Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

毒素脉冲输入与种群脉冲出生切换阶段结构单种群动力学模型研究

焦建军 [1], 曾熙轩 [1], 李利梅 [2]
(1. 贵州财经大学数统学院, 贵州 贵阳 550025)
(2. 贵州财经大学继续教育学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 本文研究了毒素脉冲输入与脉冲出生切换阶段结构单种群动力学模型. 利用常微分方程及差分分析, 获得了系统种群灭绝和持久生存的控制条件结果, 为污染环境中的生物资源管理提供了可靠的管理策略.

关 键 词: 环境毒素; 脉冲出生; 灭绝; 持久
MR(2010) **主题分类号**: 34D23; 92B05 **中 图 分 类 号**: O175.13
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2018)06-1066-09

1 引言

冬眠也叫“冬蛰”. 某些动物在冬季时生命活动处于极度降低的状态, 是这些动物对冬季外界不良环境条件的一种适应 [1,2].

然而, 随着社会的发展, 环境污染也变得越来越严重, 由于环境毒素的存在对种群的生存存在严重的危害, 而由于天气环境的变化、污染源对环境脉冲排放环境毒素等造成了环境生物多样性的减少 [3,4]. 近年来, 多生物数学家 [5−10] 对污染环境下的数学建模产生浓厚的兴趣. 同时也有许多学者对种群的阶段结构有所研究 [11−13].

基于上述讨论, 本文讨论污染环境下具冬眠特征的阶段结构单种群动力学模型, 分析其动力学行为, 为污染环境下具冬眠特征的生物资源管理提供决策支持.

2 模型

常微分方程描述的阶段结构种群模型.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = by(t) - (c+d_1)x(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = cx(t) - d_2y(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x(t)$ 表示种群幼体在时刻 t 的密度, $y(t)$ 表示种群成体在时刻 t 的密度, $b>0$ 表示种群出生率系数, $c>0$ 表示种群幼体向种群成体转化的系数, $d_1>0$ 表示种群幼体的死亡系数, $d_2>0$ 表示种群成体的死亡系数.

*收稿日期: 2018-01-17 接收日期: 2018-03-27
基金项目: 国家自然科学基金 (11761019; 11361014); 贵州省高层次创新型人才项目 (黔科合人才[2016]4035 号); 贵州省科技创新人才团队项目 (黔科合平台人才 [2017]5658).
作者简介: 焦建军 (1973–), 男, 湖南邵阳, 教授, 主要研究方向: 生物数学.

考虑到种群的脉冲出生, 那么上述模型可修改为

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -(c+d_1)x(t), t \neq n\tau, \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = cx(t) - d_2 y(t), t \neq n\tau, \\ \triangle x(t) = y(t)(a - bx(t)), t = n\tau, \\ \triangle y(t) = 0, t = n\tau, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $x(t)$ 表示种群幼体在时刻 t 的密度, $y(t)$ 表示种群成体在时刻 t 的密度, $c>0$ 表示种群幼体向种群成体转化的系数, $d_1>0$ 表示种群幼体的死亡系数, $d_2>0$ 表示种群成体的死亡系数, $a>0$ 表示种群脉冲出生系数, $b>0$ 表示种群脉冲出生的种内竞争系数, $\tau>0$ 表示种群脉冲出生周期.

而污染环境下的毒素具脉冲输入的单种群动力学模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - bx(t)) - \beta c_e(t)x(t), t \neq n\tau, \\ \dfrac{dc_e(t)}{dt} = -gc_e(t), t \neq n\tau, \\ \triangle x(t) = 0, t = n\tau, \\ \triangle c_e(t) = \mu, t = n\tau, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $x(t)$ 表示种群在时刻 t 的密度, $c_e(t)$ 表示环境毒素在时刻 t 的浓度, $a>0$ 表示种群内禀增长率系数, $b>0$ 表示种内竞争系数. $\beta>0$ 表示种群受毒素的影响造成种群的死亡系数, $g>0$ 表示毒素受阳光等生化反应作用的影响的消耗系数, $\mu>0$ 表示环境变化等影响下毒素输入种群生活环境的浓度量, $\tau>0$ 表示毒素脉冲输入环境的周期.

