Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类非线性 Klein-Gordon 方程解的整体存在和爆破的条件

祝佳玲, 李 杨, 杨 晗
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 本文研究了一类非线性 Klein-Gordon 方程的初边值问题. 通过引进能量泛函和与之对应的势井, 采用 Galerkin 方法得到了解整体存在和爆破的充分条件, 并给出了解爆破时生命跨度的上界估计.

关键词: 非线性 Klein-Gordon 方程; Galerkin 方法; 整体解; 爆破; 生命跨度
MR(2010) 主题分类号: 35A01; 35A24　　　　中图分类号: O175.29
文献标识码: A　　　　文章编号: 0255-7797(2018)06-1123-13

1 引言

本文研究了以下非线性 Klein-Gordon 方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u = |u|^{\alpha-1} u - |u|^{\beta-1} u, \quad x \in \Omega \subset R^n, \\ u|_\Gamma = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u = u(t,x)$ 是复值函数, Δ 是 Ω 上的 Laplace 算子, Ω 是 R^n 中带有光滑边界 Γ 的有界域, $1 \le \beta < \alpha$, $\alpha = \beta + 2$, 且 α, β 是常数. 当 $n > 2$ 时, $1 < \alpha \le \frac{2n}{n-2}$; 当 $n \le 2$ 时, $1 < \alpha < \infty$.

Klein-Gordon 方程是相对论量子力学和量子场论中用于描述自旋为零的粒子的基本方程. 对于该类方程的研究已有一些文献 [1–9]. 值得特别指出的是: Shatah[1] 证明了对非线性项 $f(u)$ (其中 $x \in R^n$, $n \ge 3$, $\int_0^s f(s)\,ds > +\infty$) 基态的存在性和不稳定性, 得到了在不稳定基态下解不爆破的结果. 黄文毅 [2] 对一类带有阻尼项和非负势能的非线性 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + T(x)u + u + u_t = h(x), x \in R^n, \\ u(0,x) = u_0, \\ u_t(0,x) = u_1, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $\int_0^u h(u)\,du > +\infty$. 通过引进势井的方法研究了其柯西问题, 得到了解爆破和整体存在

*收稿日期: 2017-04-18　　　接收日期: 2017-11-29
基金项目: 国家自然科学基金 (71572156; 11501395).
作者简介: 祝佳玲 (1991–), 女, 四川乐山, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程.

的最佳条件. 文献 [9] 采用 Galerkin 方法和变分法研究了以下方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+u=u^2+u^3, x\in R^n, \\ u(0,x)=u_0, \\ u_t(0,x)=u_1, \end{cases} \tag{1.3}$$

给出了当空间维数限制为 $n\leq 3$ 时解整体存在的充分必要条件, 解爆破时的生命跨度的估计等等. 李考虑了不同于文献 [1] 的变分问题, 对 $\int\left(u^2+u^3\right)du=\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{4}u^4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不定号的情形加以了研究, Shatah 的方法对此情形不适用, 这也是该文的创新之处.

本文也有类似的困难, 但李 [9] 中方程的非线性项确定了, 势井深度的正性容易通过显性的方程求解来确定, 而本文由于非线性项中的指数不是确定的, 在确定势井深度的正性时, 需要精细巧妙的讨论和估计才能确定, 且文献 [9] 没有考虑初始能量等于势井深度临界情形下的生命跨度, 这也是本文的意义所在.

2 势井深度

对 $u\in H^1(\Omega)$, $n\leq 6$, 定义如下能量泛函

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2+\frac{1}{\beta+1}\int_\Omega |u|^{\beta+1}dx-\frac{1}{\alpha+1}\int_\Omega |u|^{\alpha+1}dx \\ &= \frac{1}{2}a(u)+\frac{1}{\beta+1}b_1(u)-\frac{1}{\alpha+1}b_2(u). \end{aligned}$$

定义势井

$$W_1=\left\{u\in H^1(\Omega)\,|\,a(u)>b_2(u)-b_1(u), J(u)<d\right\}\cup\{0\},$$

及其对应的势井外集

$$W_2=\left\{u\in H^1(\Omega)\,|\,a(u)<b_2(u)-b_1(u), J(u)<d\right\},$$

其中

$$d=\inf_{u\in H^1(\Omega),u\neq 0}\sup_{\lambda\geq 0}J(\lambda u) \tag{2.1}$$

为势井深度.

下面将证明 d 始终大于 0, 即有如下引理.

引理 2.1 若 d 由 (2.1) 式给出, 则 $d>0$.

证 当 $\lambda\geq 0$ 时,

$$J(\lambda u)=\frac{1}{2}\lambda^2a(u)+\frac{1}{\beta+1}\lambda^{\beta+1}b_1(u)-\frac{1}{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}b_2(u),$$

注意到 $J'(\lambda u)=\lambda a(u)+\lambda^\beta b_1(u)-\lambda^\alpha b_2(u)=0$ 存在零根.

