Vol. 38 ( 2018 )
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# Gateaux 可微条件下 E - 凸规划问题的解集刻画

李 均, 彭建文, 刘学文
(重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331)

**摘 要**: 本文研究了 E - 凸函数在 Gateaux 可微条件下 Gateaux 导数与 E - 次微分之间的关系, 获得了 E - 凸规划问题最优解的必要条件. 给出了 E - 凸规划问题的最优解集刻画.

**关键词**: E - 凸函数; E - 凸规划; Gateaux 可微; 解集刻画
MR(2010) **主题分类号**: 90C26; 90C30 **中图分类号**: O221.2
**文献标识码**: A **文章编号**: 0255-7797(2018)06-1097-10

## 1 引言

凸性条件无论是在数学还是经济、工程以及管理科学等领域, 都起着至关重要的作用. 然而现实生活中大部分的实际问题却难以满足凸性假设, 因此广义凸性的研究就显得尤为必要. 1999 年, Youness 在文献 [1] 中给出了如下的 E - 凸集、E - 凸函数的概念.

**定义 1.1** [1] 称 $M \subset X$ 为 E - 凸集, 如果存在映射 $E: X \to X$, $\forall t \in [0,1]$ 满足

$$tEx + (1-t)Ey \in M, \ \ \forall x, y \in M.$$

**定义 1.2** [1] 称 $f: X \to R$ 为集合 $M \subset X$ 上的 E - 凸函数, 如果存在映射 $E: X \to X$, 使得 $M$ 为 E - 凸集, 且 $\forall t \in [0,1]$ 有

$$f(tEx + (1-t)Ey) \leq tf(Ex) + (1-t)f(Ey), \ \ (\forall x, y \in M).$$

**注 1.1** 如果没有特别说明, 本文假设 $X$ 代表赋范线性空间, $X^*$ 为其对偶空间, 集合 $M \subset X$ 均为开集. 为了写作方便, 本文中将 $E(x)$ 都简写为 $Ex$. 当 $E = I$ (单位映射) 时, 定义 1.1、定义 1.2 分别退化为文献 [2] 中凸集、凸函数的定义.

Youness 在文献 [1] 中对 E - 凸函数性质进行了初步探索, Yang[3] 和 Chen [4] 举例说明了文献 [1] 中定理 4.2、定理 4.3、定理 4.6 是错误的. 最近, Youness 在文献 [5] 中研究了如下带不等式约束的 E - 凸规划数学模型, 简记为 $(\mathrm{COP})_E$:

$$\begin{aligned} &\min f(Ex) \\ &\text{s.t. } \ S = \{x \in X | g_i(Ex) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}, \end{aligned}$$

其中 $f, g_i: X \to R \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 都是 $X$ 上的 E - 凸函数.

*收稿日期: 2017-11-29 接收日期: 2018-02-23
基金项目: 重庆市基础科学与前沿技术研究重点项目基金资助 (cstc2015jcyjBX0029); 最优化与控制省部共建教育部重点实验室; 重庆市高等学校巴渝学者特聘教授项目资助.
作者简介: 李均 (1992–), 男, 重庆, 硕士, 主要研究方向: 最优化理论及其应用.
通讯作者: 彭建文.

在文献 [5] 中, Youness 给出了多目标 E - 凸规划问题有效解的性质刻画. 众所周知, 在凸优化问题的研究中, 次微分是一种重要的研究工具, Rockafellar 在文献 [6] 中给出了凸函数次梯度的定义.

**定义 1.3** [6] 称 $\xi \in X^*$ 为凸函数 $f : X \to R$ 在 $x \in X$ 处的次梯度, 如果

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle\,,\ \forall y \in X.$$

$f$ 在 $x$ 处的次梯度的全体称为 $f$ 在 $x$ 处的次微分, 记为 $\partial f(x)$.

**注 1.2** 根据定义 1.3, 对任意 $y \in X$, 显然有

$$\xi \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle\,.$$

李成林等人在文献 [7] 中, 利用 Clarke 的思想给出了 E - 凸函数 E - 次微分的定义及其等价刻画.

