Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非线性微分 - 差分方程的解

张石梅 [1], 龙见仁 [1,2], 吴秀碧 [1,3]

(1. 贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550001)

(2. 北京邮电大学计算机学院; 理学院, 北京 100876)

(3. 贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 本文研究了非线性微分 - 差分方程 $f(z)^n + a_{n-1}f(z)^{n-1} + \cdots + a_1f(z) + q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c) = P(z)$ 的有穷级非零整函数解的增长性和零点分布问题. 利用微分 - 差分 Nevanlinna 值分布的方法, 获得了当方程的系数满足一定条件时, 方程解的增长性估计和零点分类. 特别地, 当 $n=2$, $a_1 \neq 0$ 指数多项式解满足某些条件时, 获得了解具有特别的形式. 该结果推广了先前文献 [1, 2] 的结果.

关键词: 微分 - 差分方程; 指数多项式; 有穷级

MR(2010) **主题分类号**: 39A10; 30D35　　**中图分类号**: O174.5

文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2018)06-1107-12

1 引言及结果

本文中, 亚纯函数指复平面上的亚纯函数, 假定读者熟悉 Nevanlinna 值分布理论的标准记号及主要结果 [3–6]. 例如 $m(r,f)$, $N(r,f)$, $T(r,f)$ 等. 为方便起见, 用 $S(r,f)$ 表示一个量使得 $\frac{S(r,f)}{T(r,f)} \to 0$ $(r \to 0)$, 除去一个对数测度为有穷的集合; 并用 $\mathrm{card}(X)$ 表示集合 X 中的元素个数.

最近, 许多专家学者利用差分 Nevanlinna 理论, 尤其是差分对数导数引理 [7–9] 来研究复差分, 复微分 - 差分方程. 刘凯和他的合作者考虑了 Fertmat 型微分 - 差分方程的解 [10–13]. 在文献 [13, 定理 2.6], Yang 和 Laine 研究了非线性微分 - 差分 $f(z)^n + L(z,f) = h(z)$ $(n \geq 2)$ 的有穷级整函数解, 其中 $L(z,f)$ 是关于 $f(z)$ 的线性微分 - 差分多项式, $h(z)$ 是亚纯函数.

Yang 和 Laine (参见文献 [13, 定理 2.4]) 得到方程

$$f(z)^2 + q(z)f(z+1) = P(z) \tag{1.1}$$

没有有穷级的超越整函数解, 其中 $q(z)$, $P(z)$ 是多项式.

温志涛等人 [14] 讨论了方程

$$f(z)^n + q(z)e^{Q(z)}f(z+c) = P(z) \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2017-09-19　　接收日期: 2017-11-29

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11501142; 11601100); 贵州省科学技术基金资助 (黔科合 J 字 [2015]2112 号); 贵州师范大学 2016 年博士科研启动项目资助; 2016 年度贵州省 “ 千” 层次创新型人才项目资助.

作者简介: 张石梅 (1984–), 女, 河南睢县, 博士, 主要研究方向: 复分析.

的有穷级非零整函数解, 其中 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式, $n\geq 2$ 是正整数, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 并得到了定理 1.1.

定理 1.1 [14] 设 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式且 $Q(z)$ 非常数, $q(z)\not\equiv 0$, $n\geq 2$, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 那么方程 (1.2) 的有穷级超越整函数解满足

(i) 每一个解满足 $\sigma(f)=\deg(Q(z))$ 且 $f(z)$ 是正规型的.

(ii) 每一个解满足 $\lambda(f)=\sigma(f)$ 的充要条件是 $P(z)\not\equiv 0$.

(iii) $f\in\Gamma_0$ 当且仅当 $P(z)\equiv 0$. 特别地, $n\geq 3$ 时成立.

(iv) 如果解 $f,g\in\Gamma_0$, 那么 $f=\eta g$ 且 $\eta^{n-1}=1$.

(v) 如果 $f(z)$ 是 (1.5) 形式的指数多项式解, 那么 $f(z)\in\Gamma_1$. 更进一步地, 如果 $f\in\Gamma_1\backslash\Gamma_0$, 那么 $\sigma(f)=1$.

刘凯 [2] 研究了方程

$$f(z)^n+q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)=P(z) \tag{1.3}$$

的有穷级非零整函数解, 其中 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式, $n\geq 2$ 是正整数, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 并得到了定理 1.2.

定理 1.2 [2] 设 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式且 $Q(z)$ 非常数, $q(z)\not\equiv 0$, $k\geq 1$ 且 $n\geq 2$, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 那么方程 (1.3) 的有穷级超越整函数解满足

(i) 每一个解满足 $\sigma(f)=\deg(Q(z))$ 且 $f(z)$ 是正规型的.

(ii) 每一个解满足 $\lambda(f)=\sigma(f)$ 的充要条件是 $P(z)\not\equiv 0$.

(iii) $f\in\Gamma_0'$ 当且仅当 $P(z)\equiv 0$. 特别地, $n\geq 3$ 时成立.