下面将证明 $J'(\lambda u)=0$ 存在正根, 令

$$f(\lambda)=a(u)+\lambda^{\beta-1}b_1(u)-\lambda^{\alpha-1}b_2(u),$$

注意到 $f(0)=a(u)>0$, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, $f(\lambda)\to-\infty$, 因此由介值定理必然存在正根 λ_0, 使得 $f(\lambda_0)=0$, 即

$$\begin{aligned} a(u)+\lambda_0^{\beta-1}b_1(u) &= \lambda_0^{\alpha-1}b_2(u),\\ J(\lambda_0 u) &= \lambda_0^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)a(u)+\left(\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\alpha+1}\right)\lambda_0^{\alpha-1}b_2(u)\right]\\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)\lambda_0^2 a(u). \end{aligned}$$

又因为

$$\frac{a(u)}{\lambda_0^{\beta-1}}+b_1(u)=\lambda_0^2 b_2(u),\quad \frac{a(u)}{\lambda_0^{\beta-1}b_2(u)}+\frac{b_1(u)}{b_2(u)}=\lambda_0^2,$$

所以

$$\begin{aligned} J(\lambda_0 u) &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)\left(\frac{a(u)}{\lambda_0^{\beta-1}b_2(u)}+\frac{b_1(u)}{b_2(u)}\right)a(u)\\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)\frac{b_1(u)}{b_2(u)}a(u). \end{aligned}$$

因为 $\mu(\Omega)<\infty$ (μ 为 Ω 的 Lebesgue 测度), 由 $\beta<\alpha$ 有

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}\leq C_1\|u\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)},\quad b_1^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}}(u)\leq C_1^{\alpha+1}b_2(u),\quad b_1^{-\frac{\alpha+1}{\beta+1}}(u)\geq C_1^{-(\alpha+1)}b_2^{-1}(u),\\ &b_1(u)\geq\left(C_1^{-(\alpha+1)}\right)^{-\frac{\beta+1}{\alpha+1}}\left(b_2^{-1}\right)^{-\frac{\beta+1}{\alpha+1}}(u)=C_1^{\beta+1}b_2^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}(u),\\ &J(\lambda_0 u)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)C_1^{\beta+1}\frac{b_2^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}(u)}{b_2(u)}a(u)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)C_1^{\beta+1}\frac{a(u)}{b_2^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+1}}(u)}. \end{aligned}\tag{2.2}$$

由于 $H^1(\Omega)$ 嵌入到 $L^{\alpha+1}(\Omega)$, 有 $\|u\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}\leq C_2\|u\|_{H^1(\Omega)}$, 结合 (2.2) 式有

$$J(\lambda_0 u)\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)\frac{C_1^{\beta+1}}{C_2^2}>0,$$

即 $d>0$, 其中 c_1, c_2 为常数.

3 解的不变集

为了得到解整体存在和爆破的条件, 这一节将介绍不变集 W_1, W_2. 接下来, 将利用如下事实 $a(u)>b_2(u)-b_1(u)$ 有效等价于 $\lambda_0(u)>1$, $a(u)<b_2(u)-b_1(u)$ 有效等价于 $\lambda_0(u)<1$.

记 $W=\{u|u\in H^1(\Omega), J(u)<d)\}$, 将有如下引理.

引理 3.1 $W=W_1\cup W_2$, $W_1\cap W_2=\varnothing$.

证 $W_1\cap W_2=\varnothing$ 是显然的. 接下来将证明 $W=W_1\cup W_2$. 实际上, 只需证明 $W\subseteq W_1\cup W_2$. 容易看到 $J(\lambda_0 u)=\sup\limits_{\lambda\geq0}J(\lambda u),\lambda_0(u)=1$ 等价于 $a(u)=b_2(u)-b_1(u)>0$. 因此, 若 $\lambda_0(u)=1$, 则有

$$J(u)=J(\lambda_0(u)u)=\sup_{\lambda\geq0}J(\lambda u)\geq d.$$

于是, 若 $u\in W$, $u\neq 0$, 则 $\lambda_0(u)\neq 1$ 等价于 $a(u)\neq b_2(u)-b_1(u)$. 这意味着 $u\in W_1\setminus\{0\}$ 或 $u\in W_2$, 即 $W\subseteq W_1\cup W_2$.

(不变集) 若 $u_0,u_1\in\Sigma$ (其中 $\Sigma\subseteq H^1(\Omega)$ 为集合), 则 (1.1) 式的解 $u(t,x)\in\Sigma$, 把 Σ 叫做问题 (1.1) 的解的不变集.

引理 3.2 若

$$E(0)=\frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}+J(u_0)<d, \tag{3.1}$$

则 W_1 和 W_2 是问题 (1.1) 解的不变集.

证 由方程 (1.1) 有

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}+J(u)=E(0)<d, \tag{3.2}$$

这意味着 $u\in W$. 通常把 $u(x,0,u_0,u_1)$ 简记为 $u(t)$.