**定义 1.4** [7] 若 $M$ 是 $X$ 中的 E - 凸集, $f : M \to R$ 且 $x \in M \cap \mathrm{dom}(f)$, 称 $\xi \in X^*$ 是 $f$ 在 $Ex$ 处的 E - 次梯度, 如果存在 $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, 使得 $\forall Ey \in B(Ex, \eta) \subset M$, 有

$$f(Ey) \geq f(Ex) + \langle \xi, Ey - Ex \rangle - \varepsilon ||Ey - Ex||^2.$$

$f$ 在 $Ex$ 处的 E - 次梯度的全体称为 $f$ 在 $Ex$ 处的 E - 次微分, 记为 $\partial_E f(Ex)$.

**定理 1.1** [7] 若 $f$ 是 E - 凸集 $M \subset X$ 上的 E - 凸函数, 则 $\forall x, y \in M$, 有

$$\xi \in \partial_E f(Ex) \Leftrightarrow f(Ey) \geq f(Ex) + \langle \xi, Ey - Ex \rangle\,.$$

史树中在文献 [2] 中给出了函数的左、右方向导数及 Gateaux 可微的定义.

**定义 1.5** [2] $f : X \to R$ 是实值函数, $x \in X, d \in X$,

(1) 如果 $f'_+(x; d) = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$ 存在, 就称其为函数 $f$ 在 $x$ 处沿方向 $d$ 的右方向导数;

(2) 如果 $f'_-(x; d) = \lim\limits_{t \to 0^-} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$ 存在, 就称其为函数 $f$ 在 $x$ 处沿方向 $d$ 的左方向导数;

(3) 如果 $f'_+(x, d) = f'_-(x, d)$, 即 $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$ 存在, 就称其为函数 $f$ 在 $x$ 处沿方向 $d$ 的方向导数, 记作 $f'(x, d)$.

**定义 1.6** [2] 设 $f : X \to R$ 是实值函数, $x \in X$, 若 $f'(x; d)$ 对任意方向 $d$ 都存在, 且存在 $\delta \in X^*$ 使得 $f'(x; d) = \langle \delta, d \rangle\,, \forall d \in X$. 那么称 $f$ 在 $x$ 处 Gateaux 可微, 并称 $\delta$ 为 $f$ 在 $x$ 处的 Gateaux 导数, 记作 $\delta = \nabla f(x)$.

**注 1.3** 文献 [8] 中给出了这样的结论: 若凸函数 $f : X \to R$ 在 $x \in X$ 处 Gateaux 可微, 则有 $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

姜艮等人在文献 [9] 中给出了 E-Gateaux 可微的定义.

**定义 1.7** [9] 若 $M$ 是赋范线性空间 $X$ 中的 E - 凸集, $f : M \to R$ 是 $M$ 上的 E - 凸函数且 $x \in M \cap \mathrm{dom}(f)$, 称 $f$ 在 $Ex$ 处 E-Gateaux 可微, 若有 $\delta \in X^*$, 使得 $f'(Ex; d) = \langle \delta, d \rangle\,, \forall d \in E(X)$. 若 $f$ 在 $Ex$ 处 E-Gateaux 可微, 并称 $\delta$ 为 $f$ 在 $Ex$ 处的 E-Gateaux 导数, 记作 $\delta = \nabla_E f(Ex)$.

在文献 [9] 中, 姜艮等人得到了如下的结论.

**定理 1.2** [9] 若 $X$ 是赋范线性空间, $M$ 是 $X$ 上的 E - 凸集, $f: M \to R$ 是 $M$ 上的 E - 凸函数且 $x \in M \cap \mathrm{dom}(f)$, 如果 $f$ 在 $Ex$ 处 E-Gateaux 可微, 则 $\partial_E f(Ex) = \{\nabla_E f(Ex)\}$.

**定理 1.3** [9] 若 $x^*$ 是 $(\mathrm{COP})_E$ 的解, 如果 $f$ 在 $Ex^*$ 处 E-Gateaux 可微, 则 $\forall x \in S$, 则有 $\langle \nabla_E f(Ex^*), Ex - Ex^* \rangle \geq 0$.

定理 1.2 和定理 1.3 是文献 [9] 的基础性定理, 文献 [9] 中的其他结论都是基于这两个结论建立的, 本文将举例说明这两个结论都是不正确的, 并进一步研究如下的 E - 凸规划问题

$$(\mathrm{OP})_E \begin{cases} \min & f(Ex), \\ \text{s.t.} & x \in M \end{cases}$$

在 Gateaux 可微条件下最优解集的性质定理及最优解集等价刻画, 其中 $f: M \to R$ 是 E - 凸函数.

