Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

求一类 $p(t)$-Laplace 中立型微分泛函方程解的存在性

于 美, 马国祯
(西北工业大学理学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 本文研究了一类 $p(t)$-Laplace 中立型微分泛函方程周期解的存在性. 利用 Mawhin 连续性定理的方法, 获得了方程周期解存在性的新结果, 改进了一些已有结果.

关 键 词: 变指数函数空间; 连续性定理; 中立型 $p(t)$-Laplace 泛函微分方程; 周期解
MR(2010) **主题分类号:** 34C25; 34K38 **中图分类号:** O175.6
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2018)06-1082-09

1 引言

近年来, 随着自然科学和工程技术中许多非线性问题的不断出现, Sobolev 空间表现出了其应用范围的局限性. 例如, 对一类有变指数增长条件的非线性问题的研究. 具有变指数增长性条件的非线性问题是一个新兴的研究课题. 在对这类非线性问题进行研究时, 变指数 Lebesgue 空间及 Sobolev 空间发挥着重要的作用 [1−4].

在本文中, 我们主要研究一类 $p(t)$-Laplace 中立型微分泛函方程

$$(\phi_{p(t)}(x(t)-cx(t-\sigma))')'+g(t,x(t-\tau(t)))=e(t) \tag{1.1}$$

周期解的存在性, 其中 $\phi_{p(t)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\phi_{p(t)}(u)=|u|^{p(t)-2}u$, $g\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $1<p^-\le p(t)\le p^+<\infty$ 且 Lipschitz 连续, $\tau(t),e(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的具有周期 T 的函数, $\sigma,c\in\mathbb{R}$ 且 $|c|\ne 1$.

由于指数 $p(t)$ 为函数, $p(t)$-Laplace 算子较之 p-Laplace 具有更复杂的非线性性, 许多对于 p-Laplace 问题成立的方法和结果不再适用于 $p(t)$-Laplace 问题. 本文结合了 Mawhin 连续定理与不等式技巧的应用, 克服了变指数 $p(t)$ 产生的困难, 得到了新的研究成果. 关于常指数增长条件下的周期解存在性的问题, 可参考文献 [5–6].

2 预备知识

首先回忆一些关于变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(t)}(\Omega)$ 的定理 [7].

定义 2.1 设 $\mathcal{P}$ 是所有 Lebesgue 可测函数集, 且 $p:\Omega\to(1,\infty)$. 对于 $p(t)\in\mathcal{P}(\Omega)$, 设

$$\|u\|_{p(t)}=\inf\{\lambda>0:\int_\Omega|\frac{u}{\lambda}|^{p(t)}\,dt\le 1\}.$$

变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(t)}(\Omega)$ 是由一类满足 $\int_\Omega|u(t)|^{p(t)}dt<\infty$ 的函数 u 组成, 且 $L^{p(t)}(\Omega)$ 是由上述范数诱导的 Banach 空间. 定义 $p(t)\in\mathcal{P}(\Omega)$ 的共轭函数 $q(t)$ 为 $q(t)=\frac{p(t)}{p(t)-1}$.

*收稿日期: 2016-03-23 接收日期: 2016-06-02
基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (31300310); 研究生培养过程保障计划 (17GH020212).
作者简介: 于美 (1983–), 女, 辽宁大连, 讲师, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用.

定理 2.2 令 $p \in \mathcal{P}(\Omega)$, 那么

$$\int_\Omega |f(t)\cdot g(t)|dt \le 2\|f\|_{p(t)}\|g\|_{q(t)}$$

对于每个 $f \in L^{p(t)}(\Omega)$ 和 $g \in L^{p'(t)}(\Omega)$ 都成立.

定理 2.3 设 $u,\ u_k \in L^{p(t)}(\Omega)$, 则

1) $\|u\|_{p(t)} < 1(=1; >1)$ 当且仅当 $\rho(u) < 1(=1; >1)$.