(1) 令 $u_0\in W_1$, 可以断言 $u(t)\in W_1$. 若不成立, 则存在 $t_0>0$, 使得 $u(t_0)\notin W_1$. 一方面, 有 $u(t_0)\in W_2$; 另一方面, 因为 $a(u(t))$, $b_1(u(t))$ 和 $b_2(u(t))$ 关于 t 连续, 由 W_1 和 W_2 的定义, 知存在时间 $t^*(0<t^*<t_0)$, 使得

$$a(u(t^*))=b_2(u(t^*))-b_1(u(t^*)).$$

若 $a(u(t^*))\neq 0$, 则 $\lambda_0(u(t^*))=1$. 因此 $J(u(t^*))\geq d$, 即 $u(t^*)\notin W$, 这与 (3.2) 式矛盾.

若 $a(u(t^*))=0$, 假设 $0<a(u(t))<b_2(u(t))-b_1(u(t))$, 对 $t^*<t\leq t_0$, 有 $\lim\limits_{t\to t^{*+}}a(u(t))=0$.

因为当 $2<n\leq 6$ 时, $1<\alpha\leq\frac{2n}{n-2}$; 当 $n\leq 2$ 时, $1<\alpha<\infty$, 因此由 Sobolev 嵌入不等式知

$$1<\frac{b_2(u(t)-b_1(u(t)))}{a(u(t))}<C_1^{\alpha+1}(a(u))^{\frac{\alpha+1}{2}}+C_2^{\beta+1}(a(u))^{\frac{\beta+1}{2}},$$

结果

$$1\leq\lim_{t\to t^{*+}}\frac{b_2(u(t))-b_1(u(t))}{a(u(t))}=0.$$

这个矛盾说明 $u(t)\in W_1$.

(2) 令 $u_0\in W_2$, 可以断言 $u(t)\in W_2$. 假设不成立, 即存在 t_0, 使得 $u(t_0)\in W_1$, 则存在 t^*, 使得 $a(u(t^*))=b_2(u(t^*))-b_1(u(t^*))$ $(0<t^*\leq t_0)$, 且对 $0\leq t<t^*$, $u(t)\in W_2$.

首先考虑 $a(u(t^*))=0$ 的情况. 一方面, 因为 $a(u(t))$, $b_1(u(t))$ 和 $b_2(u(t))$ 关于 t 连续, 可以断言

$$\lim_{t\to t^{*-}}a(u(t))=0.$$

另一方面, 因为对 $0\leq t<t^*$, $u(t)\in W_2$, 则 $a(u(t))\neq 0$, $a(u(t))<b_2(u(t))-b_1(u(t))$, $0\leq t<t^*$. 由 (1) 知

$$1<\frac{b_2(u(t)-b_1(u(t)))}{a(u(t))}\leq C_1^{\alpha+1}(a(u))^{\frac{\alpha+1}{2}}+C_2^{\beta+1}(a(u))^{\frac{\beta+1}{2}},$$

结果

$$1\leq\lim_{t\to t^{*-}}\frac{b_2(u(t))-b_1(u(t))}{a(u(t))}=0,$$

然而这是不可能的.

若 $a(u(t^*)) \neq 0$, 则与 (1) 相同的讨论有 $J(u(t^*)) \geq d$, 这与 (3.2) 式矛盾. 所以 $u(t) \in W_2$.

4 解的整体存在和爆破的条件

首先研究当初始能量 $E(0) = d$ 时解整体存在和爆破的条件.

定理 4.1 假设 $E(0) = d$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$.

1) 若 $a(u_0) = b_2(u_0) - b_1(u_0)$, 且 $a(u_0) \neq 0$, 则问题 (1.1) 存在整体弱解 $u(t,x) \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega))$, $u_t(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$.

2) 若 $a(u_0) > b_2(u_0) - b_1(u_0)$ 或 $a(u_0) = 0$, 则问题 (1.1) 存在整体弱解 $u(t,x) \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega))$, $u_t(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$.

3) 若 $(u_0, u_1) \geq 0$, $a(u_0) < b_2(u_0) - b_1(u_0)$, 则问题 (1.1) 的解在有限时间内爆破, 即存在常数 $T > 0$, 使得 $\lim\limits_{t\to T^-} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = +\infty$.

注 当 $(u_0, u_1) < 0$ 时, 添上 $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 < \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2$ ($\bar{u}$ 为 (1.1) 式的平衡态) 这个条件, 同理可证, 证明过程略.