(iv) 如果解 f, $g\in\Gamma_0'$, 那么 $f=\eta g$ 且 $\eta^{n-1}=1$.

(v) 如果 $f(z)$ 是 (1.5) 形式的指数多项式解, 那么 $f(z)\in\Gamma_1'$.

李楠等 [1] 研究了下列更为一般形式方程的解

$$f(z)^n+a_{n-1}f(z)^{n-1}+\cdots+a_1f(z)+q(z)e^{Q(z)}f(z+c)=P(z), \tag{1.4}$$

其中 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式, $n\geq 2$ 是正整数, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 并得到了定理 1.3.

定理 1.3 [1] 设 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式且 $Q(z)$ 非常数, $q(z)\not\equiv 0$ 且 $n\geq 2$, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 那么方程 (1.4) 的有穷级非零整函数解满足

(a) 每一个解满足 $\sigma(f)=\deg(Q(z))$ 且 $f(z)$ 是正规型的.

(b) 如果 0 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值, 那么 $a_{n-1}=\cdots=a_1=0\equiv P(z)$.

(c) 如果 $P(z)\equiv 0$, 那么有 $z^{n-1}+a_{n-1}z^{n-2}+\cdots+a_1=(z+\frac{a_{n-1}}{n})^{n-1}$. 更进一步地, 如果存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$, 那么所有的 $a_j=0$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ 且有 $\lambda(f)<\sigma(f)$; 否则, 有 $\lambda(f)=\sigma(f)$.

(d) $f\in\Gamma_0$ 当且仅当 $P(z)\equiv 0$ 且存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$.

(e) 当 $n\geq 2$ 时, 如果存在 $i_0\in\{1,2\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$ 且 $\mathrm{card}\{z:P_1(z)=P_1'(z)=P_1''(z)=0\}\geq 1$ 或者 $\mathrm{card}\{z:P_1(z)=P_1'(z)=0\}\geq 2$, 其中 $P_1(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1$, 那么 $f(z)\in\Gamma_0$ 且 $P(z)\equiv 0=a_1(z)=\cdots=a_{n-1}$.

(f) 如果解 f, $g\in\Gamma_0$, 那么 $f=\eta g$ 且 $\eta^{n-1}=1$.

注 1 方程 (1.4) 存在无穷级的超越城函数解. 例如 $f(z)=e^ze^{e^z}+1$ 是方程 $f^2(z)-2f(z)-\frac{1}{2}f(z+\log 2)=1$ 的无穷级超越整函数解.

为方便读者, 回忆下列形式指数多项式的定义

$$f(z)=p_1(z)e^{Q_1(z)}+\cdots+p_k(z)e^{Q_k(z)}, \tag{1.5}$$

其中 $p_j(z)$, $Q_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是关于 z 的多项式. 令 $q=\max\{\deg(Q_j(z)),Q_j(z)\not\equiv 0\ (j=1,2,\cdots,k)\}$, w_j $(j=1,2,\cdots,m)$ 是多项式 $Q_j(z)(j=1,2,\cdots,k)$ 的最高次数为 q 的主导系数. 因此 (1.5) 式可以改写成下列形式

$$f(z)=H_0(z)+H_1(z)e^{w_1z^q}+\cdots+H_m(z)e^{w_mz^q}, \tag{1.6}$$

其中 H_j $(j=0,1,\cdots,m)$ 或者是次数小于 q 的指数多项式, 或者是关于 z 的一般多项式, 令

$$\Gamma_1=\{h=e^{\alpha(z)}+d;d\in\mathbb{C}\},\ \Gamma_0=\{h=e^{\alpha(z)}\},$$
$$\Gamma_1'=\{p(z)e^{\alpha(z)}+h(z)\},\ \Gamma_0'=\{p(z)e^{\alpha(z)}\}.$$

上述 $p(z)$, $h(z)$, $\alpha(z)$ 是多项式, 其中 $\alpha(z)$ 非常数.

受定理 1.2 和定理 1.3 的启发, 本文考虑了下述方程

$$f(z)^n+a_{n-1}f(z)^{n-1}+\cdots+a_1f(z)+q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)=P(z), \tag{1.7}$$

其中 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式, $n\geq 2$ 是正整数, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $a_i\in\mathbb{C}\ (1,2,\cdots,n-1)$, 并得到了以下结果.

定理 1.4 设 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式且 $Q(z)$ 非常数, $q(z)\not\equiv 0$ 且 $n\geq 2$, $k\geq 1$, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 那么方程 (1.7) 的有穷级非零整函数解满足

(i) 每一个解满足 $\sigma(f)=\deg(Q(z))$ 且 $f(z)$ 是正规型的.

(ii) 如果有穷复数 a 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值, 那么有 $a=-\frac{a_{n-1}}{n}$. 特别地, 当 $a=0$ 时, 有 $a_{n-1}=\cdots=a_1=0\equiv P(z)$.