2) 如果 $\|u\|_{p(t)} > 1$, 则 $\|u\|_{p(t)}^{p^-} \le \rho(u) \le \|u\|_{p(t)}^{p^+}$.

3) 如果 $\|u\|_{p(t)} < 1$, 则 $\|u\|_{p(t)}^{p^+} \le \rho(u) \le \|u\|_{p(t)}^{p^-}$.

4) $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k\|_{p(t)} = 0$ 当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k) = 0$.

5) $\|u_k\|_{p(t)} \to \infty$ 当且仅当 $\rho(u_k) \to \infty$.

对于 Mawhin 连续性定理 [8]. 令 X, Y 是实 Banach 空间, $L: D(L) \subset X \to Y$ 是一个 Fredholm 算子并且指数为 0, $D(L)$ 是 L 的值域, 这意味着 $\mathrm{Im}L$ 在 Y 上是一个闭域并且有

$$\mathrm{dimKer}L = \dim(Y/\mathrm{Im}L) < +\infty.$$

考虑补充子空间 X_1, Y_1, 其中 $X = \mathrm{Ker}L \oplus X_1$, $Y = \mathrm{Im}L \oplus Y_1$. 令 $P: X \to \mathrm{Ker}L$, $Q: Y \to Y_1$ 是自然投影. 显然有 $\mathrm{Ker}L \cap (D(L) \cap X_1) = \{0\}$. 因此限制条件 $L_P := L\,|_{D(L)\cap X_1}$ 是可逆的, 由 K 表示 L_P 的逆.

令 Ω 是 X 的一个开的有界子集并且 $D(L) \cap \Omega \ne \phi$. 如果 $QN(\bar{\Omega})$ 是有界的, 算子 $K(I-Q)N: \bar{\Omega} \to X$ 是致密的, 则在 $\bar{\Omega}$ 中 $N: \bar{\Omega} \to Y$ 是 L - 紧致的.

引理 2.4 假设 X, Y 是两个 Banach 空间, $L: D(L) \subset X \to Y$ 是一个 Fredholm 算子并且指数为 0. 此外 $\Omega \subset X$ 是一个开的有界集合, 在 $\bar{\Omega}$ 上 $N: \bar{\Omega} \to Y$ 是 L - 紧致的. 如果有

(1) $Lx \ne \lambda Nx, \forall x \in \partial\Omega \cap D(L), \lambda \in (0,1)$.

(2) $Nx \notin \mathrm{Im}L, \forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$.

(3) $\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \ne 0$, 其中 $J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$ 是同构的. 则 $Lx = Nx$ 在 $\bar{\Omega} \cap D(L)$ 上有一个解.

引理 2.5 如果 $|c| \ne 1$, 且 A 在 C_T 上有连续有界映射, 那么

(1) $\|A^{-1}x\| \le \frac{\|x\|}{||c|-1|}, \forall x \in C_T$.

(2) $\displaystyle\int_0^T \left|(A^{-1}f)(t)\right| dt \le \frac{1}{|1-|c||}\int_0^T |f(s)|\, ds, \forall f \in C_T$.

(3) $\displaystyle\int_0^T \left|(A^{-1}f)(t)\right|^2 dt \le \frac{1}{(1-|c|)^2}\int_0^T |f(s)|^2 ds, \forall f \in C_T$.

3 周期解的存在性

首先把方程 (1.1) 写成如下形式

$$\begin{cases} (Ax_1)'(t) = \varphi_{q(t)}(x_2(t)) = |x_2(t)|^{q(t)-2}x_2(t), \\ {x_2}'(t) = -g(t, x_1(t-\tau(t))) + e(t), \end{cases} \tag{P}$$

其中 $\frac{1}{p(t)} + \frac{1}{q(t)} = 1$. 显然如果 $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ 是 (P) 的一个周期解, 那么 $x_1(t)$ 也是方程 (1.1) 的一个周期解.