证 1) 若 $a(u_0) = b_2(u_0) - b_1(u_0)$ 且 $a(u_0) \neq 0$. 令 $\{w_j(x)\}$ 是 $H^1(\Omega)$ 的一个基, 构造问题 (1.1) 的近似解 $u_m(t,x)$, 使得

$$u_m(t,x) = \sum_{j=1}^{m} g_{im}(t)\, w_j(x), m = 1, 2, \cdots$$

满足

$$(u_{mtt}, w_s) - (\Delta u_{m,}, w_s) + (u_m, w_s) = \left(|u_m|^{\alpha-1} u_m, w_s\right) - \left(|u_m|^{\beta-1} u_m, w_s\right), \tag{4.1}$$

$$u_m(x,0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm} w_j(x) \to u_0(x), \text{ 在 } H^1(\Omega) \text{ 中}, \tag{4.2}$$

$$u_{mt}(x,0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm} w_j \to u_1(x), \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中}. \tag{4.3}$$

将 (4.1) 式与 g'_{im} 相乘, 并关于 s 求和得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ = \ & \frac{1}{\alpha+1}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} - \frac{1}{\beta+1}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1}. \end{aligned}$$

关于 t 积分得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\beta+1}\|u_m\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1} - \frac{1}{\alpha+1}\|u_m\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \\ = & \frac{1}{2}\|u_{mt}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\alpha+1}\|u_m(0)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \\ & + \frac{1}{\beta+1}\|u_m(0)\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1}. \end{aligned}$$

对于充分大的 m, 有

$$\frac{1}{2}\left\|u_{mt}\right\|_{L^2}^2(\Omega)+J\left(u_m\right)=E_m(0)=d, \quad 0 \leq t<\infty$$

且 $u_m(0) \in W_1$,

$$\begin{aligned} J\left(u_m\right)= & \frac{1}{2}\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\frac{1}{\beta+1}\left\|u_m\right\|_{\beta+1(\Omega)}^{\beta+1}-\frac{1}{\alpha+1}\left\|u_m\right\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \\ = & \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right)\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^2+\left(\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\alpha+1}\right)\left\|u_m\right\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \\ & +\frac{1}{\beta+1}\left(a\left(u_m\right)-b_2\left(u_m\right)+b_1\left(u_m\right)\right) \\ \geq & \frac{\beta-1}{2(\beta+1)}\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{2}\left\|u_{mt}\right\|_{L^2(\Omega)}^2<d, \quad J\left(u_m\right) \leq \frac{\beta-1}{2(\beta+1)}\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^2<d,$$

即 $u(t, x) \in C\left([0, \infty) ; H_0^1(\Omega)\right), u_t(t, x) \in C\left([0, \infty) ; L^2(\Omega)\right)$.

2) 若 $a\left(u_0\right)>b_2\left(u_0\right)-b_1\left(u_0\right)$ 或 $a\left(u_0\right)=0$, 可以断言

$$a(u(t))>b_2(u(t))-b_1(u(t)) \tag{4.4}$$

或 $a(u)=0$, 对所有的 $t \geq 0$ 成立.

实际上, 如果存在 t_1, 使得

$$a\left(u\left(t_1\right)\right)>b_2\left(u\left(t_1\right)\right)-b_1\left(u\left(t_1\right)\right), \tag{4.5}$$

那么由于 $a(u(t)), b_1(u(t))$ 和 $b_2(u(t))$ 关于 t 连续, 则存在 t_0, 使得

$$a\left(u\left(t_0\right)\right)=b_2\left(u\left(t_0\right)\right)-b_1\left(u\left(t_0\right)\right) \tag{4.6}$$

且有

$$a(u(t))<b_2(u(t))-b_1(u(t)), \tag{4.7}$$

对 $t_0<t \leq t_1$ 成立.

由于 $a\left(u\left(t_0\right)\right) \neq 0$ 且 $a\left(u_0\right) \neq b_2\left(u_0\right)-b_1\left(u_0\right)$, 所以有 $u(t) \not \equiv u\left(t_0\right)$, 对 $0 \leq t \leq t_0$ 成立. 令 $v(t)=u\left(t_0-t\right) \not \equiv u\left(t_0\right)$, 则 $v(0)=u\left(t_0\right), v\left(t_0\right)=u_0, v_t(0)=\lim\limits_{t \rightarrow 0}-u_t\left(t-t_0\right)=0, v(t)$ 满足

$$v_{tt}-\Delta v+v=|v|^{\alpha-1} v-|v|^{\beta-1} v, \quad v(0)=u\left(t_0\right), \quad v_t(0)=0 .$$

然而 $u\left(t_0\right)$ 也是以上问题的一个解, 这和解的唯一性矛盾. 因此 (4.6) 式是有效的, 类似 1) 的证明得 $u(t, x) \in C\left([0, \infty) ; H_0^1(\Omega)\right), u_t(t, x) \in C\left([0, \infty) ; L^2(\Omega)\right)$.

3) 与 2) 的证明类似, 若 $a\left(u_0\right)<b_2\left(u_0\right)-b_1\left(u_0\right)$, 可以断言

$$a(u(t))<b_2(u(t))-b_1(u(t)), \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\prime \prime}=\left\|u_t\right\|_{L^2}^2+b_2(u)-b_1(u)-a(u) . \tag{4.9}$$

若 $(u_0, u_1) \geq 0$, 则存在使得 $t_0 > 0$, 使得 $(u(t_0), u_t(t_0)) = \frac{1}{2}\left(\|u(t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)_t' \geq 0$. 实际上, 若 $\left(\|u(t)\|_{L^2\Omega}^2\right)' = 2(u(t), u_t(t)) < 0$, 由 (4.8) 和 (4.9) 式有

$$\int_0^t \left[\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + b_2(u) - b_1(u) - a(u)\right] d\tau < (u_0, u_1),$$

