由此说明 (x^k, y^k, λ^k) 是问题 $SMVI(\Omega, F)$ 的一个解.

4 算法的收缩性

本节准备给出任取 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*) \in W^*$, 由上面的 LQP-ADM 混合算法得到的序列 $\{w^k\}$ 满足

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_R^2 &\leq \|w^k - w^*\|_R^2 - t\alpha_k \left[(1 - \alpha_k) \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 + (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right], \end{aligned}$$

其中 R, H 为固定的正定矩阵, $\|u\|_R = \sqrt{u^T R u}$, $\|u\|_H = \sqrt{u^T H u}$ 并且给出相应的分析. 为了证明此结论, 需分别从新算法的预测步和修正步进行分析.

我们先来探讨提出的 LQP-ADM 混合算法的预测步.

引理 5 给定 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in X \times Y \times R^l$, 将其代入算法步 1 中产生预测值 $\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$. 若 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解, 则有

$$\begin{aligned} &(\lambda^k - \lambda^*)^T (A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) \\ &\geq \frac{1 + \mu_1}{2} \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + \frac{1 - \mu_1}{2} \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 \\ &\quad + \frac{1 + \mu_2}{2} \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) + \frac{1 - \mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 \\ &\quad + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 - (A\tilde{x}^k - Ax^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k). \end{aligned} \quad (4.1)$$

证 因为 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解, 所以

$$\begin{aligned} (x' - x^*)^T (f(x^*) - A^T\lambda^*) &\geq 0, \forall x' \in X, \\ (y' - y^*)^T (g(y^*) - B^T\lambda^*) &\geq 0, \forall y' \in Y, \end{aligned}$$

以及 $Ax^* + By^* = b$ 在上面的两个不等式中, 分别令 $x' = \tilde{x}^k$, $y' = \tilde{y}^k$, 则

$$(\tilde{x}^k - x^*)^T (f(x^*) - A^T\lambda^*) \geq 0, \quad (4.2)$$

$$(\tilde{y}^k - y^*)^T (g(y^*) - B^T\lambda^*) \geq 0. \quad (4.3)$$

另一方面, 因为 (3.5) 式及下面的恒等变形

$$\begin{aligned} & f(\tilde{x}^k) - A^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + By^k - b)] \\ &= f(\tilde{x}^k) - A^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) + H(B\tilde{y}^k - By^k)], \end{aligned}$$

所以根据引理 3 可得

$$\begin{aligned} & (x^* - \tilde{x}^k)^T \{f(\tilde{x}^k) - A^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) + H(B\tilde{y}^k - By^k)]\} \\ &\geq \frac{1+\mu_1}{2} (\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) + \frac{1-\mu_1}{2} \|\tilde{x}^k - x^k\|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

将 (4.2) 式与 (4.4) 式相加

$$\begin{aligned} & (\tilde{x}^k - x^*)^T \{f(x^*) - f(\tilde{x}^k) + A^T (\lambda^k - \lambda^*) - A^T H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) + A^T H(B\tilde{y}^k - By^k)\} \\ &\geq \frac{1+\mu_1}{2} (\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) + \frac{1-\mu_1}{2} \|\tilde{x}^k - x^k\|^2, \end{aligned}$$

又因为 $f(x)$ 是单调映射, 则

$$\begin{aligned} & (\tilde{x}^k - x^*)^T \{A^T (\lambda^k - \lambda^*) - A^T H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) + A^T H(B\tilde{y}^k - By^k)\} \\ &\geq \frac{1+\mu_1}{2} (\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) + \frac{1-\mu_1}{2} \|\tilde{x}^k - x^k\|^2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (A\tilde{x}^k - Ax^*)^T \{(\lambda^k - \lambda^*) - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) + H(B\tilde{y}^k - By^k)\} \\ &\geq \frac{1+\mu_1}{2} (\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) + \frac{1-\mu_1}{2} \|\tilde{x}^k - x^k\|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