假设 T 是一个大于 0 的常数 $C_T=\{\varphi:\varphi\in C(R,R),\varphi(t+T)\equiv\varphi(t)\}$ 且具有范数 $|\varphi|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|$, $X=Y=\{x=(x_1(t),x_2(t))\in C(R,R^2):x(t+T)\equiv x(t)\}$ 具范数 $\|x\|=\max\{|x_1|_0,|x_2|_0\}$, 显然 X 和 Y 是 Banach 空间. 令

$$A:C_T\to C_T,\qquad (Ax)(t)=x(t)-cx(t-\sigma),$$
$$L:D(L)\subset C_T\to C_T,\quad Lx=\begin{pmatrix}(Ax_1)'\\ {x_2}'\end{pmatrix},$$

其中 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$. 易得

$$\mathrm{Ker}L=R^2,\mathrm{Im}L=\left\{x:x\in Y,\int_0^T x(s)\,ds=0\right\},$$

所以 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子.

令投影 $P:X\to\mathrm{Ker}L$ 与 $Q:Y\to\mathrm{Im}Q$ 定义如下

$$Px=\frac{1}{T}\int_0^T x(s)\,ds;Qy=\frac{1}{T}\int_0^T y(s)\,ds.$$

记 ${L_p}^{-1}$ 为 $L\Big|_{\mathrm{Ker}P\cap D(L)}$ 的逆. 显然 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}\,L,\mathrm{Ker}L=\mathrm{Im}Q=R^2$,

$$\left[{L_p}^{-1}y\right](t)=\begin{pmatrix}(A^{-1}Fy_1)(t)\\ (Fy_2)(t)\end{pmatrix},$$
$$[Fy](t)=-\int_t^T y(s)ds+\int_0^T\frac{s}{T}y(s)ds,$$

其中 $y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$.

3.1 假设条件

给出以下假设条件

$[\mathrm{H}_1]$ $x[g(t.x)-e(t)]>0,\forall t\in R,|x|>D$;

$[\mathrm{H}_2]$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sup\limits_{t\in[0,T]}\frac{|g(t,x)-e(t)|}{|x|^{\mu(t)-1}}\le r$, 其中 $\mu(t)\in C(R),1<\mu^-\le\mu(t)\le\mu^+<p^-$.

3.2 主要结论及证明

引理 3.1 如果 $p(t)>2$ 且存在正常数 $D,r\ge 0$ 满足 $[\mathrm{H}_1]$–$[\mathrm{H}_2]$, 则 (1.1) 至少有一个 T 型周期解.

证 显然当且仅当 $Lx=Nx$ 成立时, 方程 (P) 有 T 型周期解, 其中 $N:C_T\to C_T$,

$$(Nx)(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{q(t)}(x_2(t))\\ -g(t,x_1(t-\tau(t)))+e(t)\end{pmatrix}.$$

由已知条件, 可得 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L - 紧致的, 其中 Ω 是 C_T 上的任意开且有界闭集. 记

$$\Omega_1=\{x\in C_T: Lx=\lambda Nx, \lambda\in(0,T)\},$$

如果 $\forall x=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\in\Omega_1$, 那么 x 一定满足

$$\left\{\begin{array}{l}(Ax_1)'(t)=\lambda\varphi_{q(t)}(x_2(t))=\lambda|x_2(t)|^{q(t)-2}x_2(t),\\ x_2{}'(t)=-\lambda g(t,x_1(t-\tau(t)))+\lambda e(t).\end{array}\right. \tag{3.1}$$

由 (3.1) 式的第一个等式可得 $x_2(t)=\varphi_{p(t)}(\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t))$, 将其代入 (3.1) 式的第二个等式, 可得

$$\left[\varphi_{p(t)}(\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t))\right]'+\lambda g(t,x_1(t-\tau(t)))=\lambda e(t). \tag{3.2}$$