考虑到具冬眠特征种群, 建立毒素具脉冲输入与种群脉冲出生的切换阶段结构单种群阶段结构动力学模型

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = -(c+d_1)x(t) - \beta c_e(t)x(t), \\ &\frac{dy(t)}{dt} = cx(t) - d_1 y(t) - \beta c_e(t)y(t), \\ &\frac{dc_e(t)}{dt} = -h_1 c_e(t), \end{aligned}\right\} t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x(t) = y(t)(a - by(t)), \\ &\triangle y(t) = 0, \\ &\triangle c_e(t) = 0, \end{aligned}\right\} t = (n+l)\tau, n = 1, 2, \cdots, \\ \left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = -d_2 x(t), \\ &\frac{dy(t)}{dt} = -d_2 y(t), \\ &\frac{dc_e(t)}{dt} = -h_2 c_e(t), \end{aligned}\right\} t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x(t) = 0, \\ &\triangle y(t) = 0, \\ &\triangle c_e(t) = \mu, \end{aligned}\right\} t = (n+1)\tau, n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $x(t)$ 表示种群幼体在时刻 t 的密度, $y(t)$ 表示种群成体在时刻的密度, $c_e(t)$ 表示环境毒素在时刻 t 的浓度, $c>0$ 表示种群幼体转化为成体的转化率, $d_1>0$ 表示种群幼体在非冬眠期的死亡系数, 也表示种群成体在非冬眠期的死亡系数, $\beta>0$ 表示种群幼体在非冬眠期由于环境毒素而引发的死亡系数，也表示种群成体在非冬眠期由于环境毒素而引发的死亡系数, $h_1>0$ 表示在种群非冬眠期环境毒素因在环境生化作用消耗系数, $a>0$ 表示种群成体脉冲出生的出生系数, $b>0$ 表示种群成体出生的种内竞争系数, d_2 表示种群幼体在冬眠期的死亡系数, 也表示种群成体在冬眠期的死亡系数, $h_2>0$ 表示在冬眠期环境毒素因在环境生化作用消耗系数, $\mu>0$ 表示环境毒素浓度的脉冲输入, $\tau>0$ 表示种群的脉冲出生周期.

3 主要结论

方程组 (2.4) 右边的函数 $f=(f_1,f_2,f_3)$, 方程组 (2.4) 的解 $z:R_+\to R_+^3$ 是一个分段连续的函数, $z(t)=(x(t),y(t),c_e(t))^T$, $R_+=[0,+\infty)$, $R_+^3=\{z\in R^3|z>0\}$, $z(t)$ 在 $(n\tau,(n+l)\tau]\times R_+^3$ 是连续的, 在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]\times R_+^3$ 也是连续的. 根据文献 [9], f 的光滑性保证了方程组 (2.4) 的解的全局存在性和唯一性.

设 $V:R_+\times R_+^3\to R_+$, 那么 V 属于 V_0, 如果

I) V 在 $(n\tau,(n+l)\tau]\times R_+^3$ 对每个 $z\in R_+^3$ 是连续的, 且

$$\lim_{(t,u)\to((n+l)\tau^+,z)} V(t,u)=V((n+l)\tau^+,z)$$

与

$$\lim_{(t,u)\to((n+1)\tau^+,z)} V(t,u)=V((n+1)\tau^+,z)$$

存在;

II) V 在 z 是局部李普希茨的.