## 2 主要内容

在定理 1.2 的证明中有

$$\langle \nabla_E f(Ex), Ez \rangle \geq \langle \xi, Ez \rangle, \text{由}Ez\text{的任意性知} \Longrightarrow \xi = \nabla_E f(Ex). \tag{2.1}$$

式 (2.1) 显然是错误的, 因为 $Ez$ 只能取遍 $E(M)$, 不一定能取遍全空间 $X$. 下面例 2.1 说明式 (2.1) 是错误的.

**例 2.1** 令 $X = R^2, M = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 映射 $E: X \to X$ 定义如下:

$$E(x,y) = \begin{cases} (y,y), & 0 \leq x \leq y, \\ (1,y), & x > y, \\ (0,0), & x \leq y < 0 \text{ 或 } x \leq 0 \leq y. \end{cases}$$

函数 $f: X \to R$ 定义为 $f(x,y) = c$ (常数). 容易验证 $M$ 为 E - 凸集, $f$ 为 $M$ 上的 E - 凸函数. $\forall \lambda \in R$, 有 $d = (1,\lambda) \in E(X)$. 令 $z_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 则 $Ez_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 对 $z = (x,y) \in M$, 下面利用定理 1.1 和定义 1.7 分别求出 $\partial_E f(Ez_1)$ 和 $\nabla_E f(Ez)$. 先计算 $\partial_E f(Ez_1)$, 这里分 2 种情况讨论.

**情形 1** 当 $x \leq y$ 时, 则 $Ez = (y,y)$, 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, 由定理 1.1, 要使得 $\xi \in \partial_E f(Ez_1)$, $\xi$ 必须满足

$$f(Ez) \geq f(Ez_1) + \langle \xi, Ez - Ez_1 \rangle. \tag{2.2}$$

从而有

$$c \geq c + (\xi_1 + \xi_2)(y - \frac{1}{2}).$$

由 $y \in (0,1)$ 的任意性, 可以得到

$$\xi_1 + \xi_2 = 0. \tag{2.3}$$

**情形 2** 当 $x > y$ 时, 则 $Ez = (1,y)$, 设 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, 由定理 1.1, 要使得 $\xi \in \partial_E f(Ez_1)$, $\xi$ 必须满足式(2.2), 于是有

$$\frac{1}{2}\xi_1 + \xi_2(y - \frac{1}{2}) \leq 0. \tag{2.4}$$

结合式 (2.3) 和式 (2.4) 可求得满足式 (2.2) 的 $\xi$ 必须满足下面的条件:

$$(y-1)\xi_2 \leq 0.$$

又因为 $y \in (0,1)$, 所以 $\xi \in \partial_E f(Ez_1)$ 必须满足 $\xi_2 \geq 0$ 且 $\xi_1+\xi_2=0$. 故

$$\partial_E f(Ez_1)=\{\xi=(\xi_1,\xi_2):\xi_2\geq 0,\xi_1+\xi_2=0\}. \tag{2.5}$$

再计算 $\nabla_E f(Ez_1)$. 根据定义 1.7, 设 $\delta=(\delta_1,\delta_2)$, 要使 $\delta=\nabla_E f(Ez_1)$, 必须满足下面的条件:

$$f'(Ez_1;d)=\langle \delta, d\rangle,$$

即 $0=\delta_1+\delta_2\lambda,\ \forall\lambda\in R$. 所以 $\delta=(0,0)$, 故

$$\nabla_E f(Ez_1)=(0,0). \tag{2.6}$$

由式 (2.5) 和式 (2.6) 知 $\{\nabla_E f(Ez_1)\}\neq \partial_E f(Ez_1)$.

在定理 1.2 的证明中使用了如下语句

$$\text{因为} f \text{在} Ex \text{处 E-Gateaux 可微} \Longrightarrow f'(Ex;Ey-Ex)=\langle \nabla_E f(Ex), Ey-Ex\rangle. \tag{2.7}$$

并由式 (2.7) 证得 $\nabla_E f(Ex)\in\partial_E f(Ex)$, 但是式 (2.7) 是错误的, 其原因在于 $Ey-Ex\in E(X)$ 一般不成立. 下面例 2.2 说明式 (2.7) 是不正确的.

