Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

某类包含 Hurwitz-Lerch Zeta 函数的三阶积分算子

王小元[1]，王知人[1], 温胜男[1]，尹 枥[2]

(1. 燕山大学理学院，河北 秦皇岛 066004)

(2. 滨州学院数学系，山东 滨州 256603)

摘 要: 本文研究了包含 Hurwitz-Lerch Zeta 函数的积分算子 $\mathcal{W}_{s,b}f(z)$ 的关于亚纯函数的微分从属与微分超从属性质. 利用三阶微分从属与微分超从属的定义, 通过选取适当的允许函数, 得到了由算子 $\mathcal{W}_{s,b}f(z)$ 定义的亚纯函数类的某些三阶微分从属和微分超从属结果, 进而得到 Sandwich 型双从属结果, 推广了二阶微分从属与超从属的相关结果.

关键词: 解析函数; 亚纯函数; 微分从属; 微分超从属; Hurwitz-Lerch Zeta 函数

MR(2010) 主题分类号: 30C45; 30C80 **中图分类号**: O174.51

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)06-1057-09

1 引言

设 $\mathcal{H}[a,n]$ 为单位圆盘 $\mathbb{U}=\{z:\ z\in\mathbb{C}\ ,\ |z|<1\}$ 中的解析函数类且具有如下形式

$$\mathcal{H}[a,n]=\{f:f(z)=a+\sum_{k=n}^{\infty}a_kz^k\ \ (a\in\mathbb{C};n\in\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\})\}.$$

为了方便, 设 $\mathcal{H}=\mathcal{H}[1,1]$.

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是 $\mathbb{U}$ 中的两个解析函数, 如果存在 $\mathbb{U}$ 内解析且满足条件 $\omega(0)=0$ 和 $|\omega(z)|<1$ 的 Schwarz 函数, 使得 $f(z)=g(\omega(z))\,(z\in\mathbb{U})$ 恒成立, 称函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中从属于函数 $g(z)$, 记为 $f(z)\prec g(z)$. 相应地, 称 g 在 $\mathbb{U}$ 内超从属于 f. 下列关系

$$f(z)\prec g(z)\quad (z\in\mathbb{U})\Longrightarrow f(0)=g(0)\quad 且\quad f(\mathbb{U})\subset g(\mathbb{U})$$

是众所周知的. 更进一步地, 如果 g 在 $\mathbb{U}$ 内单叶, 则有下列等价关系

$$f(z)\prec g(z)\quad (z\in\mathbb{U})\Longleftrightarrow f(0)=g(0)\quad 且\quad f(\mathbb{U})\subset g(\mathbb{U}).$$

设 Σ 表示在去心单位开圆盘 $\mathbb{U}^*=\{z\in\mathbb{C}\ ,\ 0<|z|<1\}=\mathbb{U}\backslash\{0\}$ 内解析且具有如下形式

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n \tag{1.1}$$

的函数类.

*收稿日期: 2017-12-15 接收日期:2018-02-23

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11401041); 滨州学院科学基金资助 (BZXYL1704).

作者简介: 王小元 (1990–), 男, 河北邯郸, 硕士, 主要研究方向: 复分析及其应用.

下面的函数 $\Phi(z,s,a)$ 称为广义的 Hurwitz-Lerch Zeta 函数 (可参考文献 [1, 2])

$$\Phi(z,s,a):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+a)^s} \tag{1.2}$$
$$(a\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-;|z|<1,s\in\mathbb{C};|z|=1,\Re(s)>1\ \mathbb{Z}_0^-:=\mathbb{Z}^-\cup\{0\}=\{0,-1,-2,\cdots\}).$$

关于 Hurwitz-Lerch Zeta 函数 $\Phi(z,s,a)$ 的一些有趣的性质和特征可以参见最近的文献, 例如 Choi 和 Srivastava [3], Srivastava 等 [4], Lin 等 [5] 和 Garg 等 [6].