引理 1 考虑系统 (2.4) 的子系统

$$\begin{cases} \dfrac{dc_e(t)}{dt}=-h_1c_e(t),t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ \triangle c_e(t)=0,t=(n+l)\tau, \\ \dfrac{dc_e(t)}{dt}\quad=-h_2c_e(t),t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \\ \triangle c_e(t)=\mu,t=(n+1)\tau, \end{cases} \tag{3.1}$$

则 (3.1) 式存在全局渐近稳定的周期解

$$\overline{c_e(t)}=\begin{cases} c_e^*e^{-h_1(t-n\tau)},t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ c_e^*e^{-h_1l\tau-h_2(t-(n+l)\tau)},t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$c_e^*=\frac{\mu}{1-e^{-h_1l\tau-h_2(1-l)\tau}}.$$

证 系统 (3.1) 的第一个方程在 $(n\tau,(n+l)\tau]$ 上积分可得

$$c_e(t)=c_e(n\tau^+)e^{-h_1(t-n\tau)},t\in(n\tau,(n+l)\tau]. \tag{3.3}$$

系统 (3.1) 的第三个方程在 $((n+l)\tau,(n+1)\tau]$ 上积分可得

$$c_e(t)=c_e((n+l)\tau^+)e^{-h_2(t-(n+l)\tau)},t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau]. \tag{3.4}$$

考虑到系统 (3.1) 的脉冲效应可得到频闪映射

$$c_e((n+1)\tau^+)=c_e(n\tau^+)e^{-[h_1l+h_2(1-l)]\tau}+\mu. \tag{3.5}$$

于是容易得到 (3.5) 式的唯一不动点

$$c_e^*=\frac{\mu}{1-e^{-h_1l\tau-h_2(1-l)\tau}}.$$

做记号 $c_e^{n+1}=c_e((n+1)\tau)$. 令

$$f(x)=xe^{-[h_1l+h_2(1-l)]\tau}+\mu. \tag{3.6}$$

由 (3.5) 式可以得

$$c_e^{n+1}=f(c_e^n). \tag{3.7}$$

对 (3.7) 式求导可得

$$\frac{dc_e^{n+1}}{dc_e^n}|_{c_e^n=c_e^*}=e^{-h_1l\tau-h_2(1-l)\tau}<1. \tag{3.8}$$

所以系统 (3.5) 唯一的不动点

$$c_e^*=\frac{\mu}{1-e^{-h_1l\tau-h_2(1-l)\tau}},$$

是局部稳定的, 从而是全局渐近稳定的. 与参考文献 [13] 同理, 可知 (3.5) 式存在全局渐近稳定的周期解

$$\overline{c_e(t)}=\begin{cases} c_e^*e^{-h_1(t-n\tau)},t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ c_e^*e^{-h_1l\tau-h_2(t-(n+l)\tau)},t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau]. \end{cases} \tag{3.9}$$

注 1 由引理 1 可知, 对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$(c_e^*e^{-h_1l\tau}+c_e^*e^{-h_1l\tau-h_2(1-l)\tau})-\varepsilon\leq c_e(t)\leq(c_e^*+c_e^*e^{-h_1l\tau})+\varepsilon.$$

考虑系统 (2.4) 的子系统

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt}=-(c+d_1)x(t), \\ &\frac{dy(t)}{dt}=cx(t)-d_1y(t), \end{aligned}\right\} t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x(t)=y(t)(a-by(t)), \\ &\triangle y(t)=0, \end{aligned}\right\} t=(n+l)\tau,n=1,2,\cdots, \\ \left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt}=-d_2x(t), \\ &\frac{dy(t)}{dt}=-d_2y(t), \end{aligned}\right\} t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x(t)=0, \\ &\triangle y(t)=0, \end{aligned}\right\} t=(n+1)\tau,n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{3.10}$$