同样由 (3.2) 式及引理 3 可得

$$\begin{aligned} & (y^* - \tilde{y}^k)^T \{g(\tilde{y}^k) - B^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)]\} \\ &\geq \frac{1+\mu_2}{2} (\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2) + \frac{1-\mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

将 (4.3) 与 (4.6) 式相加有

$$\begin{aligned} & (\tilde{y}^k - y^*)^T \{g(y^*) - g(\tilde{y}^k) + B^T (\lambda^k - \lambda^*) - B^T H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)\} \\ &\geq \frac{1+\mu_2}{2} (\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2) + \frac{1-\mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2. \end{aligned}$$

又因为 g 是关于 y 单调的, 则

$$\begin{aligned} & (\tilde{y}^k - y^*)^T \{B^T (\lambda^k - \lambda^*) - B^T H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)\} \\ &\geq \frac{1+\mu_2}{2} (\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2) + \frac{1-\mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & (B\tilde{y}^k - By^*)^T \{(\lambda^k - \lambda^*) - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)\} \\ &\geq \frac{1+\mu_2}{2} (\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2) + \frac{1-\mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

将 (4.5) 与 (4.7) 式相加有

$$\begin{aligned} & (\lambda^k - \lambda^*)^T (A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 + (A\tilde{x}^k - Ax^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k) \\ \geq & \frac{1+\mu_1}{2} \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + \frac{1-\mu_1}{2} \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 \\ & + \frac{1+\mu_2}{2} \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) + \frac{1-\mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 \end{aligned}$$

得证.

进一步, 若将 (3.3) 式变形为 $A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b = H^{-1}(\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)$, 进而有

$$\begin{aligned} & (\lambda^k - \lambda^*)^T (A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b) = (\lambda^k - \lambda^*)^T H^{-1}(\lambda^k - \tilde{\lambda}^k) \\ = & \frac{1}{2} \left[\|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right] + \frac{1}{2} \|\tilde{\lambda}^k - \lambda^k\|_{H^{-1}}^2 \\ = & \frac{1}{2} \left[\|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right] + \frac{1}{2} \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

于是如果考虑 (4.8) 式, 则可得到如下引理.

引理 6 给定 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in X \times Y \times R^l$, 将其代入算法步 1 中产生预测值 $\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$. 若 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解, 则有

$$\begin{aligned} & (1+\mu_1) \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + (1+\mu_2) \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) \\ & + \left(\|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right) \\ \leq & -(1-\mu_1) \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 - (1-\mu_2) \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \\ & + 2(A\tilde{x}^k - Ax^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k). \end{aligned}$$

证 将 (4.8) 式代入引理 5 中有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right] + \frac{1}{2} \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \\ \geq & \frac{1+\mu_1}{2} \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + \frac{1-\mu_1}{2} \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 \\ & + \frac{1+\mu_2}{2} \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) + \frac{1-\mu_2}{2} \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 \\ & + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 - (A\tilde{x}^k - Ax^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & (1+\mu_1) \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + (1+\mu_2) \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) \\ & + \left(\|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right) \\ \leq & -(1-\mu_1) \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 - (1-\mu_2) \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \\ & + 2(A\tilde{x}^k - Ax^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k). \end{aligned}$$

证毕.

由上面的引理可得到关于 LQP-ADM 混合算法预测步的定理如下.

定理 1 给定 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in X \times Y \times R^l$, 将其代入算法步 1 中产生预测值 $\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$. 若 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解, 则有

$$\begin{aligned} & \|\tilde{w}^k - w^*\|_R^2 \\ \leq & \|w^k - w^*\|_R^2 - (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2, \end{aligned}$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} (1 + \mu_1) I_m & & \\ & (1 + \mu_2) I_n + B^T H B & \\ & & H^{-1} \end{pmatrix}.$$

证 由引理 6 可知

$$\begin{aligned} & (1 + \mu_1) \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + (1 + \mu_2) \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) \\ & + \left(\|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right) \\ \leq & -(1 - \mu_1) \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \\ & + 2(A\tilde{x}^k - Ax^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k), \end{aligned} \quad (4.9)$$