在区间 $[0,T]$ 上积分 (3.2) 式的两边, 由牛顿 - 莱布尼兹定理, 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left[\varphi_{p(t)}(\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t))\right]'\mathrm{dt}=0,\\ &\int_0^T[g(t,x_1(t-\tau(t)))-e(t)]dt=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

由积分中值定理, 存在常数 $\xi\in[0,T]$ 满足 $g(\xi,x_1(\xi-\tau(\xi)))-e(t)=0$. 由假设 $[\mathrm{H}_1]$ 可得 $|x_1(\xi-\tau(\xi))|\le D$. 令 $\xi-\tau(\xi)=kT+t_0$, 其中 $k\in\mathcal{Z}, t_0\in[0,T)$, 因此

$$|x_1(t_0)|=|x_1(\xi-\tau(\xi))|\le d,$$

这意味着

$$|x_1|_0\le D+\int_0^T|x_1(t)|dt.$$

另一方面, 将 (3.2) 式两端同时乘 $(Ax_1)(t)$, 可得

$$[\varphi_{p(t)}(\frac{1}{\lambda}x_1{}'(t))]'(Ax_1)'(t)+\lambda g(t,x_1(t-\tau(t)))(Ax_1)'(t)=\lambda(Ax_1)(t)e(t). \tag{3.4}$$

在区间 $[0,T]$ 上积分 (3.4) 式的两边, 由于

$$\int_0^T[\varphi_{p(t)}(\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t))]'(Ax_1)(t)dt=-\int_0^T\frac{1}{\lambda^{p(t)-1}}\left|\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t)\right|^{p(t)}dt.$$

因为 $\lambda>1$, 有

$$\begin{aligned}\int_0^T|(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt&\le\int_0^T\frac{1}{\lambda^{p(t)}}|(Ax_1{}')(t)|^{p(t)}dt\\ &\le\int_0^T|g(t,x_1(t-\tau(t)))-e(t)|\,|(Ax_1)(t)|dt.\end{aligned} \tag{3.5}$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt \leq &\int_0^T |g(t,x_1(t-\tau(t)))-e(t)|\,|x_1(t)-cx_1(t-\sigma)|dt\\ \leq &|x_1|_0\int_0^T |g(t,x_1(t-\tau(t)))-e(t)|dt\\ &+|c|\,|x_1|_0\int_0^T |g(t,x_1(t-\tau(t)))-e(t)|dt\\ \leq &(1+|c|)|x_1|_0\int_0^T |g(t,x_1(t-\tau(t)))-e(t)|dt.\end{aligned}\tag{3.6}$$

由假设 [H_2] 可知, $\exists\rho>0$ 满足

$$|g(t,x)-e(t)|\leq (r+\varepsilon)|x|^{\mu(t)-1},\ \ \forall t\in R,\ x<-\rho.\tag{3.7}$$

令

$$\begin{aligned}E_1&=\{t\in[0,T]:x_1(t-\tau(t))<-\rho\}\,,\\ E_2&=\{t\in[0,T]:|x_1(t-\tau(t))|\leq\rho\}\,,\\ E_3&=\{t\in[0,T]:x_1(t-\tau(t))>\rho\}\,,\end{aligned}$$

由 (3.3) 式可得

$$\left(\int_{E_1}+\int_{E_2}+\int_{E_3}\right)[g(t,x_1(t-\tau(t))-e(t))]dt=0,\tag{3.8}$$