由系统 (3.10) 的第一个与第二个方程, 容易得到脉冲点之间的解析解为

$$\begin{cases} x(t) = \begin{cases} x(n\tau^+)e^{-(c+d_1)(t-n\tau)}, t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ x((n+l)\tau^+)e^{-d_2(t-(n+l)\tau)}, t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \end{cases} \\ y(t) = \begin{cases} (1-e^{-c(t-n\tau)})x(n\tau^+)e^{-d_1(t-n\tau)} - y(n\tau^+)e^{-d_1(t-n\tau)}, t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ y((n+l)\tau^+)e^{-d_2(t-(n+l)\tau)}, t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau]. \end{cases} \end{cases} \tag{3.11}$$

考虑到系统 (3.10) 的第三、第四个方程与第七、第八个方程的脉冲效应, 得到系统 (3.10) 的频闪映射

$$\begin{cases} x((n+1)\tau^+) = Ax(n\tau^+) + Bx(n\tau^+) - b[Cx(n\tau^+) + Dy(n\tau^+)]^2 e^{-d_2(1-l)\tau}, \\ y((n+1)\tau^+) = Ex(n\tau^+) + Fy(n\tau^+), \end{cases} \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} &A = [e^{-(c+d_1)l\tau} + a(1-e^{cl\tau})e^{-d_1 l\tau}]e^{-d_2(1-l)\tau}, \\ &B = ae^{-[d_1 l + d_2(1-l)]\tau}, \\ &C = (1-e^{-cl\tau})e^{-d_1 l\tau} < 1, \\ &D = e^{-d_1 l\tau} < 1, \\ &E = (1-e^{-cl\tau})e^{-[d_1 l + d_2(1-l)]\tau} < 1, \\ &F = e^{-[d_1 l + d_2(1-l)]\tau} < 1. \end{aligned}$$

计算 (3.12) 式, 可得到两个不动点 $P_1(0,0)$ 与 $P_2(x^*, y^*)$, 其中

$$\begin{cases} x^* = \dfrac{(1-F)[(A-1)(1-F)+BE]}{b[C(1-F)+DE]^2} \times e^{-d_2(1-l)\tau}, (A-1)(1-F)+BE > 0, \\ y^* = \dfrac{E[(A-1)(1-F)+BE]}{b[C(1-F)+DE]^2} \times e^{-d_2(1-l)\tau}, (A-1)(1-F)+BE > 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

定理 2 (i) 如果 $(A-1)(1-F)+BE<0$, 那么不动点 $P_1(0,0)$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 如果 $(A-1)(1-F)+BE>0$, 那么不动点 $P_2(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的, 其中 x^* 和 y^* 按照 (3.13) 式定义.

证 为了方便计算, 做记号 $(x^{n+1}, y^{n+1}) = (x((n+1)\tau^+), y((n+1)\tau^+))$, 那么差分方程 (3.12) 线性化后可以写为

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

显然系统 (3.12) 的不动点 $P_1(0,0)$ 与 $P_2(x^*, y^*)$ 的附近的动力学性质由其线性系统 (3.14) 决定, M 作为线性系统 (3.14) 的矩阵, 不动点 $P_1(0,0)$ 与 $P_2(x^*, y^*)$ 的稳定性由 M 的特征值小于 1 来决定. 当 M 满足如下的 Jury 判据条件时, 可知 M 的特征值小于 1[13],

$$1 - \mathrm{tr}M + \mathrm{det}M > 0. \tag{3.15}$$

(i) 当 $(A-1)(1-F)+BE<0$ 时, 显然 $P_1(0,0)$ 是系统 (3.12) 唯一的不动点, 于是得到

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ E & F \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

由 Jury 判据条件

$$\begin{aligned} & 1-\mathrm{tr}M+\det M=1-(A+F)+(AF-BE) \\ = \ & (1-A)(1-F)-BE=-[(A-1)(1-F)+BE]>0. \end{aligned}$$

所以系统 (3.12) 唯一的不动点 $P_1(0,0)$ 是局部稳定的, 从而是全局渐近稳定的.