同时有

$$\|B\tilde{y}^k - By^*\|_H^2 - \|By^k - By^*\|_H^2 + \|By^k - B\tilde{y}^k\|_H^2 = 2(B\tilde{y}^k - By^*)^T H (B\tilde{y}^k - By^k).$$

将 (4.9) 式与此恒等式相加可得

$$\begin{aligned} & (1 + \mu_1) \left(\|\tilde{x}^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2 \right) + (1 + \mu_2) \left(\|\tilde{y}^k - y^*\|^2 - \|y^k - y^*\|^2 \right) \\ & + \left(\|\tilde{\lambda}^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 - \|\lambda^k - \lambda^*\|_{H^{-1}}^2 \right) + \left(\|B\tilde{y}^k - By^*\|_H^2 - \|By^k - By^*\|_H^2 \right) \\ \leq & -(1 - \mu_1) \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \\ & + 2(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)^T H (B\tilde{y}^k - By^k) - \|By^k - B\tilde{y}^k\|_H^2 \\ = & -(1 - \mu_1) \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b - B\tilde{y}^k + By^k\|_H^2 \\ = & -(1 - \mu_1) \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|y^k - \tilde{y}^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + By^k - b\|_H^2, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \|\tilde{w}^k - w^*\|_R^2 \\ \leq & \|w^k - w^*\|_R^2 - (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + By^k - b\|_H^2 \end{aligned}$$

得证.

将定理 1 的结论作简单变形可得到以下推论.

推论 1 若已知 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in X \times Y \times R^l$ 以及其产生的预测值 $\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$, 对于 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*) \in \Omega^*$, 有

$$2(w^k - w^*)^T R(w^k - \tilde{w}^k) \geq \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 + (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2. \quad (4.10)$$

证 由定理 1 可得

$$\begin{aligned} \|w^k - w^*\|_R^2 - \|\tilde{w}^k - w^*\|_R^2 &= \|w^k - w^*\|_R^2 - \|(w^k - w^*) - (w^k - \tilde{w}^k)\|_R^2 \\ &\geq (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2. \end{aligned}$$

于是

$$2(w^k - w^*)^T R(w^k - \tilde{w}^k) - \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 \geq (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2$$

得证.

基于以上对混合算法中预测步的讨论, 结合算法的修正步可得到算法的收缩性定理如下.

定理 2 给定 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in X \times Y \times R^l$, 将其代入算法中得到预测值为 $\tilde{w} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$ 以及修正值为 $w^{k+1} = (x^{k+1}, y^{k+1}, \lambda^{k+1})$. 若 $w^* = (x^*, y^*, \lambda^*)$ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解, 则有

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_R^2 &\leq \|w^k - w^*\|_R^2 - t\alpha_k \left[(1 - \alpha_k) \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 + (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

证 由式 (3.4) 得到

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_R^2 &= \|(1 - t)w^k + tP_Z\{w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k)\} - w^*\|_R^2 \\ &= \|(1 - t)(w^k - w^*) + t[P_Z\{w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k)\} - w^*]\|_R^2. \end{aligned}$$

利用柯西 - 施瓦茨不等式和投影的非扩张性, 可推出

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_R^2 &\leq [(1 - t)\|w^k - w^*\|_R + t\|P_Z\{w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k)\} - w^*\|_R]^2 \\ &\leq (1 - t)\|w^k - w^*\|_R^2 + t\|P_Z\{w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k)\} - w^*\|_R^2 \\ &\leq (1 - t)\|w^k - w^*\|_R^2 + t\|w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k) - w^*\|_R^2 \\ &= \|w^k - w^*\|_R^2 - 2t\alpha_k(w^k - w^*)^T R(w^k - \tilde{w}^k) + t\alpha_k^2 \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2, \end{aligned}$$

再结合推论 1 可得

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_R^2 &\leq [(1 - t)\|w^k - w^*\|_R + t\|P_Z\{w^k - \alpha_k(w^k - \tilde{w}^k)\} - w^*\|_R]^2 \\ &\quad + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 + t\alpha_k^2 \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 \\ &= \|w^k - w^*\|_R^2 - t\alpha_k \left[(1 - \alpha_k) \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 + (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right] \end{aligned}$$

得证.