利用 Hurwitz-Lerch Zeta 函数 $\Phi(z,s,a)$, Srivastava 和 Attiya [7] (也可参考文献 [8–11]) 引入和研究了下面的积分算子

$$\mathcal{J}_{s,\,b}f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1+b}{k+b}\right)^s c_kz^k\quad(b\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-;s\in\mathbb{C};z\in\mathbb{U}). \tag{1.3}$$

类似于算子 $\mathcal{J}_{s,\,b}f(z)$, Wang 和 Shi [12] 引入了积分算子

$$\mathcal{W}_{s,\,b}:\Sigma\longrightarrow\Sigma. \tag{1.4}$$

通过 Hadamard 卷积得到以下定义的形式

$$\mathcal{W}_{s,\,b}f(z):=\Theta_{s,\,b}(z)*f(z)\quad(b\in\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{Z}_0^-\cup\{1\}\};s\in\mathbb{C};f\in\Sigma;z\in\mathbb{U}^*), \tag{1.5}$$

其中

$$\Theta_{s,\,b}(z):=(b-1)^s\left[\Phi(z,s,b)-b^{-s}+\frac{1}{z(b-1)^s}\right]\quad(z\in\mathbb{U}^*). \tag{1.6}$$

可以很容易从公式 (1.1), (1.2), (1.5) 和 (1.6) 中发现

$$\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b-1}{b+k}\right)^s a_kz^k. \tag{1.7}$$

当 $b\in\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{Z}^-\cup\{1\}\}$ 时, 算子 $\mathcal{W}_{s,\,b}$ 可以被定义为

$$\mathcal{W}_{s,\,0}f(z):=\lim_{b\to 0}\{\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)\}.$$

容易观察到

$$\mathcal{W}_{0,\,b}f(z)=f(z), \tag{1.8}$$
$$\mathcal{W}_{-1,\,0}f(z)=-zf'(z), \tag{1.9}$$
$$\mathcal{W}_{-1,\,-1}f(z)=\frac{f(z)-zf'(z)}{2}, \tag{1.10}$$
$$\mathcal{W}_{s,\,2}f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+2}\right)^s a_kz^k \tag{1.11}$$

和

$$\mathcal{W}_{1,\,b+1}f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b}{k+b+1}\right)a_kz^k=\frac{b}{z^{b+1}}\int_0^z t^bf(t)dt\quad(b>0), \tag{1.12}$$

$$\mathcal{W}_{\alpha,\,\beta+1}f(z)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(s)z^{\beta+1}}\int_0^z t^b\left(\log\frac{z}{t}\right)^{s-1}f(t)dt\quad(\alpha>0;\,\beta>0).\tag{1.13}$$

也可观察到

$$\mathcal{W}_{1,\,\gamma}f(z)=\frac{\gamma-1}{z^{\gamma}}\int_0^z t^{\gamma-1}f(t)dt\quad(\Re(\gamma)>1).\tag{1.14}$$

更进一步, 通过算子 (1.7) 式可以发现

$$\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z)=\frac{b-1}{z^{b}}\int_0^z t^{b-1}\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)dt\quad(\Re(b)>1).\tag{1.15}$$

值得注意的是, 算子 (1.11) 是被 Alhindi 和 Darus [13] 引入和研究的; 算子 (1.12) 和 (1.13) 是被 Lashin [14] 引入和研究的.

设 Q 表示内射于 $\overline{\mathbb{U}}\backslash\mathcal{E}(q)$ 且解析的全体函数族, 其中 $\mathcal{E}(q)=\{\zeta\in\partial\mathbb{U}:\lim\limits_{z\to\zeta}q(z)=\infty\}$, 且满足当 $\zeta\in\partial\mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q)$ 时, $\min|q'(\zeta)|=\varepsilon>0$. 可以设为 $Q(a)=\{q(z)\in Q:q(0)=a\}$, $Q_1=Q(1)$.

本文的主要目的是通过研究算子 $\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)$ 得出微分从属, 微分超从属和 Sandwich 定理的相关结论.

2 预备知识

为了证明本文的主要结果, 需要用到如下的定义和引理.

定义 2.1 [15] 设 $\Psi:\mathbb{C}^4\times\mathbb{U}\to\mathbb{C}$, 函数 $q(z)$ 和 $h(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内单叶. 若 $p(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析且满足三阶微分从属条件

$$\psi(p(z),zp'(z),z^2p''(z),z^3p'''(z);z)\prec h(z),\tag{2.1}$$

则称 $p(z)$ 为上述微分从属的一个解. 如果对所有的解 $p(z)$, 有 $p(z)\prec q(z)$, 则称 $q(z)$ 为微分从属解的一个控制. 进一步, 若存在一个控制 $\widetilde{q}(z)$ 对所有适合 (2.1) 式的控制 $q(z)$ 满足 $\widetilde{q}(z)\prec q(z)$, 则称 $\widetilde{q}(z)$ 为最佳控制.