(iii) 当 $P(z)\equiv 0$ 时, 如果对任意的 $j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 都有 $a_j\neq 0\ (j=1,2,\cdots,n-1)$, 那么有 $\overline{\lambda}(f)=\sigma(f)$; 否则, 对所有的 $j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 有 $a_j=0\ (j=1,2,\cdots,n-1)$ 且 $\lambda(f)<\sigma(f)$.

(iv) $f\in\Gamma_0'$ 当且仅当 $P(z)\equiv 0$ 且存在 $i_0\in\{1,2\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$.

(v) 当 $n\geq 3$ 时, 如果存在 $i_0\in\{1,2\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$, 且 $\mathrm{card}\{z:P_1(z)=P_1'(z)=P_1''(z)=0\}\geq 1$ 或者 $\mathrm{card}\{z:P_1(z)=P_1'(z)=0\}\geq 2$, 其中, $P_1(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1(z)$, 那么 $f(z)\in\Gamma_0'$.

(vi) 如果解 $f,g\in\Gamma_0'$, 那么 $f=\eta g$ 且 $\eta^{n-1}=1$.

注 2 方程 (1.7) 存在有穷级整函数解. 例如 $f(z)=e^z+1$ 是方程 $f^2(z)-2f(z)-3e^zf'(z-\log 3)=-1$ 的有穷级非零整函数解. 1 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值, 满足 $a=-\frac{a_{n-1}}{n}$.

注 3 当 $n\geq 2$, 方程 (1.7) 也存在无穷级超越整函数解. 例如 $f(z)=e^{e^z}-e^{-e^z}$ 是方程 $f^2(z)-2f(z)-\frac{1}{2}e^{-z}f'(z+\log 2)=4$ 的无穷级整函数解.

当 $n=2$, $a_1\neq 0$ 时, 方程 (1.7) 变形

$$f^2(z)+a_1(z)+q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)=P(z). \tag{1.8}$$

定理 1.5 设 $q(z)$, $Q(z)$, $P(z)$ 是多项式且 $Q(z)$ 非常数, $q(z)\not\equiv 0$ 且 $n\geq 2$, $k\geq 1$, $a_1, c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 如果 $f(z)$ 方程 (1.8) 的具有 (1.6) 式形式的指数多项式解, 那么下列结论成立

(a) 当 $n\geq 2$ 时, 存在 $i_0, j_0\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $w_{i_0}=2w_{j_0}$.

(b) 当 $m=1$ 时, $f\in\Gamma_1'$.

当 $n=1$ 时, 方程 (1.7) 退化为

$$f(z)+q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)=P(z). \tag{1.9}$$

我们也得到了相应的结果.

定理 1.6 设 $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $q(z)$, $P(z)$ 是多项式, $Q(z)$ 非常数多项式且 $q(z)\not\equiv 0$, $k\geq 1$, 那么方程 (1.9) 的每一个有穷级非零整函数解满足

(i) $\sigma(f)\geq \deg(Q(z))$.

(ii) 如果 $P(z)\not\equiv 0$, 则有 $\lambda(f)=\sigma(f)$.

(iii) 如果 $P(z)\equiv 0$, 那么解不是具有 (1.6) 式形式的指数多项式解, 其中 $q=\deg(Q(z))$.

2 引理

引理 2.1 [1] 令 $T:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一个连续非减函数, $s\in(0,+\infty)$, 如果

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log T(r)}{\log r}=\zeta<1$$

且 $\delta\in(0,1-\zeta)$, 那么

$$T(r+s)=T(r)+o(\frac{T(r)}{r^{\delta}})(r\to\infty),$$

除去一个对数测度为有穷的集合.

差分对数导数引理 参看文献 [7–9, 15–17] 在复差分方程, 差分 Nevanlinna 理论方面起着非常重要的作用. 下面的引理是文献 [17, 引理 2.2] 的特殊情形.

引理 2.2 假设 $f(z)$ 是一个非常数亚纯函数, c, h 是两个不相等的复数. 如果 $\sigma_2(f)<1$, 那么

$$m(r,\frac{f(z+h)}{f(z+c)})=S(r,f)$$

对于所有的 r 成立, 除去一个对数测度为有穷的集合.

显然, 对任意的 $c\neq 0$, 当 $r\to\infty$ 时, 对一般亚纯函数 $f(z)$ 下列不等式成立

$$(1+o(1))N(r-|c|,\frac{1}{f(z)})\leq N(r,\frac{1}{f(z+c)})\leq (1+o(1))N(r+|c|,\frac{1}{f(z)}).$$

结合引理 2.1, 对于计数函数有下列关系.

引理 2.3 [1] 假设 $f(z)$ 是超级小于 1 的亚纯函数, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 那么

$$N(r,\frac{1}{f(z+c)})=N(r,\frac{1}{f(z)})+S(r,f(z)).$$

引理 2.4 [17] 假设 $f(z)$ 是超级小于 1 的亚纯函数, $c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 那么有

$$T(r,f(z+c))=T(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.5 [3,7] 假定 $f(z)$ 是一个亚纯函数, $\Psi(z) := a_n f^n(z) + \cdots + a_0(z)$ 满足 $a_n \neq 0, T(r, a_j) = S(r, f)$. 更进一步地, 假设 $\overline{N}(r, \frac{1}{\Psi}) + \overline{N}(r, f) = S(r, f)$, 那么有 $\Psi = a_n(f + \frac{a_{n-1}}{na_n})^n$.