5 算法的收敛性

在证明算法的全局收敛性之前, 先给出一个重要的引理.

引理 7 给定 $w^k = (x^k, y^k, \lambda^k) \in X \times Y \times R^l$, 由新算法产生的预测值为 $\tilde{w}^k = (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k, \tilde{\lambda}^k)$, 则对任意的 $w = (x, y, \lambda) \in Z$, 有

$$(x - \tilde{x}^k)^T f_k(\tilde{x}^k) \geq (x^k - \tilde{x}^k)^T \{(1 + \mu_1)x - (\mu_1 x^k + \tilde{x}^k)\}, \quad (5.1)$$

$$(y - \tilde{y}^k)^T g_k(\tilde{y}^k) \geq (y^k - \tilde{y}^k)^T \{(1 + \mu_2)y - (\mu_2 y^k + \tilde{y}^k)\}, \quad (5.2)$$

其中

$$f_k(\tilde{x}^k) = f(\tilde{x}^k) - A^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + By^k - b)], \quad (5.3)$$

$$g_k(\tilde{y}^k) = g(\tilde{y}^k) - B^T [\lambda^k - H(A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b)]. \quad (5.4)$$

证 在引理 3 中, 令 $v = x$, $w = \tilde{x}^k$, $q(w) = f_k(\tilde{x}^k)$, 则由 (2.12) 式可得

$$(x - \tilde{x}^k)^T f_k(\tilde{x}^k) \geq \frac{1 + \mu_1}{2} (\|\tilde{x}^k - x\|^2 - \|x^k - x\|^2) + \frac{1 - \mu_1}{2} \|x^k - \tilde{x}^k\|^2.$$

将此不等式右端变形为

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \mu_1}{2} (\|\tilde{x}^k - x\|^2 - \|x^k - x\|^2) + \frac{1 - \mu_1}{2} \|x^k - \tilde{x}^k\|^2 \\ &= \frac{1 + \mu_1}{2} [\|\tilde{x}^k\|^2 - 2x^T \tilde{x}^k + 2x^T x^k - \|x^k\|^2] + \frac{1 - \mu_1}{2} (\|x^k\|^2 - 2(x^k)^T \tilde{x}^k + \|\tilde{x}^k\|^2) \\ &= \|\tilde{x}^k\|^2 - (1 + \mu_1)x^T \tilde{x}^k - \mu_1 \|x^k\|^2 + (1 + \mu_1)x^T x^k - (1 - \mu_1)(x^k)^T \tilde{x}^k \\ &= (1 + \mu_1)x^T (x^k - \tilde{x}^k) - (x^k - \tilde{x}^k)^T (\mu_1 x^k + \tilde{x}^k) \\ &= (x^k - \tilde{x}^k)^T \{(1 + \mu_1)x - (\mu_1 x^k + \tilde{x}^k)\}. \end{aligned}$$

于是 (5.1) 式成立. 若再令 $v = y$, $w = \tilde{y}^k$, $q(w) = g_k(\tilde{y}^k)$, 同理可证 (5.2) 式也成立. 证毕.

基于对 LQP-ADM 混合算法收缩性的讨论, 接下来给出此算法的全局收敛性分析.

定理 3 假设由新算法产生的无穷迭代序列为 $\{w^k\} = \{(x^k, y^k, \lambda^k)\}$, 则此序列必定收敛于变分不等式问题 $SMVI(\Omega, F)$ 的解点 w^∞ .

证 此定理可以分两步来证: 首先利用已经得到的结论证明 w^∞ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解, 然后再证明序列 $\{w^k\}$ 收敛于 w^∞ .