对所有 $t \geq 0$ 成立, 即

$$\int_0^{+\infty} \left[\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + b_2(u) - b_1(u) - a(u)\right] d\tau$$

是有限的. 因此

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 0, \\
\lim_{t\to+\infty} [b_2(u) - b_1(u) - a(u)] &= 0, \\
\lim_{t\to+\infty} J(u) &= d, \\
\lim_{t\to+\infty} [b_2(u) - b_1(u) - a(u) + 2J(u)] &= \lim_{t\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\right) b_2 + \left(\frac{2}{\beta+1} - 1\right) b_1\right] \\
&= 2d.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
J(u) =& \frac{1}{2} a(u) + \frac{1}{\beta+1} b_1(u) - \frac{1}{\alpha+1} b_2(u) \\
=& \frac{1}{2} a(u) + \frac{1}{2(\beta+1)} b_1(u) + \left[\frac{\alpha - 2\beta + 1}{2(\beta-1)(\alpha+1)}\right] b_2(u) \\
& - \frac{1}{2(\beta-1)} \left[\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\right) b_2(u) + \left(\frac{2}{\beta+1} - 1\right) b_1(u)\right],
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{t\to\infty} \left\{\frac{1}{2} a(u) + \frac{1}{2(\beta+1)} b_1(u) + \left[\frac{\alpha - 2\beta + 1}{2(\beta-1)(\alpha+1)} + \frac{1}{\alpha+1}\right] b_2(u)\right\} = \frac{\beta}{\beta-1} d.$$

由 $a(u)$, $b_1(u)$, $b_2(u) \geq 0$ 知对所有的 $t \geq 0$, $a(u)$, $b_1(u)$, $b_2(u)$ 有限. 由引理 3.2 的证明知存在序列 $\{t_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 使得 $\lim\limits_{t_i \to t^{*-}} a(u(t_i)) = 0$, 又由 (4.8) 式知

$$1 > \frac{a(u(t_i))}{b_2(u(t_i)) - b_1(u(t_i))} \geq \frac{1}{C_1^{\alpha+1} a(u(t_i))^{\frac{\alpha-1}{2}} + C_2^{\beta+1} a(u(t_i))^{\frac{\beta-1}{2}}} \to \infty \ (t_i \to t^{*-}),$$

上式矛盾. 这个矛盾说明存在 $t_1 > 0$, 使得 $\left(\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)' \geq 0$. 因为 $\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)'' > 0$, 对所有的 $t > 0$ 成立, 因此有 $\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)' > 0$, 对 $t > t_1$. 当然, 存在 $t_2 > t_1$, 使得 $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 > \frac{2(\beta+1)}{\beta-1} E(0)$. 因此有

$$\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)'' > (\beta+3) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{4.10}$$

对 $t \geq t_2$. 结果

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)'' - \frac{\beta+3}{4}\left[\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)'\right]^2 \\ > \; & (\beta+3)\left[\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - (u_t, u)^2\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

且

$$\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{2}}\right)'' = -\frac{1}{4}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{9}{2}}\left[\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)'' - \frac{5}{4}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)'\right] < 0,$$

对 $t > t_2$. 因为对 $t > t_1$, $\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{2}}\right)'' = -\frac{1}{4}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{5}{2}}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)' < 0$. 对 $t \geq t_2$, $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{2}}$ 是递减的凹函数, 因此存在 $T < +\infty$, 使得 $\lim\limits_{t\to T^-}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{-\frac{1}{2}} = 0$, 即 $\lim\limits_{t\to T^-}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = +\infty$.

其次考虑当初始能量 $E(0) < d$ 时解整体存在和爆破的条件.

定理 4.2 假设 $n \leq 6$, $0 < E(0) < d$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$,

1) 若 $a(u_0) - b_2(u_0) + b_1(u_0) > 0$ (或 $a(u_0) - b_2(u_0) + b_1(u_0) = 0$), 则问题 (1.1) 有整体弱解 $u(t,x) \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega))$, $u_t(t,x) \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$.

2) 若 $a(u_0) - b_2(u_0) + b_1(u_0) < 0$, 则问题 (1.1) 的解在有限时间内爆破.

证 1) 同定理 4.1 中 1) 的证明, 由 $E(0) < d$, $a(u_0) - b_2(u_0) + b_1(u_0) > 0$ 知

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_m) = E_m(0) < d, 0 \leq t < \infty.$$

因为

$$\frac{1}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_0) = E(0) < d, 0 \leq t < \infty,$$

所以 $J(u_0) < d$, 又由 $a(u_0) - b_2(u_0) + b_1(u_0) > 0$, 得 $u_0 \in W_1$. 对于充分大的 m, 有

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|_{L^2(\Omega)}^2 + J(u_m) = E_m(0) < d, 0 \leq t < \infty, \tag{4.12}$$