引理 2.6 [2] 设 $q(z)$ 是多项式, $L(r, f)$ 是关于 $f(z)$ 或者它的导数, 变换的线性微分 - 差分多项式, 那么方程 $f(z)^2 + q(z)L(r, f) = 0$ 没有有穷级的超越整函数解.

引理 2.7 [14] 假定 q 是一个正整数, $a_0(z), \cdots, a_n(z)$ 或者是度小于 q 的指数多项式, 或者是关于 z 的一般多项式, $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ 是互不相等的常数, 那么

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(z) e^{b_j z^q} = a_0(z)$$

当且仅当 $a_0(z) \equiv \cdots \equiv a_n(z) \equiv 0$.

令 $W \subseteq \mathbb{C}$, 所有包含 W 的凸集的交定义为 W 的凸包, 记为 $\mathrm{co}(W)$. 如果 W 包含有穷多个元素, 那么 $\mathrm{co}(W)$ 可以直接通过有穷多个闭半平面的交得到. 因此, $\mathrm{co}(W)$ 或者是一个紧 polygon 集, 或者是一条线段. 用 $C(\mathrm{co}(W))$ 表示 $\mathrm{co}(W)$ 的直径. 如果 $\mathrm{co}(W)$ 是一条线段, 那么 $C(\mathrm{co}(W))$ 是这条线段长度的 2 倍. 在本文中记 $W = \{\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_m\}$, $W_0 = \{0, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_m\}$.

引理 2.8 [18] 假定 $f(z)$ 具有 (1.6) 式形式, 那么

$$T(r, f) = C(\mathrm{co}(W_0)) \frac{r^q}{2\pi} + o(r^q).$$

注 4 假设 $f(z)$ 是具有 (1.6) 形式的指数多项式解且 $m \geq 1$, 那么由引理 2.8 可知, 当 $\to \infty$ 时,

$$\frac{S(r, f)}{r^q} = \frac{S(r, f)}{T(r, f)} \cdot \frac{T(r, f)}{r^q} \to 0$$

和

$$\frac{o(r^q)}{T(r, f)} = \frac{o(r^q)}{r^q} \cdot \frac{r^q}{T(r, f)} \to 0.$$

换句话说 $S(r, f) = o(r^q)$, $o(r^q) = S(r, f)$.

引理 2.9 [18] 假定 $f(z)$ 具有 (1.6) 式形式, 如果 $H_0(z) \not\equiv 0$, 那么 $m(r, \frac{1}{f}) = o(r^q)$. 如果 $H_0(z) \equiv 0$, 那么

$$N(r, \frac{1}{f}) = C(\mathrm{co}(W_0)) \frac{r^q}{2\pi} + o(r^q).$$

利用文献 [2, 推论 2.6, 引理 2.7] 完全类似的方法, 可得下述引理 2.10 和引理 2.11.

引理 2.10 假定 $f(z)$ 具有 (1.6) 式形式, 对任意的 $i \neq j$, $w_i \neq 2w_j$ 且 $f(z)$ 是方程 (1.8) 的解. 如果点 $0, w_i, \cdots, w_n$ 是线性的, 那么 $m = 1$.

引理 2.11 当 $m \geq 2$ 时, 如果对任意的 $i \neq j$, $w_i \neq 2w_j$, 那么具有 (1.6) 式形式的 $f(z)$ 不是方程 (1.8) 的解.

引理 2.12 假定 $f(z)$ 具有 (1.6) 式形式, 其中 $m = 1$. 如果 $f(z)$ 是方程 (1.8) 的解, 那么 $f \in \Gamma_1'$.

证 令 $f(z)=H_0(z)+H_1(z)e^{w_1z^q}$. 要证 $H_0(z),\ H_1(z)$ 是多项式, 把 $f(z)$ 代入方程 (1.8) 得

$$\begin{aligned}&P(z)-H_0^2(z)-a_1H_0(z)=-q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)\\=\ &H_1^2(z)e^{2w_1z^q}+(2H_0(z)+a_1)H_1(z)e^{w_1z^q}+q(z)e^{Q_0(z)}H_0^{(k)}(z+c)e^{b_qz^q}\\&+q(z)H_1^T(z+c)e^{Q_0(z)+P_1(z)}e^{(b_q+w_1)z^q},\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $Q_0(z)=Q(z)-b_qz^q,\ P_1(z)=w_1(z+c)^q$ 是次数 $\le q-1$ 的多项式, $H_1^T(z+c)$ 是关于 $H_1(z+c),\ w_1(z+c)^q$ 和他们导数的微分多项式. 分三种情况来讨论.