步 1 由定理 2 可得

$$\begin{aligned} \|w^{k+1} - w^*\|_R^2 &\leq \|w^k - w^*\|_R^2 - t\alpha_k(1 - \alpha_k) \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2 - t\alpha_k \left[(1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right]. \end{aligned}$$

因为 $\mu_1, \mu_2, t \in (0, 1)$, 所以

$$\|w^{k+1} - w^*\|_R^2 \leq \|w^k - w^*\|_R^2 - t\alpha_k(1 - \alpha_k) \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2. \quad (5.5)$$

由 (5.5) 式可知必定存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|w^{k+1} - w^*\|_R^2 \leq \|w^k - w^*\|_R^2 - c \|w^k - \tilde{w}^k\|_R^2, \quad (5.6)$$

进而由上面不等式可知序列 $\{w^k\}$ 有界且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - \tilde{w}^k\|_R = 0$. 从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \tilde{x}^k\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - \tilde{y}^k\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda^k - \tilde{\lambda}^k\| = 0. \quad (5.7)$$

由上可知序列 $\{\tilde{w}^k\}$ 也是有界的, 并且至少存在一个聚点. 由定理 1 可知

$$\begin{aligned} & \|\tilde{w}^k - w^*\|_R^2 \\ & \leq \|w^k - w^*\|_R^2 - (1 - \mu_1) \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 - (1 - \mu_2) \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 - \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2. \end{aligned}$$

取 $\mu = \min\{1 - \mu_1, 1 - \mu_2\}$, 则

$$\|\tilde{w}^k - w^*\|_R^2 \leq \|w^k - w^*\|_R^2 - \mu \left[\|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right],$$

进而有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \mu \left[\|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right] \\ & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\|w^k - w^*\|_R^2 - \|\tilde{w}^k - w^*\|_R^2 \right]. \end{aligned}$$

由上面的证明可知序列 $\{w^k\}, \{\tilde{w}^k\}$ 都是有界的. 则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu \left[\|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 \right] < \infty,$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{x}^k - x^k\|^2 + \|\tilde{y}^k - y^k\|^2 + \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H^2 = 0.$$

于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A\tilde{x}^k + B\tilde{y}^k - b\|_H = 0 \quad (5.8)$$

结合 (5.3) 式和 (5.4) 式可得

$$\begin{aligned} f_k(\tilde{x}^k) &= f(\tilde{x}^k) - A^T \tilde{\lambda}^k, \\ g_k(\tilde{y}^k) &= g(\tilde{y}^k) - B^T \tilde{\lambda}^k + B^T H B (y^k - \tilde{y}^k), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} (x - \tilde{x}^k)^T \{f(\tilde{x}^k) - A^T \tilde{\lambda}^k\} &= (x - \tilde{x}^k)^T f_k(\tilde{x}^k), \\ (y - \tilde{y}^k)^T \{g(\tilde{y}^k) - B^T \tilde{\lambda}^k\} &= (y - \tilde{y}^k)^T g_k(\tilde{y}^k) - (y - \tilde{y}^k)^T B^T H B (y^k - \tilde{y}^k). \end{aligned}$$

进而由 (5.1), (5.2) 及 (5.7) 式可得

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} (x - \tilde{x}^k)^T \{f(\tilde{x}^k) - A^T \tilde{\lambda}^k\} \geq 0, & \forall x \in X, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (y - \tilde{y}^k)^T \{g(\tilde{y}^k) - B^T \tilde{\lambda}^k\} \geq 0, & \forall y \in Y, \end{cases} \quad (5.9)$$