且 $u_m(0) \in W_1$. 同引理 3.2, 由 (4.12) 式对于充分大的 m 和 $0 \leq t < \infty$, 可以证明 $u_m(t) \in W_1$ 且

$$\begin{aligned} J(u_m) &= \frac{1}{2}\|u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\beta+1}\|u_m\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1} - \frac{1}{\alpha+1}\|u_m\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+1}\right)\|u_m\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{\alpha+1}\right)\|u_m\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha+1}\left(a(u_m) - b_2(u_m) + b_1(u_m)\right) \\ &\geq \frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)}\|u_m\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_{mt}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)}\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^2<d, 0 \leq t<\infty, \\
&\left\|u_{mt}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 d, 0 \leq t<\infty, \\
&\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1} d, 0 \leq t<\infty, \\
&\left\|u_m\right\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \leq C_*^{\alpha+1}\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^{\alpha+1} \leq C_*^{\alpha+1}\left(\frac{2(\alpha+1)}{\alpha-1} d\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}, \\
&\left\|u_m\right\|_{L^{\beta+1}(\Omega)}^{\beta+1} \leq C_*^{\beta+1}\left\|u_m\right\|_{H^1(\Omega)}^{\beta+1} \leq C_*^{\beta+1}\left(\frac{2(\beta+1)}{\beta-1} d\right)^{\frac{\beta+1}{2}},
\end{aligned}$$

其中 c_* 为常数, 所以 $u(t,x) \in C\left([0,\infty); H_0^1(\Omega)\right)$, $u_t(t,x) \in C\left([0,\infty); L^2(\Omega)\right)$.

2) 当 $a(u_0)-b_2(u_0)+b_1(u_0)<0$ 时, 类似定理 4.1 中 3) 的证明, 易证 $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ 在有限时间内爆破.

5 解爆破时生命跨度的估计

本文最后一部分将给出定理 4.1 和定理 4.2 中爆破解的生命跨度的上界估计.

定理 5.1 若 $E(0)=d$, $(u_0,u_1) \geq 0$, $a(u_0)<b_2(u_0)-b_1(u_0)$, T_0 是 (1.1) 的生命跨度, 则

$$T_0 \leq \frac{2\left\|u_0\right\|_{L^2}^2}{(\beta+3)(u_0,u_1)}.$$

证 由定理 4.2, 对所有 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&a(u(t))<b_2(u(t))-b_1(u(t)), \\
&\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\prime\prime}=\left\|u_t\right\|_{L^2(\Omega)}^2+b_2(u)-b_1(u)-a(u).
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{2}\left(\left\|u_t\right\|_{L^2(\Omega)}^2+a(u)\right)=-\frac{1}{\beta+1} b_1(u)+\frac{1}{\alpha+1} b_2(u)+E(0),$$

所以

$$\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\prime\prime}=(\beta+3)\left\|u_t\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left[2-\frac{2(\beta+1)}{\alpha+1}\right] b_2(u)+(\beta-1) a(u)-2(\beta+1) E(0). \tag{5.1}$$

又由引理 2.1 的证明有

$$J\left(\lambda_0(u)\right)=\lambda_0^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\beta+1}\right) a(u)+\left(\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\alpha+1}\right) \lambda_0^{\alpha-1} b_2(u)\right] \geq d.$$

因此

$$a(u) \geq \frac{\frac{2(\beta+1)}{\beta-1}}{\lambda_0^2} d-\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+1)(\beta-1)} \lambda_0^{\alpha-1} b_2(u).$$

当 $\lambda_0^2<1$ 时,

$$a\left(u\right)\geq\frac{2\left(\beta+1\right)}{\beta-1}d-\frac{2\left(\alpha-\beta\right)}{\left(\alpha+1\right)\left(\beta-1\right)}\lambda_0^{\alpha-1}b_2\left(u\right),$$
$$\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)''>\left(\beta+3\right)\left\|u_t\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left(\beta+1\right)\left(d-E\left(0\right)\right).$$

由 $E\left(0\right)=d$, 得

$$\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)''\geq\left(\beta+3\right)\left\|u_t\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{5.2}$$

令 $y\left(t\right)=\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2$, 由 (5.2) 式得

$$y''\geq\frac{\beta+3}{4}\frac{\left(y'\left(t\right)\right)^2}{y\left(t\right)}. \tag{5.3}$$

因为 $a\left(u_0\right)<b_2\left(u_0\right)-b_1\left(u_0\right)$, 有 $a\left(u_0\right)\neq 0$. 当 $\left(u_0,u_1\right)\geq 0$ 时, 令 $T_1>0$, 使得对 $0\leq t\leq T_1$, $y'\left(t\right)>0$,

$$y''\geq\frac{\beta+3}{4}\frac{\left(y'\left(t\right)\right)^2}{y\left(0\right)}.$$

解上式并在 0 到 T_1 上积分得

$$T_0=T_1\leq\frac{2\left\|u_0\right\|_{L^2}^2}{\left(\beta+3\right)\left(u_0,u_1\right)}. \tag{5.4}$$