**例 2.2** 令 $X=R^2, M=\{(x,y):-1<x<3,-1<y<3\}$, 函数 $f:X\to R$, 映射 $E:X\to X$ 分别定义如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} x(x-2), & y\neq 0,\\ x(x-2), & y=0 \text{ 且 } x<0,\\ 0, & y=0 \text{ 且 } 0\leq x\leq 2,\\ (x-2)^2, & y=0 \text{ 且 } x>2;\end{cases}$$

$$E(x,y)=\begin{cases} (0,y), & 0\leq x\leq y \text{ 或 } x<0\leq y,\\ (0,0), & x\leq 0 \text{ 且 } y\leq 0,\\ (x,0), & 0<x\leq 2 \text{ 且 } x>y,\\ (2,0), & x>2 \text{ 且 } x>y.\end{cases}$$

容易验证 $M$ 为 E 凸集, $f$ 为 $M$ 上的 E 凸函数, $d=(2,0)$或$d=(0,\lambda)$, $(\lambda\in R_+)$ 为 $E(X)$ 中的任意方向. 这里特别取 $z_1=(2,1)$, 则 $Ez_1=(2,0)$, 显然可得 $f$ 在 $Ez_1$ 处 E-Gateaux 可微且 $\nabla_E f(Ez_1)=(0,0)$. 令 $z_2=(1,2)$, 则 $Ez_2=(0,2)$, 此时 $Ez_2-Ez_1=(-2,2)\notin E(X)$, 而

$$\begin{aligned}\langle \nabla_E f(Ez_1), Ez_2-Ez_1\rangle &=0,\\ f(Ez_1;Ez_2-Ez_1) &=\lim_{t\to 0}\frac{f((2,0)+t(-2,2))-f(2,0)}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{f(2-2t,2t)-f(2,0)}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{(2-2t)(-2t)}{t}\\ &=-4.\end{aligned}$$

显然 $f'(Ez_1; Ez_2 - Ez_1) \neq \langle \nabla_E f(Ez_1), Ez_2 - E_1 \rangle$.

定理 1.2 可以被纠正为如下的结论.

**定理 2.1** $X$ 是赋范线性空间, $M$ 是 $X$ 上的 E - 凸集, $f: M \to R$ 是 $M$ 上的 E - 凸函数且 $x \in M \cap \mathrm{dom}(f)$, 如果 $f$ 在 $Ex$ 处 Gateaux 可微, 则 $\nabla f(Ex) \in \partial_E f(Ex)$.

**证** 因为 $f$ 在 $Ex$ 处 Gateaux 可微, 由定义 1.6, 则有

$$f'(Ex; Ey - Ex) = \langle \nabla f(Ex), Ey - Ex \rangle \, , \, \forall y \in M. \tag{2.8}$$

又因为 $f: M \to R$ 是 $M$ 上的 E - 凸函数, 则有

$$f((1-t)Ex + tEy) \leq (1-t)f(Ex) + tf(Ey), \ \ \forall t \in (0,1],$$

即

$$\frac{f(Ex + t(Ey - Ex)) - f(Ex)}{t} \leq f(Ey) - f(Ex).$$

在上式中取 $t \to 0^+$, 则有

$$f'(Ex; Ey - Ex) \leq f(Ey) - f(Ex). \tag{2.9}$$

于是由式 (2.8) 和式 (2.9) 知

$$\langle \nabla f(Ex), Ey - Ex \rangle \leq f(Ey) - f(Ex), \, \forall y \in M. \tag{2.10}$$

由定理 1.1, 故 $\nabla f(Ex) \in \partial_E f(Ex)$.

**注 2.1** 若 $f$ 在 $Ex$ 处 Gateaux 可微, $\partial_E f(Ex) = \{\nabla f(Ex)\}$ 不一定成立. 在例 2.1 中, 函数 $f$ 在 $Ez_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 处 Gateaux 可微, 且 $\nabla f(Ez_1) = (0,0)$, 但是 $f$ 在 $Ez_1$ 处的 E - 次微分是

$$\partial_E f(Ez_1) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_2 \geq 0, \xi_1 + \xi_2 = 0\}.$$

在定理 1.3 的证明中存在: $x^*$ 是 $(\mathrm{COP})_E$ 的解, 则对 $t \in [0,1]$, 有

$$f(Ex^* + t(Ex - Ex^*)) - f(Ex^*) \geq 0.$$

该结论是不正确的, 其原因是这里并未能保证 $Ex^* + t(Ex - Ex^*) \in E(S)$. 下面的例 2.2 说明定理 1.3 是错误的.