定义 2.2 [15] 设 Ω 为 $\mathbb{U}$ 的一个子集, 函数 $q\in Q$ 且 $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. 又设 $\psi:\mathbb{C}^4\times\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 满足如下的允许条件

$$\begin{aligned}&r=q(\zeta),s=k\zeta q'(\zeta),\\&\Re\left(\frac{t}{s}+1\right)\geq k\Re\left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}+1\right),\\&\Re\left(\frac{u}{s}\right)\geq k^2\Re\left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}\right)\end{aligned}$$

时, $\psi(r,s,t,u;z)\notin\Omega$ 成立, 其中 $z\in\mathbb{U};\zeta\in\partial\mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q)$ 和 $k\geq n$. 称上述函数 ψ 的集合为允许函数类, 记作 $\Psi_n[\Omega,q]$.

类似于 Miller 和 Mocanu [16] 引入的二阶微分超从属, Tang 等 [17] 给出如下三阶微分超从属定义.

定义 2.3 [17] 设 ψ 为 $\mathbb{C}^4\times\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 的映射，函数 $h(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析. 如果 $p(z)$ 和

$$\psi(p(z),zp'(z),z^2p''(z),z^3p'''(z);z)$$

在 $\mathbb{U}$ 内单叶且满足三阶微分超从属

$$h(z) \prec \psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), z^3p'''(z); z), \tag{2.2}$$

则称 $p(z)$ 为上述微分超从属的一个解. 若对所有的解 $p(z)$, 有 $q(z) \prec p(z)$, 则称 $q(z)$ 为微分超从属的一个从属子. 进一步, 若存在一个单叶从属子 $\widetilde{q}(z)$ 对所有适合 (2.2) 式的从属子 $q(z)$, 均有 $q(z) \prec \widetilde{q}(z)$, 则称 $\widetilde{q}(z)$ 为最佳从属子.

定义 2.4 [17] 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的子集, 函数 $q \in \mathcal{H}[a,n]$ 且 $q'(z) \neq 0$. 又设函数 $\psi : \mathbb{C}^4 \times \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}$ 满足如下的允许条件: 当

$$\begin{aligned}
&r = q(z), s = \frac{zq'(z)}{m},\\
&\Re\left(\frac{t}{s}+1\right) \leq \frac{1}{m}\Re\left(\frac{zq''(z)}{q'(z)}+1\right),\\
&\Re\left(\frac{u}{s}\right) \leq \frac{1}{m^2}\Re\left(\frac{zq'''(z)}{q'(z)}\right)
\end{aligned}$$

时, 有 $\psi(r,s,t,u;z) \in \Omega$ 成立, 其中 $z \in \mathbb{U}$, $\zeta \in \partial\mathbb{U}$ 和 $m \geq n \geq 2$. 则称上述函数 ψ 的集合为允许函数类, 记作 $\Psi'_n[\Omega, q]$.

关于微分从属与微分超从属的条件, 本文选择如下的允许函数.

定义 2.5 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的子集且函数 $q(z) \in Q$ 且 $q'(z) \neq 0$. 又设函数 $\psi : \mathbb{C}^4 \times \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}$ 满足如下的允许条件: 当

$$\begin{aligned}
&a_1 = q(\zeta), \quad a_2 = \frac{k\zeta q'(\zeta)+(b-1)q(\zeta)}{b-1},\\
&\Re\left(\frac{(b-1)(a_3-a_1)}{a_2-a_1}-2(b-1)\right) \geq k\Re\left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}+1\right),\\
&\Re\left(\frac{(b-1)^2(a_4-a_1)-3b(b-1)(a_3-a_1)}{a_2-a_1}+3b^2-1\right) \geq k^2\Re\left(\frac{\zeta^2 q'''(\zeta)}{q'(\zeta)}\right)
\end{aligned}$$

时, 有 $\phi(a_1,a_2,a_3,a_4;z) \notin \Omega$, 其中 $z \in \mathbb{U}, b \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{Z}_0^- \cup \{1\}\}, s \in \mathbb{C}, \zeta \in \partial\mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q)$ 和 $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. 则称上述函数 ϕ 的集合为允许函数, 记作 $\Phi_\Gamma[\Omega, q]$.