令 w^∞ 为 $\{\tilde{w}^k\}$ 的一个聚点且其中一个子列 $\{\tilde{w}^{k_j}\}$ 收敛于 w^∞ . 则由 (5.7) 及 (5.8) 式可得

$$\begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} (x - \tilde{x}^{k_j})^T \{f(\tilde{x}^{k_j}) - A^T \tilde{\lambda}^{k_j}\} \geq 0, & \forall x \in X, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} (y - \tilde{y}^{k_j})^T \{g(\tilde{y}^{k_j}) - B^T \tilde{\lambda}^{k_j}\} \geq 0, & \forall y \in Y, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} (A\tilde{x}^{k_j} + B\tilde{y}^{k_j} - b) = 0. \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} (x - w^\infty)^T \{f(w^\infty) - A^T \lambda^\infty\} \geq 0, & \forall x \in X, \\ (y - w^\infty)^T \{g(w^\infty) - B^T \lambda^\infty\} \geq 0, & \forall y \in Y, \\ Ax^\infty + By^\infty - b = 0. \end{cases}$$

即 $(w - w^\infty)^T Q(w^\infty) \geq 0, \forall w \in Z$, 这说明 w^∞ 是 $SMVI(\Omega, F)$ 的解.

步 2 对于 $SMVI(\Omega, F)$ 的所有解都满足不等式 (5.6), 所以可推出

$$\|w^{k+1} - w^\infty\|_R^2 \leq \|w^k - w^\infty\|_R^2, \forall k \geq 0, \quad (5.10)$$

因为 $\tilde{w}^{k_j} \rightarrow w^\infty (j \rightarrow \infty)$ 和 $w^k - \tilde{w}^k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $l > 0$, 使得

$$\|\tilde{w}^{k_j} - w^\infty\|_R < \frac{\varepsilon}{2}, \|w^{k_l} - \tilde{w}^{k_l}\|_R < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.11)$$

所以 $\forall k \geq l$, 由 (5.11) 式可得

$$\|w^k - w^\infty\|_R \leq \|w^{k_l} - \tilde{w}^{k_l}\|_R + \|\tilde{w}^{k_l} - w^\infty\|_R \leq \varepsilon,$$

这说明序列 $\{w^k\}$ 收敛到 $SMVI(\Omega, F)$ 的解 w^∞ 证毕.

6 数值实验

为了考察 LQP-ADM 混合算法的数值表现, 用 Matlab 软件编程来进行数值实验, 所有程序在 Windows 2007 系统下进行. 考虑这样一个优化问题 $\min \{c^T x | x \in \Omega_1 \cap \Omega_2\}$, 其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in R^n | \|x\| \leq r_1\}, \\ \Omega_2 &= \{x \in R^n | \|x - b\| \leq r_2\}. \end{aligned}$$

为了保证问题的可行性, $\|b\| \leq r_1 + r_2$ 必须满足. 比如选取 $r_1 = 0.5 \|b\|, r_2 = 0.6 \|b\|$.

引入辅助变量 y , 则上述问题转化后的形式如下:

$$\min c^T x \quad \text{s.t.} \quad x + y = b, x \in B_{r_1}, y \in B_{r_2},$$

其中 B_r 表示圆心为原点、半径为 r 的圆.

接着将上述凸规划问题转化为可分离带线性约束的变分不等式问题, 即找一点 $u^* \in \Omega$, 满足 $(u-u^*)^T F(u^*) \geq 0, \forall u \in \Omega$, 其中

$$u = (x, y)^T, F(u) = (c, 0)^T, \Omega = \{(x, y) | x \in B_{r_1}, y \in B_{r_2}, x + y = b\}.$$

在数值实验中, 选取初始迭代点 $w^0 = (x^0, y^0, \lambda^0)$ 为 $x^0 = (1, 1)^T, y^0 = (1, 1)^T, \lambda^0 = (1, 1)^T$, 二维列向量 c 的元素随机分布在 $(-20, 20)$, 二维列向量 b 的元素随机分布在 $(0, 20)$. 给定误差界 $\varepsilon = 10^{-6}$, 参数 $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$, 对称正定矩阵 $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