**例 2.3** 令 $X = R$, 函数 $f, g: X \to R$, 映射 $E: X \to X$ 分别定义为

$$f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2, \\ -x+1, & 1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ x-2, & \frac{3}{2} < x < 2, \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} x, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \leq 1, \\ 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

这里 E - 凸规划问题 $(\mathrm{COP})_E$ 为

$$\begin{aligned}&\min f(Ex),\\&\text{s.t.}\quad g(Ex)=0.\end{aligned}$$

容易验证函数 $f,g$ 都是 $X$ 上的 E - 凸函数, $E(X)$ 中的方向只有 $d=1$, 且可求得 $(\mathrm{COP})_E$ 问题可行域 $S=\{x\in R: x\le 1\text{或}x\ge 2\}$. 经验证 $x=1$ 或 $x=2$ 为 $(\mathrm{COP})_E$ 问题的最优解. 这里特别取 $x^*=2$ 为 $(\mathrm{COP})_E$ 问题的一个最优解, 根据定义 1.7 可以求得 $\nabla_E f(Ex^*)=1$. 但是存在点 $x=1$, 则 $Ex=1$, 使得 $\langle\nabla_E f(Ex^*), Ex-Ex^*\rangle=1\times(1-2)=-1<0$. 从而知定理 1.3 的结论不一定成立.

文献 [10] 中介绍了可行方向锥的概念, 这里给出 E - 可行方向锥的概念.

**定义 2.1** 集合 $M\subset X$ 为 E - 凸集, $x\in M$, 记 $Ex$ 处的 E - 可行方向锥为

$$D(Ex)=\{d\in X: d\neq 0, \exists\beta>0, \forall\alpha\in(0,\beta), \text{ 有 } Ex+\alpha d\in E(M)\}.$$

将定理 1.3 纠正为如下的定理.

**定理 2.2** 若 $x^*$ 是 $(\mathrm{OP})_E$ 的解, $f$ 在 $Ex^*$ 处 Gateaux 可微, 且对 $x\in M$, 有 $Ex-Ex^*\in D(Ex^*)$, 则 $\langle\nabla f(Ex^*), Ex-Ex^*\rangle\ge 0$.

**证** 因为 $x^*$ 是 $(\mathrm{OP})_E$ 的解, $Ex-Ex^*\in D(Ex^*)$, 则存在 $\beta>0$, 使得 $\forall t\in(0,\beta)$, 有 $Ex^*+t(Ex-Ex^*)\in E(M)$ 且 $f(Ex^*+t(Ex-Ex^*))-f(Ex^*)\ge 0$. 又因为 $f$ 在 $Ex^*$ 处 Gateaux 可微, 则有

$$\begin{aligned}\langle\nabla f(Ex^*), Ex-Ex^*\rangle&=f'(Ex^*;Ex-Ex^*)\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(Ex^*+t(Ex-Ex^*))-f(Ex^*)}{t}\ge 0.\end{aligned}$$

即 $\langle\nabla f(Ex^*), Ex-Ex^*\rangle\ge 0$.

用下面的例子来说明定理 2.2 的合理性.

**例 2.4** 这里取 $M=R$, 函数 $f$ 与映射 $E$ 分别定义如下

$$\begin{aligned}&f(x)=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4},\\&E(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\text{或}x\ge 2,\\0, & 1<x<2.\end{cases}\end{aligned}$$

易知 $x=1$ 或者 $x=2$ 为 $(\mathrm{OP})_E$ 的最优解, 下面讨论 $x^*$ 分别取 1 和 2 时的情况.

**情形 1** 当 $x^*=1$ 时, 则 $Ex^*=1$, $f$ 在 $Ex^*=1$ 处 Gateaux 可微且 $\nabla f(Ex^*)=-1$, 此时可求得 $f$ 在 $Ex^*$ 处的可行方向锥为 $D(Ex^*)=\{d\in X: d<0\}$. 当 $x<2$ 且 $x\neq 1$ 时, 有 $Ex-Ex^*\in D(Ex^*)$, 因此 $\langle\nabla f(Ex^*), Ex-Ex^*\rangle\ge 0$.