定义 2.6 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的子集且函数 $q(z) \in \mathcal{H}$ 且 $q'(z) \neq 0$. 又设函数 $\psi : \mathbb{C}^4 \times \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}$ 满足如下的允许条件: 当

$$\begin{aligned}
&a_1 = q(z), \quad a_2 = \frac{\zeta q'(z)+(b-1)q(z)}{m(b-1)},\\
&\Re\left(\frac{(b-1)(a_3-a_1)}{a_2-a_1}-2(b-1)\right) \leq \frac{1}{m}\Re\left(\frac{\zeta q''(z)}{q'(z)}+1\right),\\
&\Re\left(\frac{(b-1)^2(a_4-a_1)-3b(b-1)(a_3-a_1)}{a_2-a_1}+3b^2-1\right) \leq \frac{1}{m^2}\Re\left(\frac{z^2 q'''(z)}{q'(z)}\right),
\end{aligned}$$

则有 $\phi(a_1,a_2,a_3,a_4;\zeta) \in \Omega$, 其中 $z \in \mathbb{U}, b \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{Z}_0^- \cup \{1\}\}, s \in \mathbb{C}, \zeta \in \partial\mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q)$ 和 $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. 则称上述函数 ϕ 的集合为允许函数类, 记作 $\Phi'_\Gamma[\Omega, q]$.

引理 2.1 [15] 设 $p(z) \in \mathcal{H}[a,n], n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, 函数 $q(z) \in Q(a)$ 且满足条件

$$\Re\left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}\right) > 0, \quad \left|\frac{zp'(z)}{q'(z)}\right| \leq k,$$

其中 $z \in \mathbb{U}$; $\zeta \in \partial\mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q)$ 且 $k \geq n$. 如果 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个子集, 满足条件 $\psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ 和

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), z^3p'''(z); z) \in \Omega,$$

则 $p(z) \prec q(z)$.

引理 2.2 [17] 设 $q(z) \in \mathcal{H}[a,n]$ 和 $\psi \in \Psi'_n[\Omega, q]$. 如果 $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), z^3p'''(z); z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中单叶, 且满足条件

$$\Re\left(\frac{zq''(z)}{q'(z)}\right) \geq 0, \quad \left|\frac{\zeta p'(\zeta)}{q'(z)}\right| \leq m \ \ (z \in \mathbb{U}; \zeta \in \partial\mathbb{U}; m \geq n \geq 2),$$
$$\Omega \subset \left\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), z^3p'''(z); z) : z \in \mathbb{U}\right\},$$

则 $q(z) \prec p(z)$.

3 主要结果

本文研究关于算子 $\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)$ 的微分从属与超从属的亚纯函数的性质, 进而得到 Sandwich 型双从属结果.

定理 3.1 设 $\phi \in \Psi_\Gamma[\Omega, q]$. 如果 $f(z) \in \Sigma$ 和 $q(z) \in Q_1$ 满足条件

$$\Re\left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}\right) \geq 0, \quad \left|\frac{z(\mathcal{W}_{s,\,b}f(z) - \mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z))}{q'(\zeta)}\right| \leq \frac{k}{|b-1|} \tag{3.1}$$

和

$$\left\{\phi(z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z); z) : z \in \mathbb{U}\right\} \subset \Omega, \tag{3.2}$$

则

$$z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z) \prec q(z). \tag{3.3}$$

证 设

$$p(z) = z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z) \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{3.4}$$

通过 (1.7) 式, 可以发现

$$z(\mathcal{W}_{s+1,\,b}f)'(z) = (b-1)\mathcal{W}_{s,\,b}f(z) - b\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z). \tag{3.5}$$

然后, 可以得出

$$z\mathcal{W}s,\, bf(z) = \frac{zp'(z) + (b-1)p(z)}{b-1}, \tag{3.6}$$

推断出

$$z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z) = \frac{z^2p''(z) + (2b-1)zp'(z) + (b-1)^2p(z)}{(b-1)^2}. \tag{3.7}$$