因此

$$\begin{aligned}\int\limits_{E_3}|g(t,x_1(t-\tau(t))-e(t))|dt=&\int\limits_{E_3}[g(t,x_1(t-\tau(t))-e(t))]\,dt\\ \leq&\left(\int\limits_{E_1}+\int\limits_{E_2}\right)|g(t,x_1(t-\tau(t))-e(t))|\,dt.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由 (3.8) 式和 (3.9) 式可得

$$\begin{aligned}\int_0^T|g(t,x_1(t-\tau(t))-e(t))|dt=&\left(\int_{E_1}+\int_{E_2}+\int_{E_3}\right)[g(t,x_1(t-\tau(t))-p(t))]dt\\ \leq&\,2\left(\int\limits_{E_1}+\int\limits_{E_2}\right)|g(t,x_1(t-\tau(t))-e(t))|\,dt\\ \leq&\,2\int\limits_{E_1}(r+\varepsilon)|x_1(t-\tau(t))|^{\mu(t)-1}dt+2\tilde{g}_\rho T,\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $\tilde{g}_\rho = \max\limits_{t\in E^2} |g(t, x_1(t-\tau(t))) - e(t)|$. 由 (3.6) 式和 (3.10) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt \le (1+|c|)|x_1|_0 \int_0^T |g(t, x_1(t-\tau(t))) - e(t)|dt \\ =& 2(1+|c|)|x_1|_0 \tilde{g}_\rho T + 2(1+|c|)(r+\varepsilon)|x_1|_0 \int\limits_{E_1} |x_1(t-\tau(t))|^{\mu(t)-1}dt.\end{aligned} \tag{3.11}$$

显然, 可以得到

$$\exists \tilde{M}_1 > 0 \text{ 满足 } |x_1|_0 < \tilde{M}_1.$$

下面讨论 $|x_1|_0$. 因为

$$|x_1|_0 \le D + \int_0^T |x_1(t)|dt.$$

如果 $\exists K \ge 0$, 满足 $\int_0^T |x_1(t)|dt < K$, 则 $|x_1|_0 \le D + \int_0^T |x_1(t)|dt = D + K = M_1$. 当 $|x_1|_0 \le 1$ 时, $M_1 = 1$; 当 $|x_1|_0 > 1$ 时, $|x_1(t-\tau(t))|^{\mu(t)-1} \le |x|_0^{\mu^+-1}$. 由 (3.11) 式, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt &\le 2(1+|c|)|x_1|_0 \tilde{g}_\rho T + 2(1+|c|)(r+\varepsilon)|x_1|_0 \int\limits_{E_1} |x_1(t-\tau(t))|^{\mu(t)-1}dt \\ &\le 2(1+|c|)|x_1|_0 \tilde{g}_\rho T + 2T(1+|c|)(r+\varepsilon)|x_1|_0^{\mu^+}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}|x_1|_0 &\le D + \int_0^T |x_1(t)|dt, \\ \int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt &\le (1+|c|)(2\tilde{g}_\rho TD + 2\tilde{g}_\rho T \int_0^T |x_1{}'(t)|\, dt \\ &\quad + 2(r+\varepsilon)T(D + \int_0^T |x_1{}'(t)|dt)^{\mu^+}).\end{aligned} \tag{3.12}$$

如果 $\int_0^T |x_1{}'(t)|dt = 0$, 则 $|x_1|_0 \le D$ 取 $M_1 = D$. 如果 $\int_0^T |x_1{}'(t)|dt > 0$, 则由定理 2.2, 有

$$\int_0^T |Ax_1{}'(t)|^2 dt \le \|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} . \left\|(Ax_1{}'(t))^2\right\|_{\frac{p(t)}{2}}. \tag{3.13}$$

由引理 2.5, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt &= \int_0^T \left|(A^{-1}Ax_1{}')(t)\right|^2 dt \le \frac{\int_0^T |(Ax_1)(t)|^2 dt}{(1-|c|)^2} \\ &\le \frac{1}{(1-|c|)^2} \|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} \cdot \left\|(Ax_1{}'(t))^2\right\|_{\frac{p(t)}{2}}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

当 $\int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt \le 1$ 时, 即 $\left\|(Ax_1{}'(t))^2\right\|_{\frac{p(t)}{2}} \le 1$ 时, 可得

$$\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt \le \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}}.$$