**情形 2** 当 $x^*=2$ 时, 则 $Ex^*=2$, $f$ 在 $Ex^*=2$ 处 Gateaux 可微且 $\nabla f(Ex^*)=1$, 此时可求得 $f$ 在 $Ex^*$ 处的可行方向锥为 $D(Ex^*)=\{d\in X: d>0\}$. 当 $x>2$ 时, 有 $Ex-Ex^*\in D(Ex^*)$, 因此 $\langle\nabla f(Ex^*), Ex-Ex^*\rangle\ge 0$.

下面给出 E - 凸规划问题 $(\mathrm{OP})_E$ 的一个性质定理.

**定理 2.3** 若 $f: M \to R$ 上 E - 凸函数, $\overline{S}$ 为 $(\mathrm{OP})_E$ 规划的最优解集, $x^* \in \overline{S}$ 且满足 $f$ 在 $Ex^*$ 处 Gateaux 可微且 $\forall z \in M$都有$Ez - Ex^* \in D(Ex^*)$, 则 $\nabla f(Ex^*) \in \bigcap\limits_{x \in \overline{S}} \partial_E f(Ex)$.

**证** 因为 $f$ 在 $Ex^*$ 处 Gateaux 可微, 由定理 2.1 可得 $\nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex^*)$. 又由定理 2.2, 有

$$f(Ez) - f(Ex^*) \geq \langle \nabla f(Ex^*), Ez - Ex^* \rangle \geq 0,\ \forall z \in M.$$

取 $z = x$, 则 $\langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^* \rangle = 0$, 由上式知, $\forall y \in M$, 有

$$\begin{aligned} f(Ey) - f(Ex) &= f(Ey) - f(Ex^*) \\ &\geq \langle \nabla f(Ex^*), Ey - Ex^* \rangle \\ &= \langle \nabla f(Ex^*), Ey - Ex \rangle. \end{aligned}$$

由定理 1.1 可得 $\nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex)$. 因此 $\nabla f(Ex^*) \in \bigcap\limits_{x \in \overline{S}} \partial_E f(Ex)$.

**定理 2.4** 若 $M$ 是赋范线性空间 $X$ 中的 E - 凸集, 且 $f: M \to R$ 是 $M$ 上的 E - 凸函数, 则 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5), 其中 (1), (2), (3), (4), (5) 的定义分别为

(1) 存在 $\xi_1 \in \partial_E f(Ex)$, $\xi_2 \in \partial_E f(Ey)$, 满足 $\langle \xi_1, Ex - Ey \rangle = 0, \langle \xi_2, Ex - Ey \rangle = 0$;

(2) 存在 $\xi_1 \in \partial_E f(Ex)$, $\xi_2 \in \partial_E f(Ey)$, 满足 $\langle \xi_1 - \xi_2, Ex - Ey \rangle \leq 0$;

(3) $\partial_E f(Ex) \cap \partial_E f(Ey) \neq \phi$;

(4) 存在 $\xi_1 \in \partial_E f(Ex)$, $\xi_2 \in \partial_E f(Ey)$, 满足

$$\{d \in X : \langle \xi_1, d \rangle \geq 0\} = \{d \in X : \langle \xi_2, d \rangle \geq 0\};$$

(5) 存在 $\xi_1 \in \partial_E f(Ex)$, $\xi_2 \in \partial_E f(Ey)$, 满足

$$\begin{aligned} \langle \xi_1, Ex - Ey \rangle \geq 0 &\Leftrightarrow \langle \xi_2, Ex - Ey \rangle \geq 0; \\ \langle \xi_1, Ey - Ex \rangle \geq 0 &\Leftrightarrow \langle \xi_2, Ey - Ex \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

进一步, 若 $x, y$ 是 $(OP)_E$ 的解, $f$ 在点 $Ex, Ey$ 处 Gateaux 可微且 $Ex - Ey \in D(Ey), Ey - Ex \in D(Ex)$, 则 (5) $\Rightarrow$ (1).

**证** (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 可以参见文献 [9] 的定理 2.3, 这里 (4) $\Rightarrow$ (5) 直接取 $d = Ex - Ey$ 即可. 下证 (5) $\Rightarrow$ (1).