情况 1 假设 $b_q\neq\pm w_1$, 对 (2.1) 式由引理 2.7 得

$$q(z)H_1^T(z+c)e^{Q_0(z)+P_1(z)}e^{(b_q+w_1)z^q}\equiv 0.$$

则 $H_1^T(z+c)\equiv 0$, 而 $H_1^T(z+c)$ 是关于 $H_1(z+c),\ w_1(z+c)^q$ 和其导数的微分多项式. 所以 $H_1(z)\equiv 0$, 矛盾.

情况 2 假设 $b_q=-w_1$, 同样对 (2.1) 式由引理 2.7 得 $H_1(z)\equiv 0$, 矛盾.

情况 3 $b_q=w_1$, 那么 (2.1) 式可改写为

$$\begin{aligned}P(z)-H_0^2(z)-a_1H_0(z)\ =\ &(H_1^2(z)+q(z)H_1^T(z+c)e^{Q_0(z)+P_1(z)})e^{2w_1z^q}\\&+((2H_0(z)+a_1)H_1(z)+q(z)e^{Q_0(z)}H_0^{(k)}(z+c))e^{w_1z^q}.\end{aligned}$$

如果 $\deg(H_0(z))\ge k$, 那么由 (2.1) 式和由引理 2.7 得

$$H_1^2(z)+q(z)H_1^T(z+c)e^{Q_0(z)+P_1(z)}\equiv 0,\tag{2.2}$$

$$(2H_0(z)+a_1)H_1(z)+q(z)e^{Q_0(z)}H_0^{(k)}(z+c)\equiv 0,\tag{2.3}$$

$$P(z)-H_0^2(z)-a_1H_0(z)\equiv 0.\tag{2.4}$$

由 (2.4) 式知 $H_0(z)$ 是一个多项式. 下证 $H_1(z)$ 也是多项式.

(a) 当 $\deg(H_0(z))\ge k$ 时, 则 $H_0^{(k)}(z+c)\not\equiv 0$. 如果 $\deg(Q_0(z)+P_1(z))=0$, 反证设 $H_1(z)$ 是一个超越整函数. 由差分对数导数引理及文献 [16, 定理 1.24] 知

$$N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z+c)})\le N(r,\frac{1}{f(z+c)})+k\overline{N}(r,f(z+c))+S(r,f(z+c)).$$

再由上式, (2.2) 式和引理 2.4 得

$$\begin{aligned}2T(r,H_1(z))\le &T(r,H_1^T(z+c))+T(r,q(z)e^{Q_0(z)+P_1(z)})\\\le\ &m(r,H_1^T(z+c))+N(r,H_1^T(z+c))+S(r,H_1(z))\\\le\ &T(r,H_1(z))+S(r,H_1(z)).\end{aligned}$$

上式与假设矛盾, 所以 $H_1(z)$ 是一个多项式. 由 (2.3) 式知 $Q_0(z)$ 是一个常数. 因此, $P_1(z)$ 也是一个常数. 可得 $q=1, f\in\Gamma_1'$.

如果 $\deg(Q_0(z)+P_1(z))\ge 1$, 由定理 1.2 (iii) 知 $H_1(z)\in\Gamma_0'$, 又因为 $H_0(z)$ 是多项式, 所以 $f\in\Gamma_1'$.

(b) 当 $\deg(H_0(z)) < k$ 时, 则 $H_0^{(k)}(z+c) \equiv 0$. 由 (2.3) 式知 $(2H_0(z)+a_1)H_1(z) = 0$. 如果 $H_1(z) = 0$, 那么 $f(z)$ 是一个多项式, 与已知矛盾. 如果 $2H_0(z) + a_1 = 0$, 则 $H_0(z)$ 是常数. 如果 $\deg(Q_0(z) + P_1(z)) = 0$, 由引理 2.6 知 $H_1(z)$ 是一个多项式. 如果 $\deg(Q_0(z) + P_1(z)) \geq 1$, 由定理 1.2 (iii) 知 $H_1(z) \in \Gamma_0'$, 所以 $f \in \Gamma_1'$.

3 定理的证明

定理 1.4 的证明 (i) 假设 $f(z)$ 是方程 (1.7) 的有穷级非零整函数解, 由 (1.7) 式和引理 2.7 知 $f(z)$ 是超越的.

一方面, 由引理 2.2 和 (1.7) 式及差分对数导数引理有

$$\begin{aligned} nT(r,f) + S(r,f) &= m(r, f^n + \cdots + a_1 f) \ = m(r, P(z) - q(z)e^{Q(z)} f^{(k)}(z+c)) \\ &\leq m(r,P(z)) + m(r,q(z)) + m(r,e^{Q(z)}) + m(r,f^{(k)}(z+c)) + O(1) \\ &\leq m(r,e^{Q(z)}) + m(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z+c)}) + m(r,f(z+c)) + S(r,f) \\ &\leq T(r,e^{Q(z)}) + T(r,f(z+c) + S(r,f) \\ &\leq T(r,e^{Q(z)}) + T(r,f) + S(r,f). \end{aligned}$$

所以

$$(n-1)T(r,f) \leq T(r,e^{Q(z)}) + S(r,f). \tag{3.1}$$

如果 $\sigma(f) < \deg(Q(z))$, 则与方程 (1.7) 矛盾, 所以有 $\sigma(f) = \deg(Q(z))$ $(n \geq 2)$. 由型的定义得

$$\tau(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{r^{\deg(Q(z))}} \in (0,\infty).$$

所以 $f(z)$ 是正规型的.