进一步推断得到

$$z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z)=\frac{z^3p'''(z)+3bz^2p''(z)+(3b^2-3b+1)zp'(z)+(b-1)^3p(z)}{(b-1)^3}. \tag{3.8}$$

定义变量 a_1, a_2, a_3 和 a_4 为

$$a_1=r,\ a_2=\frac{s+(b-1)r}{b-1},\ a_3=\frac{t+(2b-1)s+(b-1)^2r}{(b-1)^2},$$
$$a_4=\frac{u+3bt+(3b^2-3b+4)s+(b-1)^3r}{(b-1)^3}.$$

现在定义变换形式

$$\begin{aligned}&\psi:\mathbb{C}^4\times\mathbb{U}\to\mathbb{C},\\&\psi(r,s,t,u;z)=\phi(a_1,a_2,a_3,a_4;z).\end{aligned} \tag{3.9}$$

通过关系 (3.5)–(3.8) , 有

$$\begin{aligned}&\psi(p(z),zp'(z),z^2p''(z),z^3p'''(z);z)\\=\ &\phi(z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z),z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z),z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z),z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z);z).\end{aligned} \tag{3.10}$$

因此 (3.2) 式可写成 $\psi(p(z),zp'(z),z^2p''(z),z^3p'''(z);z)\in\Omega$. 因为

$$\frac{t}{s}+1=\frac{(b-1)(a_3-a_1)}{a_2-a_1}-2(b-1)$$

和

$$\frac{u}{s}=\frac{(b-1)^2(a_4-a_1)-3b(b-1)(a_3-a_1)}{a_2-a_1}+3b^2-1,$$

所以在定义 2.5 中当 $\phi\in\Phi_\Gamma[\Omega,q]$ 时, 结果可被证明. 也可等价的看作 ψ 在定义 2.2 的条件 $n=2$ 时可证明结果. 注意到

$$\left|\frac{zp'(\zeta)}{q'(\zeta)}\right|=\left|\frac{(b-1)z(\mathcal{W}_{s,b}f(z)-\mathcal{W}_{s+1,b}f(z))}{q'(\zeta)}\right|\le k.$$

因此 $\psi\in\Psi_2[\Omega,q]$ 且通过引理 2.1, 得到定理 3.1.

如果 $\Omega\neq\mathbb{C}$ 是一个单连通区域, 且 $\Omega=h(\mathbb{U})$ 对 $\mathbb{U}$ 中的一些共形映射 $h(z)$ 到 Ω, 则函数类 $\Phi_\Gamma[h(\mathbb{U}),q]$ 被看作 $\Phi_\Gamma[h,q]$. 可以得到以下结果.

推论 3.1 设 $\phi\in\Phi_\Gamma[h,q]$. 如果 $f(z)\in\Sigma$ 和 $q(z)\in Q_1$ 满足条件

$$\Re\left(\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}\right)\ge 0,\quad \left|\frac{z(\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)-\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z))}{q'(\zeta)}\right|\le\frac{k}{|b-1|} \tag{3.11}$$

和

$$\phi(z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z),z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z),z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z),z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z);z)\prec h(z), \tag{3.12}$$

则 $z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z)\prec q(z)$.

下面的推论是定理 3.1 的推广, 其中 $q(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 的边界 $\partial\mathbb{U}$ 是未知的.

推论 3.2 设 $\Omega \subset \mathbb{C}, q(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中单叶且 $q(0)=1$. 又设 $\sigma \in (0,1)$ 对 $\phi \in \Phi_\Gamma[\Omega, q_\sigma]$ 成立, 其中 $q_\sigma(z)=q(\sigma z)$. 如果函数 $f(z) \in \Sigma$ 满足

$$\Re\left(\frac{\zeta q_\sigma''(\zeta)}{q_\sigma'(\zeta)}\right) \geq 0, \quad \left|\frac{z(\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)-\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z))}{q_\sigma'(\zeta)}\right| \leq \frac{k}{|b-1|} \tag{3.13}$$

和

$$\phi(z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z); z) \in \Omega, \tag{3.14}$$

则 $z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z) \prec q(z)$, 其中 $z \in \mathbb{U}, \zeta \in \mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q_\sigma)$.

证 通过定理 3.1, 可以得出 $z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z) \prec q_\sigma(z)$. 因此从 $q_\sigma(z) \prec q(z)$ 可以得到结果的证明.