因此取 $M_1 = \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}}$, 当 $\int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt > 1$ 时, 即 $\left\|(Ax_1{}'(t))^2\right\|_{\frac{p(t)}{2}} > 1$. 由 (3.14) 式, 可得

$$\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt \le \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} \cdot \left(\int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt\right)^{\frac{2}{p^-}}.$$

因为 $\frac{2}{p^-} < 1$, 所以

$$\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt \le \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} \cdot \int_0^T |(Ax'_1)(t)|^{p(t)}dt.$$

由 (3.12) 得

$$\begin{aligned}\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt \le& \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} \cdot [2(1+c)(r+\varepsilon)T(D+\int_0^T |x_1(t)|dt)^{\mu^+} \\ &+ 2(1+c)\tilde{g}_\rho T(D+\int_0^T |x_1{}'(t)|dt)] \\ =& C_1\left(D+\int_0^T |x_1{}'(t)|dt\right)^{\mu^+} + C_2(D+\int_0^T |x_1{}'(t)|dt),\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} \cdot 2(1+c)(r+\varepsilon)T, \\ C_2 &= \frac{1}{(1-|c|)^2}\|1\|_{\frac{p(t)}{p(t)-2}} \cdot 2(1+c)\tilde{g}_\rho T.\end{aligned}$$

又由

$$\int_0^T |x_1{}'(t)|\, dt \le T^{\frac{1}{2}}(\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}},$$

因此

$$\begin{aligned}(D+\int_0^T |x_1(t)|dt)^{\mu^+} &\le 2^{\mu^+}D^{\mu^+} + 2^{\mu^+}(\int_0^T |x_1{}'(t)|\, dt)^{\mu^+} \\ &\le 2^{\mu^+}D^{\mu^+} + 2^{\mu^+}T^{\frac{\mu^+}{2}}(\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt)^{\frac{\mu^+}{2}}.\end{aligned}$$

由 (3.15) 式, 得

$$\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt \le C_1\left[2^{\mu^+}D^{\mu^+} + 2^{\mu^+}T^{\frac{\mu^+}{2}}(\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt)^{\frac{\mu^+}{2}}\right] + C_2(D+T^{\frac{1}{2}}(\int_0^T |x_1{}'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}).$$

由于 $\mu^+ < 2$ 可得, 存在 $C > 0$, 使得 $\int_0^T |{x_1}'(t)|^2 dt \le C$. 因此 $|x_1|_0 \le D + C + T = M_1$. 综上所述, $\exists M_1 > 0$, 使得 $|x_1|_0 < M_1$.

下面讨论 $|x_2|_0$ 的边界. 由 (3.1) 式的第一个等式, 可知 $\int_0^T |x_2(t)|^{q(t)-2} x_2(t) dt = 0$. 这意味 $\exists t_1 \in [0, T]$ 着满足 $x_2(t_1) = 0$, 因此 $|x_2|_0 \le \int_0^T |{x'}_2(t)|\, dt$. 由 (3.2) 式的第二个等式可得

$$\int_0^T |{x_2}'(t)| dt \le \lambda \int_0^T |g(t, x_1(t - \tau(t)))| dt + \lambda \int_0^T |e(t)| \le \lambda T g_{M_2} + \lambda \|e\|_1,$$

其中 $g_{M_2} = \max\limits_{|x| \le M_2, t \in [0,T]} |g(t, x)|$, 因此有 $|x_2|_0 \le \lambda T g_{M_2} + \lambda \|e\|_1 = M_2$.