(ii) 假设 $f(z)$ 是方程 (1.7) 的有穷级非零整函数解, 由定理 1.4(i) 知, $f(z)$ 是超越的. 下面要证: 如果有穷复数 a 是 $f(z)$ 的 Borel 例外值, 那么有 $a = -\frac{a_{n-1}}{n}$. 由于 $\lambda(f-a) < \sigma(f)$, $f(z)$ 是整函数, 则 $f(z)$ 是正规增长. 令 $\lambda(f-a) < \alpha < \beta < \sigma(f)$, 即有

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,\frac{1}{f-a})}{\log r} < \alpha < \beta < \lim_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r} = \sigma(f).$$

从而有

$$\frac{N(r,\frac{1}{f-a})}{T(r,f)} \leq \frac{r^\alpha}{r^\beta} \to 0 \quad (r\to\infty).$$

因此 $N(r,\frac{1}{f-a}) = S(r,f)$. (1.7) 式可改写为

$$G(z) = f(z)^n + a_{n-1}f(z)^{n-1} + \cdots + a_1 f(z) - P(z) = -q(z)e^{Q(z)} f^{(k)}(z+c). \tag{3.2}$$

由引理 2.3 和文献 [6, 定理 1.24] 得

$$\begin{aligned}
N(r,\frac{1}{G(z)}) &= N(r,\frac{1}{q(z)f^{(k)}(z+c)})\\
&\leq N(r,\frac{1}{q(z)})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z+c)})\\
&= N(r,\frac{1}{q(z)})+N(r,\frac{1}{[f(z+c)-a]^{(k)}})\\
&\leq N(r,\frac{1}{f(z+c)-a})+k\overline{N}(r,f(z+c)-a)+S(r,f(z+c)-a)+S(r,f)\\
&\leq N(r,\frac{1}{f(z+c)-a})+S(r,f(z+c))\\
&\leq N(r,\frac{1}{f(z)-a})+S(r,f)=S(r,f).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

由于 $f(z)$ 是整函数, 由引理 2.5 得

$$G(z)=(f+\frac{a_{n-1}}{n})^n=f(z)^n+a_{n-1}f(z)^{n-1}+\cdots+a_1f(z)-P(z),\tag{3.4}$$

并且有

$$a_{i+1}=C_{n-1}^i(\frac{a_{n-1}}{n-1})^{n-1-i}, i=0,1,\cdots,n-2\,;\quad C_{n-1}^i=\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}.\tag{3.5}$$

反证: 假如 $a\neq-\frac{a_{n-1}}{n}$. 那么由 (3.4) 和 (3.5) 式得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f+\frac{a_{n-1}}{n}})=\overline{N}(r,\frac{1}{G(z)})=S(r,f).$$

又由 Nevanlinna 第二基本定理得

$$T(r,f)\leq\overline{N}(r,\frac{1}{f+\frac{a_{n-1}}{n}})+\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)-a})=S(r,f),$$

与已知矛盾, 所以 $a=-\frac{a_{n-1}}{n}$. 特别地, 当 $a=0$ 时, 有 $a_{n-1}=0$. 又有 (3.5) 式得 $a_{n-1}=\cdots=a_1=0\equiv P(z)$.

(iii) 假设 $f(z)$ 是方程 (1.7) 的有穷级非零整函数解, 由定理 1.4 (i) 知, $f(z)$ 是超越的. 由 $P(z)\equiv 0$ 得

$$H(z):=f(z)^{n-1}+a_{n-1}f(z)^{n-2}+\cdots+a_1=-q(z)e^{Q(z)}\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)}.\tag{3.6}$$

由引理 2.2 和差分对数导数引理得

$$m(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)})=S(r,f),\tag{3.7}$$

又由 (3.6) 式得

$$N(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)})\leq N(r,\frac{1}{q(z)})=S(r,f),\tag{3.8}$$

即有

$$T(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)})=S(r,f). \tag{3.9}$$

因此, 由 (3.6) 式和 (3.9) 式得

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\frac{1}{H(z)})+\overline{N}(r,f(z))&\le N(r,\frac{1}{\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)}})+N(r,\frac{1}{q(z)})+N(r,f)\\&\le T(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)})+S(r,f)=S(r,f).\end{aligned}$$

因此, 由引理 2.5, 得到 (3.6) 式可变形为

$$(f+\frac{a_{n-1}}{n-1})^{n-1}=-q(z)e^{Q(z)}\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)}, \tag{3.10}$$

并且有

$$a_{i+1}=C_{n-1}^{i}(\frac{a_{n-1}}{n-1})^{n-1-i},i=0,1,\cdots,n-2\,;\quad C_{n-1}^{i}=\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}. \tag{3.11}$$