因为 $f$ 在 $Ex, Ey$ 处 Gateaux 可微且 $Ex - Ey \in D(Ey), Ey - Ex \in D(Ex)$, 根据定理 2.2 有

$$\langle \nabla f(Ex), Ey - Ex \rangle \geq 0, \langle \nabla f(Ey), Ex - Ey \rangle \geq 0. \tag{2.11}$$

又因为 $x, y$ 是 $(\mathrm{OP})_E$ 的解, 再由定理 1.1 和定理 2.1, 则

$$\langle \nabla f(Ex), Ey - Ex \rangle \leq f(Ey) - f(Ex) = 0, \tag{2.12}$$

$$\langle \nabla f(Ey), Ex - Ey \rangle \leq f(Ex) - f(Ey) = 0. \tag{2.13}$$

由式 (2.11)–(2.13) 可知, 这里取 $\xi_1 = \nabla f(Ex)$, $\xi_2 = \nabla f(Ey)$ 即满足 (1).

最后给出 E - 凸规划问题 $(\mathrm{OP})_E$ 最优解集的几种等价刻画.

**定理 2.5** 若 $f : M \to R$ 上 E - 凸函数, $\overline{S}$ 为 $(\mathrm{OP})_E$ 规划的最优解集, $x^* \in \overline{S}$ 且满足 $f$ 在 $Ex^*$ 处 Gateaux 可微且 $\forall z \in M$都有$Ez - Ex^* \in D(Ex^*)$, 定义

$$M^* = \{x \in M : \exists \xi \in \partial_E f(Ex) \text{ s.t. } \{d \in X : \langle \xi, d\rangle \geq 0\} = \{d \in X : \langle \nabla f(Ex), d\rangle \geq 0\}\},$$

则 $\overline{S} = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$, 其中

$$\begin{aligned}
&S_1 = \{x \in M : \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle = 0, \nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex)\};\\
&S_2 = \{x \in M^* : \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle = 0\};\\
&S_3 = \{x \in M : \exists \xi \in \partial_E f(Ex) \text{ s.t. } \langle \xi, Ex - Ex^*\rangle = \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle = 0\};\\
&S_4 = \{x \in M : \exists \xi \in \partial_E f(Ex) \text{ s.t. } \langle \xi, Ex - Ex^*\rangle = 0\};\\
&S_5 = \{x \in M : \exists \xi \in \partial_E f(Ex) \text{ s.t. } \langle \xi, Ex - Ex^*\rangle \leq 0\}.
\end{aligned}$$

**证** 首先证明 $S_3 = S_4 = S_5$. 根据定义, $S_3 \Rightarrow S_4 \Rightarrow S_5$ 显然成立.

下证 $S_5 \subset S_3$, 若 $x \in S_5$, 存在 $\xi \in \partial_E f(Ex)$ 使得 $\langle \xi, Ex - Ex^*\rangle \leq 0$ 由定理 1.1, 定理 2.1 和定理 2.2, 有

$$0 \geq \langle \xi, Ex - Ex^*\rangle \geq f(Ex) - f(Ex^*) \geq \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle \geq 0,$$

所以 $S_5 \subset S_3$, 故

$$S_3 = S_4 = S_5. \tag{2.14}$$

下证 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset S_1$. $\forall x \in S_1$, 有

$$\langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle = 0, \nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex).$$

取 $\xi = \nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex)$, 则

$$\{d \in X : \langle \xi, d\rangle \geq 0\} = \{d \in X : \langle \nabla f(Ex^*), d\rangle \geq 0\},$$

由 $M^*$ 定义可得, $x \in M^*$, 因此

$$S_1 \subset S_2. \tag{2.15}$$

$\forall x \in S_2$, 有 $x \in M^*$,

$$\langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle = 0 = \langle \nabla f(Ex^*), Ex^* - Ex\rangle,$$

由 $M^*$ 的定义则存在 $\xi \in \partial_E f(Ex)$,

$$\begin{aligned}
&\{d \in X : \langle \xi, d\rangle \geq 0\} = \{d \in X : \langle \nabla f(Ex^*), d\rangle \geq 0\},\\
&\langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^*\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \xi, Ex - Ex^*\rangle \geq 0,\\
&\langle \nabla f(Ex^*), Ex^* - Ex\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla f(Ex^*), Ex^* - Ex\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \xi, Ex^* - Ex\rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