定理 5.2 若 $E\left(0\right)<d$, $a\left(u_0\right)<b_2\left(u_0\right)-b_1\left(u_0\right)$, T_2 是 (1.1) 的生命跨度, 则有如下估计:

1) 若 $\left(u_0,u_1\right)>0$, 则

$$T_2\leq\sqrt{\frac{2\left(\beta+1\right)}{\left(q-2\right)\left[\left(\beta+1\right)-q\right]}}\arcsin\left\{\sqrt{\frac{\left(q-2\right)\left[\left(\beta+1\right)-q\right]}{\frac{(\beta+1)(2-q)^2}{2}\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{q-6}{2}}\left(u_0,u_1\right)^2+\left(q-2\right)\left[\left(\beta+1\right)-q\right]}}\right\};$$

2) 若 $\left(u_0,u_1\right)\leq 0$, 则

$$\begin{aligned}T_2\ \leq\ & -\frac{1}{c\left(\beta+1\right)}\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{\frac{2\left(\beta+1\right)c}{\beta+3}}\arctan\frac{1}{\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}}\sqrt{\frac{\beta+3}{8c\left(\beta+1\right)}}\left(u_0,u_1\right)\\&+\sqrt{\frac{2\left(\beta+1\right)}{\left(q-2\right)\left[\left(\beta+1\right)-q\right]}}\times\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

这里 $q=\max\left\{\frac{2(\beta+1)d}{(\beta+1)d-(\beta-1)E(0)},\frac{5}{2}\right\}$, $c=d-E\left(0\right)$.

证 由定理 4.2, 对所有 $t\geq 0$, 同定理 5.1 的证明, 由 $E\left(0\right)<d$, 知 $\left(d-E\left(0\right)\right)\doteq c>0$, 其中 $\doteq$ 表示“等价于”. 所以

$$\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)''\geq\left(\beta+3\right)\left\|u_t\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\left(\beta+1\right)c. \tag{5.5}$$

令 $y(t)=\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, 由 (5.5) 式得

$$y''\geq\frac{\beta+3}{4}\frac{(y'(t))^2}{y(t)}+2(\beta+1)c. \tag{5.6}$$

因为 $a(u_0)<b_2(u_0)-b_1(u_0)$, 有 $a(u_0)\neq 0$. 当 $(u_0,u_1)<0$ 时, 令 $T_3>0$, 使得对 $0\leq t\leq T_3$, $y'(t)\leq 0$,

$$y''\geq\frac{\beta+3}{4}\frac{(y'(t))^2}{y(0)}+2(\beta+1)c.$$

将上式在 0 到 T_3 上积分得

$$\begin{aligned}T_3&\leq-\frac{1}{c(\beta+1)}\sqrt{\frac{2(\beta+1)cy(0)}{\beta+3}}\arctan\sqrt{\frac{\beta+3}{8c(\beta+1)y(0)}}y'(0)\\&\doteq-\frac{1}{c(\beta+1)}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{\frac{2(\beta+1)c}{\beta+3}}\arctan\left[\frac{1}{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}\sqrt{\frac{\beta+3}{8c(\beta+1)}}(u_0,u_1)\right].\end{aligned} \tag{5.7}$$

现在考虑当 $(u_0,u_1)>0$ 时, 解的生命跨度.

注意到

$$\frac{q}{2}\left(\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+a(u)\right)+\frac{q}{\beta+1}b_1(u)-\frac{q}{\alpha+1}b_2(u)-qE(0)=0,$$

与 (5.1) 式类似可以得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)''&=\left(1+\frac{q}{2}\right)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\left(-1+\frac{q}{\beta+1}\right)b_1(u)+\left(1-\frac{q}{\beta+1}\right)b_2(u)\\&\quad+\left(\frac{q}{2}-1\right)a(u)-qE(0).\end{aligned}$$

因为

$$a(u)\geq\frac{2(\beta+1)}{\beta-1}d-\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+1)(\beta-1)}b_2(u),$$

有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)''&=\left(1+\frac{q}{2}\right)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2+\left(-1+\frac{q}{\beta+1}\right)b_1(u)\\&\quad+\left[1-\frac{q}{\alpha+1}-\left(\frac{q}{2}-1\right)\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+1)(\beta-1)}\right]b_2(u)\\&\quad+\left(\frac{q}{2}-1\right)\frac{2(\beta+1)}{\beta-1}d-qE(0).\end{aligned}$$

若取 $q=\max\left\{\frac{2(\beta+1)d}{(\beta+1)d-(\beta-1)E(0)},\frac{5}{2}\right\}$, 由 $E(0)<d$, 则有 $2<q<\beta+1$,

$$\begin{aligned}&1-\frac{q}{\beta+1}<1-\frac{q}{\alpha+1}-\left(\frac{q}{2}-1\right)\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha+1)(\beta-1)},\\&\left(\frac{q}{2}-1\right)\cdot\frac{2(\beta+1)}{\beta-1}d\geq qE(0).\end{aligned}$$