情形 1 如果对任意的 $j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 都有 $a_j\neq 0\ (j=1,2,\cdots,n-1)$.
一方面

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{f+\frac{a_{n-1}}{n-1}})\le N(r,\frac{1}{\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)}})+N(r,\frac{1}{q(z)}),\\&T(r,\frac{f^{(k)}(z+c)}{f(z)})+N(r,\frac{1}{q(z)})=S(r,f).\end{aligned}$$

另一方面, 由 Nevanlinna 第二基本定理

$$\begin{aligned}T(r,f)&\le\overline{N}(r,\frac{1}{f+\frac{a_{n-1}}{n-1}})+\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)})+\overline{N}(r,f(z))\\&=\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)})+S(r,f).\end{aligned}$$

因此 $\overline{\lambda}(f)=\sigma(f)$.

情形 2 如果存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$. 由 (3.11) 式得 $a_{i_0}=a_{n-1}=\cdots=a_{i_0+1}=a_{i_0-1}=\cdots=a_1=0$. 再由定理 1.2(ii) 知 $\lambda(f)<\sigma(f)$.

(iv) 假设 $f(z)$ 是方程 (1.7) 的有穷级非零整函数解.

充分性 假设 $P(z)\equiv 0$ 且存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$. 由定理 1.2 (iii) 知 $f\in\Gamma_0'$.

必要性 由于 $f\in\Gamma_0'$, 可设 $f(z)=A(z)e^{\alpha(z)},A(z),\alpha(z)$ 是多项式且满足 $\sigma(A(z))=\lambda(f)<\sigma(f)=\deg(Q(z))$. 则 0 是 $f(z)$ 的一个 Borel 例外值, 由定理 1.4 (ii) 知 $a_{n-1}=\cdots=a_1=0\equiv P(z)$.

(v) 假设 $f(z)$ 是方程 (1.7) 的有穷级非零整函数解, 由定理 1.4 (i) 知 f 是超越的. 由已知必有 $P(z)\equiv 0$. 否则, 如果 $P(z)\not\equiv 0$, 由引理 2.3 和已知 $\mathrm{card}\{z:P_1(z)=P_1'(z)=P_1''(z)=0\}\geq 1$ 或者 $\mathrm{card}\{z:P_1(z)=P_1'(z)=0\}\geq 2$, 有不等式

$$\begin{aligned}
nT(r,f)=&T(r,f^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f)\\
\leq&\overline{N}(r,\frac{1}{f^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f-P(z)})+\overline{N}(r,\frac{1}{f^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f})\\
&+\overline{N}(r,f^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f)\\
\leq&N(r,\frac{1}{q(z)f^{(k)}(z+c)})+(n-2)T(r,f)\\
\leq&N(r,\frac{1}{q(z)})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z+c)})+(n-2)T(r,f)\\
\leq&N(r,\frac{1}{f(z+c)})+k\overline{N}(r,f(z+c))+S(r,f(z+c))+(n-2)T(r,f)+S(r,f)\\
\leq&N(r,\frac{1}{f(z+c)})+S(r,f(z+c))+(n-2)T(r,f)\\
\leq&N(r,\frac{1}{f(z)})+S(r,f)+(n-2)T(r,f)\\
\leq&(n-1)T(r,f)+S(r,f),
\end{aligned}$$

得 $T(r,f)=S(r,f)$, 矛盾, 所以 $P(z)\equiv 0$. 又因为存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $a_{i_0}=0$. 由定理 1.4 (iv) 可得 $P(z)\equiv 0=a_1(z)=\cdots=a_{n-1}$ 且 $f(z)\in\Gamma_0'$.

(vi) 如果 $f,g\in\Gamma_0'$ 且是方程 (1.7) 的有穷级整函数解, 由定理 1.4 (iv) 得 $P(z)\equiv 0$ 且 $a_{n-1}=\cdots=a_1=0$. 又由定理 1.2 (iv) 知 $f=\eta g$ 且 $\eta^{n-1}=1$.

定理 1.5 的证明

由引理 2.10, 引理 2.11, 引理 2.12 可得定理 1.5 的证明.

定理 1.6 的证明

(i) 假设 $f(z)$ 是方程 (1.9) 的有穷级非零整函数解, 由 (1.9) 式得

$$\frac{f(z)-P(z)}{f^{(k)}(z+c)}=-q(z)e^{Q(z)}.$$

由增长级的性质和引理 2.4 得 $\deg(Q(z))\leq\max\{\sigma(f(z)-P(z)),\sigma(f^{(k)}(z+c))\}=\sigma(f)$.