(ii) 当 $(A-1)(1-F)+BE>0$ 时, 显然 $P_1(0,0)$ 与 $P_2(x^*,y^*)$ 是系统 (3.12) 的不动点. 由 (i) 的证明过程容易知道系统 (3.12) 的不动点 $P_1(0,0)$ 是不稳定的. 考虑不动点 $P_2(x^*,y^*)$, 得到

$$M=\begin{pmatrix} A-2bC(Cx^*+Dy^*) & B-2bD(Cx^*+Dy^*) \\ E & F \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

于是

$$\begin{aligned} & 1-\mathrm{tr}M+\det M=1-[(A-2bC(Cx^*+Dy^*)+F]) \\ & +[A-2bC(Cx^*+Dy^*)]F-[B-2bD(Cx^*+Dy^*)]E \\ = \ & \frac{(A-1)(1-F)+BE}{b[C(1-F)+DE]^2}>0. \end{aligned}$$

由 Jury 判据, 所以系统 (3.12) 的不动点 $P_2(x^*,y^*)$ 是局部稳定的, 从而是全局渐近稳定的.

类似参考文献 [13], 可以得到如下的引理.

定理 3 (i) 如果 $(A-1)(1-F)+BE<0$, 那么系统 (3.12) 的平凡周期解 $(0,0)$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 如果 $(A-1)(1-F)+BE>0$, 那么系统 (3.12) 的正周期解 $(\widetilde{x(t)},\widetilde{y(t)})$ 是全局渐近稳定的, 其中

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{x(t)}=\left\{\begin{array}{l} x^*e^{-(c+d_1)(t-n\tau)}, t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ \quad x^{**}e^{-d_2(t-(n+l)\tau)}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \end{array}\right. \\ \widetilde{y(t)}=\left\{\begin{array}{l} (1-e^{-c(t-n\tau)})x^*e^{-d_1(t-n\tau)}-y^*e^{-d_1(t-n\tau)}, t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ y^{**}e^{-d_2(t-(n+l)\tau)}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{3.18}$$

而

$$x^{**}=(x^*+y^*)e^{-d_1l\tau}+x^*e^{-(c+d_1)l\tau}, y^{**}=(x^*)(1-e^{-cl\tau})e^{-d_1l\tau}+y^*)e^{-d_1l\tau},$$

且 x^* 与 y^* 如 (3.13) 式所定义.

注 2 由引理 1 与定理 3 可知, 当 $(A-1)(1-F)+BE>0$, 存在 $M>0$ 使得 $x(t)<M, y(t)<M, c_o(t)<M$.

考虑到

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} \geq -(c+d_1)x(t) - \beta(\overline{c_e(t)}+\varepsilon)x(t), \\ &\frac{dy(t)}{dt} \geq cx(t) - d_1y(t) - \beta(\overline{c_e(t)}+\varepsilon)y(t), \end{aligned}\right\} t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x(t) = y(t)(a - by(t)), \\ &\triangle y(t) = 0, \end{aligned}\right\} t = (n+l)\tau, n = 1, 2, \cdots, \\ \left.\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = -d_2x(t), \\ &\frac{dy(t)}{dt} = -d_2y(t), \end{aligned}\right\} t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x(t) = 0, \\ &\triangle y(t) = 0, \end{aligned}\right\} t = (n+1)\tau, n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{3.19}$$

容易得到系统 (3.19) 的比较方程

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{dx_1(t)}{dt} = -(c+d_1)x_1(t) - \beta(\overline{c_e(t)}+\varepsilon)x_1(t), \\ &\frac{dy_1(t)}{dt} = cx_1(t) - d_1y_1(t) - \beta(\overline{c_e(t)}+\varepsilon)y_1(t), \end{aligned}\right\} t \in (n\tau, (n+l)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x_1(t) = y_1(t)(a - by_1(t)), \\ &\triangle y(t) = 0, \end{aligned}\right\} t = (n+l)\tau, n = 1, 2, \cdots, \\ \left.\begin{aligned} &\frac{dx_1(t)}{dt} = -d_2x_1(t), \\ &\frac{dy_1(t)}{dt} = -d_2y_1(t), \end{aligned}\right\} t \in ((n+l)\tau, (n+1)\tau], \\ \left.\begin{aligned} &\triangle x_1(t) = 0, \\ &\triangle y_1(t) = 0, \end{aligned}\right\} t = (n+1)\tau, n = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{3.20}$$