由 $b_1(u), b_2(u) \geq 0$ 知

$$\begin{aligned}\left(\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)'' &\geq (2+q)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(1-\frac{q}{\beta+1}\right)(b_2(u)-b_1(u)) \\ &\geq (2+q)\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(1-\frac{q}{\beta+1}\right)a(u).\end{aligned}$$

因为 $a(u) \geq \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = y(t)$,

$$y''y(t) \geq \frac{2+q}{4}(y'(t))^2 + 2\left(1-\frac{q}{\beta+1}\right)y^2. \tag{5.8}$$

令 $Z(t) = y^{-\frac{q-2}{4}}(t)$, 则

$$Z'' \leq -\frac{1}{2(\beta+1)}\{(q-2)[(\beta+1)-q]\}Z((t)). \tag{5.9}$$

因为 $Z'(t) < 0$, 把 (5.8) 式乘以 Z', 积分得

$$Z' \leq -\sqrt{\frac{1}{2(\beta+1)}(q-2)[(\beta+1)-q](Z^2(0)-Z^2(t)) + (Z'(0))^2}. \tag{5.10}$$

存在 t_0, 使得 $Z(t_0) = 0$, 因此上式积分得

$$\begin{aligned}t_0 &\leq -\int_{Z(0)}^{0} \frac{dZ}{\sqrt{(Z'(0))^2 + \frac{1}{2(\beta+1)}(q-2)[(\beta+1)-q](Z^2(0)-Z^2(t))}} \\ &= \sqrt{\frac{2(\beta+1)}{(q-2)[(\beta+1)-q]}}\arcsin\left\{\sqrt{\frac{(q-2)[(\beta+1)-q]}{2(\beta+1)(Z'(0))^2 + (q-2)[(\beta+1)-q]Z^2(0)}}Z(0)\right\}.\end{aligned}$$

特别地, 若 $(u_0, u_1) = 0$, 即 $Z'(0)$, 则

$$t_0 \leq \sqrt{\frac{2(\beta+1)}{(q-2)[(\beta+1)-q]}} \times \frac{\pi}{2}.$$

将这个结果结合 (5.7) 式有

1) 若 $(u_0, u_1) > 0$, 则

$$T_2 \leq \sqrt{\frac{2(\beta+1)}{(q-2)[(\beta+1)-q]}}\arcsin\left\{\sqrt{\frac{(q-2)[(\beta+1)-q]}{\frac{(\beta+1)(2-q)^2}{2}\|u_0\|^{\frac{q-6}{2}}_{L^2(\Omega)}(u_0,u_1)^2 + (q-2)[(\beta+1)-q]}}\right\};$$

2) 若 $(u_0, u_1) \leq 0$, 则

$$\begin{aligned}T_2 \leq\; & -\frac{1}{c(\beta+1)}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\sqrt{\frac{2(\beta+1)c}{\beta+3}}\arctan\frac{1}{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}}\sqrt{\frac{\beta+3}{8c(\beta+1)}}(u_0,u_1) \\ & + \sqrt{\frac{2(\beta+1)}{(q-2)[(\beta+1)-q]}} \times \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Shatah J. Unstable ground state of nonlinear Klein-Gordon equations [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1985, 290(2): 701–710.

[2] 黄文毅, 赖绍永, 张健. 非线性 Klein-Gordon 方程整体解存在的最佳条件 [J]. 数学学报, 1998, 54(3): 435–442.

[3] Li Yuxiang, Xie Chunhong. Blow-up for P-Laplacian parabolic equations [J]. Electr. J. Diff. Equ., 2003, 2003(20): 1–12.

[4] Zhen Lei. Global Well-Posedness of incompressible elastodynamics in two dimensions [J]. Commun. Pure Appl. Math., 2016, 69(11): 2072–2106.

[5] Colin M, Watanabe T. Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gorden equation coupled with maxwell equation [J]. J. Math. Anal. Appl., 2016, 443(2): 778–796.

[6] Tsutsumi M. Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear parabolic equations [J]. Publ. Res. Insti. Math. Sci., 1972, 8(2): 211–229.

[7] Aprile T D, Mugnai D. Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrodinger-Maxwell equation [J]. Proc. Roral Soc. Edinb., 2004, 134(5): 893–906.

[8] Yu Yong. Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon equations coupled with Born-Infeld theory [J]. Ann. Linstitut Henri Poincare Non Linear Anal., 2010, 27(1): 351–376.

[9] Li Kaitai, Zhang Quande. Existence and nonexistence of global solutions for the equation of disocation of crystals [J]. J. Diff. Equ., 1998, 146(1): 5–21.

THE GLOBAL EXISTENCE AND BLOW-UP OF A CLASS OF NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATIONS

ZHU Jia-ling, LI Yang, YANG Han

(*School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China*)

Abstract: The purpose of this work is to study the initial boundary value problem of a class of nonlinear Klein-Gordon equation. By introducing certain potential well, some sufficient conditions for the global existence and blow-up results to the solution are obtained. The upper bound of life span is given while the solution blows up.

Keywords: nonlinear Klein-Gordon equation; Galerkin method; global solution; blow up; life span

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35A24