由于向量 c 与向量 b 的元素均是随机产生的, 所以每次运行 LQP-ADM 混合算法求得变分不等式的解都不相同, 但是解均是收敛的并且收敛性态是一致的. 为了说明情况, 从多次运行结果中选取下面三组图——图 1、图 2 与图 3 来分析. 从这三组图可知, x 与 λ 的收敛趋势是一样的, 都是随着迭代次数的增加其中一个分量增大另一分量减小, 但是 y 的收敛趋势却不同, 图 1 中 y 的两个分量随着不断迭代都是增大的, 图 2 中都是减小的, 而图 3 中却是一个增大另一个减小, 同时容易看出新算法的收敛速度很快, 所以 LQP-ADM 混合算法求解问题 $SMVI(\Omega, F)$ 的解是收敛的, 也是有效的.

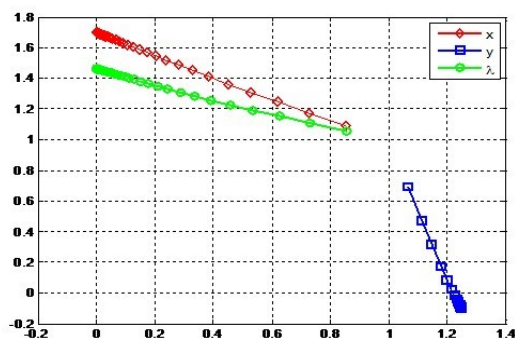


图 1: 所求点的收敛曲线 1

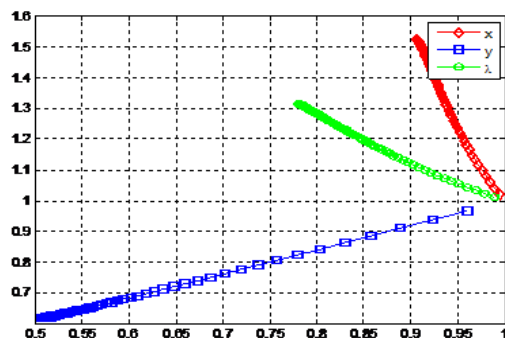


图 2: 所求点的收敛曲线 2

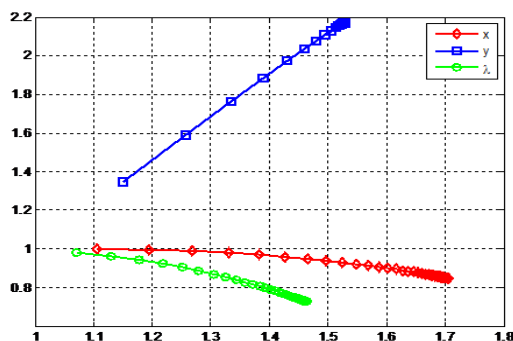


图 3: 所求点的收敛曲线 3

参 考 文 献

- [1] He B S, Liao L Z, Han D R, Yang H. A new inexact alternating directions method for monotone variational inequalities[J]. Math. Prog., 2002, 92: 103–118.
- [2] He B S, Xu Y, Yuan X M. A logarithmic-quadratic proximal prediction-correction method for structured monotone variational inequalities[J]. Comput. Optim. Appl., 2006, 35: 19–46.
- [3] He B S, Liao L Z, Qian M J. Alternating projection based prediction-correction methods for structured variational inequalities [J]. J. Comput. Math., 2006, 24: 693–710.
- [4] Han D. A modified alternating direction method for variational inequality problems[J]. Appl. Math. Optim., 2002, 45: 63–74.
- [5] Ye C H, Yuan X M. A descent method for structured monotone variational inequalities [J]. Optim. Meth. Software, 2007, 22: 329–338.
- [6] Auslender A, Teboulle M, Ben-Tiba S. A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities [J]. Comput. Optim. Appl., 1999, 12: 31–40.
- [7] Nagurney A. A multicriteria traffic network equilibrium model [J]. Math. Comp. Model., 2000, 32: 393–411.
- [8] Zhang Congjun, Li Sai, Liu Baoqing. Topological structures and the coincidence point of two mappings in cone b-metric spaces [J]. J. Nonl. Sci. Appl., 2017, 10: 1334–1344.
- [9] Martinet B. Regularization d'inequations variationnelles par approximations sucessives[J]. Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 1970, 4: 154–159.
- [10] He B S, Yang H. Some convergence properties of a method of multipliers for linearly constrained monotone variational inequalities [J]. Oper. Res. Lett., 1998, 23: 151–161.
- [11] He B S, Yang , Zhang C S. A modified augmented Lagrangian method for a class of monotone variational inequalities [J]. Euro. J. Oper. Res., 2004, 59: 35–51.
- [12] Bertsekas D P, Gafni E M. Projection method for variational inequalities with applications to the traffic assignment problem[J]. Math. Prog. Study, 1987, 17: 139–159.
- [13] Gabay D. Applications of the method of multipliers to variational inequalities[A]. Fortin M, Glowinski R. Augmented Lagrangian Methods[C]. Appl. Sol. Boundary-Value Prob., Amsterdam: North-Holland, 1983: 299–331.
- [14] Gabay D, Mercier B. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite-element approximations [J]. Comp. Math. Appl., 1976, 2: 17–40.