推论 3.3 设 $\Omega \subset \mathbb{C}, q(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中单叶且 $q(0)=1$. 又设 $\sigma \in (0,1)$ 对 $\phi \in \Phi_\Gamma[\Omega, q_\sigma]$ 成立, 其中 $q_\sigma(z)=q(\sigma z)$. 如果函数 $f(z) \in \Sigma$ 满足

$$\Re\left(\frac{\zeta q_\sigma''(\zeta)}{q_\sigma'(\zeta)}\right) \geq 0, \quad \left|\frac{z(\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)-\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z))}{q_\sigma'(\zeta)}\right| \leq \frac{k}{|b-1|} \tag{3.15}$$

和

$$\phi(z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z); z) \prec h(z), \tag{3.16}$$

则 $z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z) \prec q(z)$, 其中 $z \in \mathbb{U}, \zeta \in \mathbb{U}\backslash\mathcal{E}(q_\sigma)$.

定理 3.2 设 $\phi \in \Phi_\Gamma'[\Omega, q]$. 如果 $f(z) \in \Sigma$, $z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z) \in Q_1$ 和

$$\Re\left(\frac{zq''(\zeta)}{q'(z)}\right) \geq 0, \quad \left|\frac{z(\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)-\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z))}{q'(z)}\right| \leq \frac{m}{|b-1|}, \tag{3.17}$$

$$\Big\{\phi(z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z); z) : z \in \mathbb{U}\Big\}$$

是单叶的, 且

$$\Omega \subset \Big\{\phi(z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,\,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,\,b}f(z); z) : z \in \mathbb{U}\Big\}, \tag{3.18}$$

则 $q(z) \prec z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z)$.

证 设函数 $p(z)$ 和 ψ 分别被 (2.1) 式和 (3.9) 式定义. 因为 $\phi \in \Phi_\Gamma'[\Omega, q]$, 所以从 (3.10) 式和 (3.18) 式推出

$$\Omega \subset \Big\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z), z^3p'''(z); z) : z \in \mathbb{U}\Big\}.$$

定义 2.6 中的允许条件 $\phi \in \Phi_\Gamma'[\Omega, q]$ 等价与定义 2.4 中 $n=2$ 时的允许条件. 因此 $\phi \in \Phi_2'[\Omega, q]$, 应用引理 2.2 和 (3.18) 式, 有 $q(z) \prec p(z)$, 从而推出 $q(z) \prec z\mathcal{W}_{s+1,\,b}f(z)$. 至此, 定理 3.2 被证明.

如果 $\Omega \neq \mathbb{C}$ 是一个单连通区域, 且 $\Omega = h(\mathbb{U})$ 对 $\mathbb{U}$ 中的一些共形映射 $h(z)$ 到 Ω, 则函数类 $\Phi_\Gamma'[h(\mathbb{U}), q]$ 被看作 $\Phi_\Gamma'[h, q]$. 可以得到以下结果.

推论 3.4 设 $\phi \in \Phi'_\Gamma[h, q]$ 且 $h(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中解析. 如果函数 $f(z) \in \Sigma$, $z\mathcal{W}_{s,b}f(z) \in Q_1$ 和

$$\left\{\phi(z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,b}f(z); z) : z \in \mathbb{U}\right\}$$

是单叶的, 且

$$h(z) \prec \phi(z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,b}f(z); z), \tag{3.19}$$

则

$$q(z) \prec z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z).$$

结合推论 3.1 和推论 3.4, 得到下面的 Sandwich 型双从属结果.

推论 3.5 设 $h_1(z)$ 和 $q_1(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中解析, $h_2(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 中单叶, $q_2(z) \in Q_1$ 且 $q_1(0) = q_2(0) = 1$, $\phi \in \Phi_\Gamma[h, q] \cap \Phi'_\Gamma[h, q]$. 如果函数 $f(z) \in \Sigma, z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z) \in Q_1 \cap \mathcal{H}$ 和

$$\left\{\phi(z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,b}f(z); z) : z \in \mathbb{U}\right\}$$

在 $\mathbb{U}$ 中单叶, 且满足条件 (3.11) 式和 (3.17) 式, 则可由

$$h_1(z) \prec \phi(z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-1,b}f(z), z\mathcal{W}_{s-2,b}f(z); z) \prec h_2(z) \tag{3.20}$$

推出

$$q_1(z) \prec z\mathcal{W}_{s+1,b}f(z) \prec q_2(z). \tag{3.21}$$

参 考 文 献

[1] Srivastava H M, Choi J. Series associated with the Zeta and related functions[M]. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[2] Srivastava H M, Choi J. Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals[M]. Amsterdam: Elsevier, 2012.