并考虑到 (2.4) 式的子系统 (3.10).

从而容易得到与 (3.20) 式的频闪映射

$$\begin{cases} x_1((n+1)\tau^+) = A_1x_1(n\tau^+) + B_1x_1(n\tau^+) - b[C_1x_1(n\tau^+) + D_1y_1(n\tau^+)]^2e^{-d_2(1-l)\tau}, \\ y_1((n+1)\tau^+) = E_1x_1(n\tau^+) + F_1y_1(n\tau^+), \end{cases} \tag{3.21}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= [e^{-[c+(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})]l\tau} + a(1-e^{cl\tau})e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l\tau}]e^{-d_2(1-l)\tau}, \\ B_1 &= ae^{-[(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l+d_2(1-l)]\tau}, \\ C_1 &= (1-e^{-cl\tau})e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l\tau} < 1, \\ D_1 &= e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l\tau} < 1, \\ E_1 &= (1-e^{-cl\tau})e^{-[(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l+d_2(1-l)]\tau} < 1, \\ F_1 &= e^{-[(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l+d_2(1-l)]\tau} < 1. \end{aligned}$$

计算 (3.21) 式可得到两个不动点 $Q_1(0,0)$ 与 $Q_2(x^*,y^*)$, 其中

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{(1-F_1)[(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1]}{b[C_1(1-F_1)+D_1E_1]^2} \times e^{-d_2(1-l)\tau}, (A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1>0, \\ y_1^* = \dfrac{E_1[(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1]}{b[C_1(1-F_1)+D_1E_1]^2} \times e^{-d_2(1-l)\tau}, (A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1>0. \end{cases} \tag{3.22}$$

于是类似定理 1 与定理 3 可得

定理 4 (i) 如果 $(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1<0$, 那么不动点 $Q_1(0,0)$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 如果 $(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1>0$, 那么不动点 $Q_2(x_1^*,y_1^*)$ 是全局渐近稳定的, 其中 x_1^* 和 y_1^* 按照 (3.22) 式定义.

定理 5 (i) 如果 $(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1<0$, 那么系统 (3.20) 的平凡周期解 $(0,0)$ 是全局渐近稳定的;

(ii) 如果 $(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1>0$, 那么系统 (3.20) 的正周期解 $(\widetilde{x_1(t)},\widetilde{y_1(t)})$ 是全局渐近稳定的, 其中

$$\begin{cases} \widetilde{x_1(t)} = \begin{cases} x_1^* e^{-[c+(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**}))](t-n\tau)}, t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ x_1^{**}e^{-d_2(t-(n+l)\tau)}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \end{cases} \\ \widetilde{y_1(t)} = \begin{cases} (1-e^{-c(t-n\tau)})x^*e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})(t-n\tau)} - y^*e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})(t-n\tau)}, \\ t\in(n\tau,(n+l)\tau], \\ y^{**}e^{-d_2(t-(n+l)\tau)}, t\in((n+l)\tau,(n+1)\tau], \end{cases} \end{cases} \tag{3.23}$$

而

$$x_1^{**} = (x_1^*+y_1^*)e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l\tau} + x_1^*e^{-[c+(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**}))]l\tau},$$
$$y_1^{**} = (x_1^*)(1-e^{-cl\tau})e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l\tau} + y^*)e^{-(d_1+\beta(c_e^*+c_e^{**})l\tau},$$

且 x_1^* 与 y_1^* 如 (3.22) 式所定义.