令

$$\begin{aligned} & M = \sqrt{M_2^2 + M_3^2} + 1, \ \ \Omega = \{x = (x_1, x_2)^T : |x_1|_0 < M, |x_2|_0 < M\}, \\ & \Omega_2 = \{x \in \partial\Omega; x \in \ker L\}. \end{aligned}$$

那么

$$QN(x) = \int_0^T \begin{pmatrix} \varphi_{q(t)}(x_2) \\ -g(t, x_1(t - \tau(t))) + e(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} |x_2|^{q(t)-2} x_2 \\ -g(t, x_1) + e(t) \end{pmatrix}.$$

若 $QNx = 0$, 那么 $x_2 = 0$, $x_1 = M$, 或 $= M$. 但是当 $x_1 = M$ 时, 显然 $-g(t, x_1) + e(t) < 0$ 矛盾. 当 $x_1 = -M$ 时, 显然 $QNx \ne 0$, $\forall x \in \Omega, x \notin \mathrm{Im}L$, 因此引理 2.4 中 (1) 和 (2) 均得到满足.

下面证明引理 2.4 (3) 同样成立. 定义同构: $J : \mathrm{Im}Q \to \ker L : J(x_1, x_2)^T = (x_2, x_1)^T$.

令 $H(\mu, x) = \mu x + \frac{1-\mu}{T} JQNx$, $(\mu, x) \in \Omega \times [0, 1]$, 那么

$$H(\mu, x) = \begin{pmatrix} \mu x_1 + \frac{1-\mu}{T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T [-g(t, x) + e(t)] dt \right) \\ (\mu + \frac{1-\mu}{T} |x_2|^{q(t)-2}) x_2 \end{pmatrix}, \forall (x, \mu) \in (\partial\Omega \cap \ker L) \times [0, 1].$$

如果 $H(\mu, x) = 0$, 那么 $x_2 = M$或$\,-M$. 与上面的证明类似, 也可证明 $H(\mu, x) \ne 0$. 因此

$$\begin{aligned} & \deg\{JQN, \Omega \cap \ker L, 0\} = \deg\{H(0, x), \Omega \cap \ker L, 0\} \\ = \ & \deg\{H(1, x), \Omega \cap \ker L, 0\} = \deg\{I, \Omega \cap \ker L, 0\} \ne 0. \end{aligned}$$

因此引理 2.4 的以三个条件同样成立. 应用引理 2.4, 可得 $Lx = Nx$ 在 $\overline{\Omega} \bigcap D(L)$ 上有一个解几乎处处成立, 方程 (1.1) 存在一个周期解.

参 考 文 献

[1] Acerbi E, Mingione G. Regularity results for stationary electro-rheological fluids[J]. Arch. Ration. Mech. Anal., 2002, 164: 213–259.

[2] Acerbi E, Mingione G, Seregin G A. Regularity results for parabolic systems related to a class of non-Newtonian FLuids[J]. Ann. De Inst. Henri Poincare Non Linear Analysis, 2004, 21: 25–60.

[3] Mihailescu M, Radulescu V. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids[J]. Proc. Math. Phy. Engin. Sci., 2011, 467(2134): 3033–3034

[4] Ruzicka M. Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[5] 梁峰, 鲁世平, 韩茂安. 一类具时滞变量的类 p-Laplacian Liénard 微分方程 [J]. 数学杂志, 2011, 31(1): 48–54.

[6] 鲁世平, 葛渭高. 一类二阶具偏差变元中立型泛函微分方程周期解的存在性 [J]. 数学杂志, 2010, 30(5): 839–847.

[7] Kovacik O, Rakosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ [J]. Czechoslovak Math. J., 1991, 45: 592–618.

[8] Gaines R, Mawhin J. Coincidence degree and nonlinear differential equations[M]. Berlin: Springer, 1977.

THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR A CLASS OF $p(x)$-LAPLACIAN EQUATION

YU Mei, MA Guo-zhen

(*School of Natural and Applied Sciences, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710072, China*)

Abstract: In this paper, we study a class of $p(t)$-Laplace neutral differential functional equations. By using Mawhin's continuation theorem, the existence of periodic solution is obtained, which improves some known results.

Keywords: variable exponential space; continuity theorem; $p(t)$-Laplace neutral functional differential equations; periodic solution

2010 MR Subject Classification: 34C25; 34K38