[3] Choi J, Srivastava H M. Certain families of series associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function[J]. Appl. Math. Comput., 2005, 170: 399–409.

[4] Srivastava H M, Luo M J, Raina R K. New results involving a class of generalized Hurwitz-Lerch Zeta functions and their applications[J]. Turkish J. Anal. Number Theory, 2013, 1: 26–35.

[5] Lin S D, Srivastava H M. Some families of the Hurwitz-Lerch Zeta functions and associated fractional derivative and other integral representations[J]. Appl. Math. Comput., 2004, 154: 725–733.

[6] Garg M, Jain K, Srivastava H M. Some relationships between the generalized Apostol-Bernoulli polynomials and Hurwitz-Lerch Zeta functions[J]. Integral Trans. Spec. Funct., 2006, 17: 803–815.

[7] Srivastava H M, Attiya A A. An integral operator associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function and differential subordination[J]. Integral Trans. Spec. Funct., 2007, 18: 207–216.

[8] Liu J L. Suffcient condtions for strongly starlike functions involving the generalized Srivastava-Attiya operator[J]. Integral Trans. Spec. Funct., 2011, 22: 79–90.

[9] Sun Y, Kuang W P, Wang Z G. Properties for uniformly starlike and related functions under the Srivastava-Attiya operator[J]. Appl. Math. Comput., 2011, 218: 3615–3623.

[10] Wang Z G, Liu Z H, Sun Y. Some properties of the generalized Srivastava-Attiya operator[J]. Integral Trans. Spec. Funct., 2012, 23: 223–236.

[11] Yuan S M, Liu Z M. Some properties of two subclasses of k-fold symmetric functions associated with Srivastava-Attiya operator[J]. Appl. Math. Comput., 2011, 218: 1136–1141.

[12] Wang Z G, Shi L. Some subclasses of meromorphic functions involving the Hurwitz-Lerch Zeta function[J]. Hacet. J. Math. Stat., 2016, 45: 1449–1460.

[13] Alhindi K R, Darus M. A new class of meromorphic functions involving the polylogarithm function[J]. J. Complex Anal., 2014, Art. ID 864805, 5 pp.

[14] Lashin A Y. On certain subclasses of meromorphic functions associated with certain integral operators[J]. Comput. Math. Appl., 2010, 59: 524–531.

[15] Antonino J A, Miller S S. Third-order differential inequalities and subordinations in the complex plane[J]. Complex Var. Theory Appl., 2011, 56: 439–454.

[16] Miller S S, Mocanu P T. Subordinants of differential superordinations[J]. Complex Var. Theory Appl., 2003, 48: 815–826.

[17] Tang H, Srivastava H M, Li S H, Ma L N. Third-order differential subordination and superordination results for meromorphically multivalent functions associated with the Liu-Srivastava operator[J]. Abstr. Appl. Anal., 2014, Art. ID 792175, 11 pp.

CERTAIN THIRD-ORDER INTEGRAL OPERATOR INVOLVING THE HURWITZ-LERCH ZETA FUNCTION

WANG Xiao-yuan[1], WANG Zhi-ren[1], WEN Sheng-nan[1], YIN Li[2]

(*1.College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(*2.Department of Mathematics, Binzhou University, Binzhou 256603, China*)

Abstract: In this paper, the properties of the operator $\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)$ involving Hurwitz-Lerch Zeta meromorphic function are investigated. By using the definition of third-order differential subordination and differential superordination, and choosing suitable admissible functions, we derive some results with third-order differential subordination and differential superordination associated with the operator $\mathcal{W}_{s,\,b}f(z)$. Furthermore, the Sandwich-type results are also considered, which extends the related work of second-order differential subordination and differential superordination results.

Keywords: analytic functions; meromorphic function; differential subordination; differential superordination; Hurwitz-Lerch Zeta function

2010 MR Subject Classification: 30C45; 30C80