(ii) 由于 $\sigma(f)\geq\deg(Q(z))$ 且 $Q(z)$ 是非常数多项式, 可得 $f(z)$ 是超越的. 否则有 $\lambda(f)<\sigma(f)$. 因此 $f(z)$ 是正规增长的, 有

$$N(r,\frac{1}{f(z)})=S(r,f).\tag{3.12}$$

又 (1.9) 式可变形为 $f(z)-P(z)=-q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c)$. 由引理 2.3, (3.12) 式和文献 [6, 定

理 1.24] 得

$$
\begin{aligned}
N(r,\frac{1}{f(z)-P(z)}) &= N(r,\frac{1}{q(z)f^{(k)}(z+c)}) \\
&\leq N(r,\frac{1}{q(z)})+N(r,\frac{1}{f^{(k)}(z+c)}) \\
&\leq N(r,\frac{1}{f(z+c)})+k\overline{N}(r,f(z+c))+S(r,f(z+c))+S(r,f) \\
&\leq N(r,\frac{1}{f(z+c)})+S(r,f(z+c))+S(r,f) \\
&\leq N(r,\frac{1}{f(z)})+S(r,f)=S(r,f). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

如果 $P(z)\not\equiv 0$, 由 (3.12), (3.13) 式和 Nevanlinna 第二基本定理得

$$T(r,f)\leq \overline{N}(r,\frac{1}{f(z)})+\overline{N}(r,\frac{1}{f(z)-P(z)})+S(r,f)=S(r,f),$$

与假设矛盾, 所以有 $\lambda(f)=\sigma(f)$.

(iii) 反证法: 假设 $f(z)$ 是方程 (1.9) 的具 (1.6) 形式的指数多项式解, 满足 $q=\deg(Q(z))$. 把 (1.9) 式改写为

$$\frac{1}{q(z)}\cdot\frac{f(z)}{f^{(k)}(z+c)}=-e^{Q(z)}. \qquad (3.14)$$

由 (3.14) 式, 引理 2.8, 注 4, 差分对数导数引理得

$$
\begin{aligned}
&\frac{|b_q|}{\pi}+o(r^q)=T(r,e^{Q(z)})=m(r,e^{Q(z)}) \\
\leq& m(r,\frac{1}{q(z)})+m(r,\frac{f(z)}{f^{(k)}(z+c)})=S(r,f)=o(r^q),
\end{aligned}
$$

矛盾.

参 考 文 献

[1] Li N, Yang L Z. Solutions of nonlinear difference equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2017, 452: 1128–1144.

[2] Liu K. Exponential polynomials as solutions of differential-difference equations of certain types[J]. J. Med. Math., 2016, 13: 3015–3027.

[3] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[4] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[5] Yang L. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[6] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Dutch: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[7] Chiang Y M, Feng S J. On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2009, 361(7): 3767–3791.

[8] Halburd R G, Korhonen R J. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 314(2): 477–487.

[9] Halburd R G, Korhonen R J. Nevanlinna theory for the difference operator[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 2006, 31: 463–478.

[10] Liu K, Cao T, Cao H. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations[J]. Arch. Math. (Basel), 2012, 99(2): 147–155 .

[11] Liu K, Yang L Z. On entire solutions of some complex differential-difference equations[J]. Comput. Meth. Funct. Theory., 2013, 13: 433–447.

[12] Liu K, Dong X J. Some results related to complex differential-difference equations of certain types[J]. Bull. Korean. Math. Soc., 2014, 51(5): 1453–1467.

[13] Yang C C, Laine I. On analogies between nonlinear difference and differential equations[J]. Proc. Japan. Acad. Ser. A. Math. Sci., 2010, 86(1): 10–14.

[14] Wen Z T, Heittokangas J, Laine I. Exponential polynomials as solutions of certain nonlinear differential equations[J]. Acta. Math. Sin., 2012, 28(7): 1295–1306.

[15] Halburd R G, Korhonen R J, Tohge K. Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2014, 366: 4267–4298.

[16] Chen Z X. Complex difference and difference equations[M]. Beijing: Science Press, 2014.

[17] Korhonen R J. An extension of Picard theorem for meromorphic functions of small hyper-order[J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 357: 244–253.

[18] Steinmetz N. Zur werverteilung von exponential polynomal[J]. Manuscripta. Math., 1978, 26(1-2): 155–167.

SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

ZHANG Shi-mei[1], LONG Jian-ren[1,2], WU Xiu-bi[1,3]

(*1.School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China*)

(*2.School of Computer Science; School of Science,*
Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

(*3.School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China*)

Abstract: In this paper, we study the growth and distribution of zeros of entire solutions of finite order of nonlinear differential-difference equation $f(z)^n + a_{n-1}f(z)^{n-1} + \cdots + a_1 f(z) + q(z)e^{Q(z)}f^{(k)}(z+c) = P(z)$. By using the differential-difference Nevanlinna values distribution theory, we obtain an estimation of the growth and the distribution of zeros of solutions of the differential-difference equation if there are some attached condiction on the coefficients. Particularly, when $n = 2$ and $a_1 \neq 0$, we obtain that exponential polynomial solutions satisfying some condictions must reduce to rather specific forms, which improves the results of [1, 2] .

Keywords: differential-difference equation; exponential polynomial; finite order

2010 MR Subject Classification: 39A10; 30D35