所以 $\langle \xi, Ex - Ex^*\rangle = 0$, 故

$$S_2 \subset S_3. \tag{2.16}$$

$\forall x \in S_3$, 存在 $\xi \in \partial_E f(Ex)$,

$$\langle \xi, Ex - Ex^* \rangle = \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^* \rangle = 0.$$

对任意的 $y \in M$, 由定理 1.1 及定理 2.1 可得

$$\begin{aligned} f(Ey) - f(Ex) &= f(Ey) - f(Ex^*) + f(Ex^*) - f(Ex) \\ &\geq \langle \nabla f(Ex^*), Ey - Ex^* \rangle + \langle \xi, Ex^* - Ex \rangle \\ &= \langle \nabla f(Ex^*), Ey - Ex^* \rangle \\ &= \langle \nabla f(Ex^*), Ey - Ex \rangle + \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^* \rangle \\ &= \langle \nabla f(Ex^*), Ey - Ex \rangle. \end{aligned}$$

再根据定理 1.1 有

$$\nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex),$$

故

$$S_3 \subset S_1. \tag{2.17}$$

由式 (2.15)–(2.17), 有

$$S_1 = S_2 = S_3. \tag{2.18}$$

再证 $S_5 \subset \overline{S} \subset S_4$.

设 $x \in S_5$, 因为 $x^* \in \overline{S}$, 所以

$$f(Ex) - f(Ex^*) \geq 0.$$

又因为存在 $\xi \in \partial_E f(Ex)$ 使得 $\langle \xi, Ex - Ex^* \rangle \leq 0$, 由定理 1.1 有

$$0 \geq \langle \xi, Ex - Ex^* \rangle \geq f(Ex) - f(Ex^*) \geq 0,$$

所以

$$f(Ex) = f(Ex^*).$$

因此 $x \in \overline{S}$, 故

$$S_5 \subset \overline{S}. \tag{2.19}$$

设 $x \in \overline{S}$, 由定理 2.3 的证明可知

$$\nabla f(Ex^*) \in \partial_E f(Ex) \text{ 且 } \langle \nabla f(Ex^*), Ex - Ex^* \rangle = 0.$$

故

$$\overline{S} \subset S_4. \tag{2.20}$$

由式 (2.19) 和式 (2.20), 有

$$\overline{S} = S_4 = S_5. \tag{2.21}$$

综上, 根据式 (2.14)、式 (2.18) 和式 (2.21), 有

$$\overline{S} = S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5.$$

## 参 考 文 献

[1] Youness E A. E-convex sets, E-convex functions, and E-convex programming[J]. J. Opti. The. Appl., 1999, 102(2): 440–446.

[2] 史树中. 凸分析 [M]. 上海: 上海科技出版社, 1990.

[3] Yang X M. On E-convex sets, E-convex functions, and E-convex programming[J]. J. Opti. The. Appl., 2001, 109(3): 699–704.

[4] Chen X. Some properties of semi-E-convex functions[J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 275(1): 251–262.

[5] Youness E A. Characterization of efficient solutions of multi-objective E-convex programming problems[J]. Appl. Math. Comp., 2004, 151(3): 755–761.

[6] Rockafellar R T. Convex Analysis[M]. United Kingdom: Princeton University Press, 1970.

[7] 李成林, 孔维丽, 黄辉. E - 凸函数的次微分 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2006, 28(5): 369–373.

[8] Mäkelä M M, Neittaanmäki P. Nonsmooth optimization: analysis and algorithms with applications to optimal control[M]. Singapore: World Scientific, 1992.

[9] 姜艮, 刘学文, 王岗等. E - 凸规划问题解集的刻画 [J]. 运筹学学报, 2012, 16(3): 75–83.

[10] Bazaraa M S, Sherali H D, Shetty C M. Nonlinear programming: theory and algorithms[M]. United States: John Wiley & Sons, 2013.

# CHARACTERIZATION OF THE SOLUTION SET OF E-CONVEX PROGRAMMING WITH GATEAUX DIFFERENTIAL

LI Jun, PENG Jian-wen, LIU Xue-wen

(*School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*)

**Abstract:** In this paper, we study the relation between the Gateaux differential of E-convex function and the E-differential, and obtain the necessary condition for the optimal solution of E-convex programming problems. According to these two conclusions, the optimal solution set characterization of E-convex programming problem is shown.

**Keywords:** E-convex function; E-convex programming; Gateaux differential; Characterization of solution set

**2010 MR Subject Classification:** 90C26; 90C30