- [15] He B S, Yuan X M, Zhang J Z. Comparison of two kinds of prediction-correction methods for monotone variational inequalities [J]. Comput. Optim. Appl., 2004, 27: 247–267.
- [16] He B S. A class of new method for monotone variational inequalities[J]. Appl. Math. Prog., 1997, 35: 69–76.
- [17] He B S. Inexact implicit method for monotone general variational inequalities [J]. Math. Prog., 1999, 35: 199–217.
- [18] Daganzo C F, Sheffi Y. On stochastic model of traffic assignment [J]. Trans. Sci., 1977, 11(3): 253–274.
- [19] Hou L S. On the $O(1/t)$ convergence rate of the parallel descent-like method and parallel splitting augmented Lagrangian method for solving a class of variational inequalities [J]. Appl. Math. Comput., 2013, 219: 5862–5869.
- [20] Li Min, Zhong Weijun. An LQP-based descent method for structured monotone variational inequalities [J]. J. Comput. Appl. Math., 2011, 235: 1523–1530.
- [21] Glowinski R. Numerical methods for nonlinear variational Pr[M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [22] Glowinski R, Le Tallec P. Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics[M]. Philadelphia: SIAM Stud. Appl. Math., 1989.
- [23] Rockafellar R T. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming [J]. Math. Oper. Res., 1976, 1:97–116.
- [24] Yuan X M, Li M. An LQP-based decomposition method for solving a class of variational inequalities[J]. SIAM J. Optim., 2011, 121(4): 1309–1318.
- [25] Jiang Z K, Bnouhachem A. A projection-based prediction-correction method for structured monotone variational inequalities[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 202: 747–759.
- [26] Zhang M, Han D R, He H J, et al. A new alternating direction method for solving separable variational inequality problems (in Chinese)[J]. Sci. Sin. Math., 2012, 42(2): 133–149.

A MIXED ALGORITHM FOR SOLVING SEPARABLE VARIATIONAL INEQUALITIES WITH LINEAR CONSTRAINTS

ZHANG Cong-jun¹, LI Sai¹, LÜ Li-xia¹, WANG Yue-hu²

(1.School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics,
Nanjing 210023, China)

(2.School of Management Science and Industrial Engineering,
Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

Abstract: In this paper, we study large-scale separable variational inequality problem with linear constraints. Also, we propose a new alternating direction method which is based on the logarithmic-quadratic proximal method. By this method, we have nonlinear equations instead of sub-variational inequalities and it solves structural variational inequalities quickly. Meanwhile, mappings are monotonous and the solution set of the original problem is non-empty, we prove the new algorithm's global convergence, and the algorithm is effective and feasible.

Keywords: variational inequality; alternating direction method; global convergence

2010 MR Subject Classification: 49J40