由定理 3 与定理 5 容易得

定理 6 (i) 如果 $(A-1)(1-F)+BE<0$, 那么系统 (2.4) 种群灭绝;

(ii) 如果 $(A_1-1)(1-F_1)+B_1E_1>0$, 系统 (2.4) 种群持久.

4 结语

本文考虑污染环境、生物冬眠与种群阶段结构, 建立毒素脉冲输入与种群脉冲出生的阶段结构切换单种群动力学模型, 根据定理 6 的结论可以知道脉冲输入的毒素浓度存在一个阈值 μ^*, 当 $\mu>\mu^*$ 时, 系统 (2.4) 种群灭绝; 当 $\mu<\mu^*$ 时, 系统 (2.4) 种群持久. 所得结论告诉我们控制治理污染的力度能够保护环境生物的多样性, 特别是环境污染控制的阈值为污染环境下生物资源管理提供决策支持.

参 考 文 献

[1] Wang L C H, Lee T F, Fregley M J, Blatteis C M. Handbook of physiology: environmental physiology[M]. New York: Oxford University Press, 1996.

[2] Staples J F, Brown J C L. Mitochondrial metabolism in hibernation and daily torpor: a review[J]. J. Comp. Physiol. B, 2008, 178: 811–827.

[3] Hallam T G, Clark C E, Jordan G S. Effects of toxicants on population: a qualitative approach I. equilibrium environmental exposure [J]. Ecolog. Model., 1983, 18(3/4): 291–340.

[4] Debasis M. Persistence and global stability of a population in a polluted environment with delay[J]. J. Biol. Sys., 2002, 10: 225–232.

[5] Jiao Jianjun, Long Wen, Chen Lansun. A single stages-structured population model with mature individuals in a polluted environment and pulse input of environmental toxin [J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2009, 10(5): 3073–3081.

[6] 栾施, 刘兵, 张丽霞. 一个污染环境中的单种群模型的动力学性质 [J]. 生物数学学报, 2011, 26(4): 689–694.

[7] Zhang B G. Population's ecological mathematics modeling[M]. Qingdao: Publ. Qingdao Merine Univ., 1990.

[8] Liu B.Chen L S, Zhang Y J. The effects of impulsive toxicant anput on a population in a polluted environment[J]. J. Biol. Syst., 2003, (11): 265–287.

[9] Laksmikantham V. Theory of impulsive differential equations[M]. Sinapore: World Sci., 1989.

[10] 焦建军, 文乾英. 具脉冲出生与脉冲输入环境毒素的单种群动力学模型研究 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(22): 299–304.

[11] Liu X N. Impulsive stabilization and applications to population growth models [J]. I. Math., 1995, 5(1): 381–385.

[12] 焦建军, 鲍磊, 陈兰荪. 具脉冲出生与脉冲收获阶段结构单独种群动力学模型 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2011, 49(1): 6–10.

[13] Jiao Jianjun, Cai Shaohong, Chen Lansun. Analysis of a stage-structured predator-prey system with birth pulse and impulsive harvesting at different moments[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2011, 12: 2232–2244.

DYNAMICS OF A SWITCHED STAGE-STRUCTURED SINGLE POPULATION MODEL WITH PULSE INPUT TOXIN AND BIRTH PULSE

JIAO Jian-jun [1], ZENG Xi-xuan [1], LI Li-mei [2]

(*1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China*)

(*2. School of Continuous Education, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China*)

Abstract: In this paper, we consider a stage-structured switched single population model with impulsive input toxin and birth pulse. By using ordinary differential equations and difference equations, we obtain the controlling conditions of extinct and permanence, which prove management tactics for biological resource in polluted environment.

Keywords: environmental toxin; birth pulse; extinct; permanence

2010 MR Subject Classification: 34D23; 92B05