Vol. 38 (2018)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类压缩比非一致且具完全重叠结构自相似集的迭代函数系

潘 俨 [1], 姚媛媛 [2]

(1. 上海海事大学经济管理学院, 上海 201306)

(2. 华东理工大学理学院, 上海 200237)

摘 要: 本文研究了一类压缩比非一致且具完全重叠结构自相似集的所有迭代函数系. 利用了该类自相似集的 gap 性质, 获得了其所有的迭代函数系. 以上结论推广了文献 [8] 中的主要结果.

关 键 词: 完全重叠; 自相似集; 迭代函数系

MR(2010) **主题分类号**: 28A80 ; 28A78 **中 图 分 类 号**: O174.12

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2018)06-1054-03

1 引言

研究产生自相似集的所有迭代函数系起源于图像压缩理论, 是分形几何中一个基础而又重要的问题 [1].

设 $\mathcal{F}=\{f_i=r_ix+b_i\}_{i=1}^N$ 是直线上一族满足相似压缩比 $0<|r_i|<1$ 且 $b_i\in\mathbb{R}$ 的自相似压缩映射. 由文献 [2] 可知必存在直线上唯一非空紧集满足 $F=\bigcup\limits_{i=1}^N f_i(F)$. 我们称 F 是由迭代函数系 $\mathcal{F}$ 产生的自相似集.

假定 $\Phi=\{\phi_i\}_{i=1}^M$ 和 $\Psi=\{\psi_j\}_{j=1}^N$ 是产生 F 的两个迭代函数系, 我们说 Ψ 是 Φ 的一个迭代是指: 对任意 $1\le j\le N$, 存在 $1\le i_1,\cdots,i_k\le M$, 满足 $\psi_j=\phi_{i_1}\circ\cdots\circ\phi_{i_k}$. 设 Φ 是产生 F 的一个迭代函数系, 我们称 Φ 是 F 的最小生成迭代函数系若 F 的任意迭代函数系均可由其迭代产生.

丰德军等在文献 [1] 中首先研究了多种条件下一些直线自相似集的最小生成迭代函数系. 对于高维情况, 讨论主要集中在满足开集条件或强分离条件的压缩比一致的自相似集 [3,4] 或几类特殊的高维自相似集 [5,6]. 此外, 邓国泰等 [7] 研究了直线自相似集平移交仍为自相似集时的所有迭代函数系族等.

以上研究结果或多或少依赖于某种分离条件. 文 [8] 首次讨论了一类具完全重叠结构自相似集的所有迭代函数系. 该类自相似集压缩比一致且证明讨论情况众多, 较为复杂. 本文拟推广文 [8] 中结论, 讨论一类压缩比非一致且具完全重叠结构自相似集的迭代函数系. 证明主要依赖于该类自相似集的 gap 性质, 十分简洁.

考虑迭代函数系 $\{f_i\}_{i=1}^3=\{ax,bx+a(1-b),bx+1-b\}$ 且 a,b 满足 $0<b\le a<\frac{1-2b}{1-b}$, 则 $f_{13}=f_{21}$ (具完全重叠结构). 设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是由上述迭代函数系产生的自相似集, 则 E 不为 $[0,1]$ 区间. 以下定理表明 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 是 E 的最小生成迭代函数系.

*收稿日期: 2017-07-20 接收日期: 2018-02-26

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目 (11101148); 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (ECUST 222201514321).

作者简介: 潘俨 (1995–), 男, 安徽南陵, 硕士, 主要研究方向: 应用数学, 航运市场统计与风险管理.

通讯作者: 姚媛媛.

定理 1.1 设 $g(x)=\lambda x+b$ 满足 $0<|\lambda|<1$ 且 $b\in\mathbb{R}$. 若 $g(E)\subseteq E$, 则存在正整数 n 和 $i_1,\cdots,i_n\in\{1,2,3\}$ 满足 $g(x)=f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}(x)$.

注 当 $a=b$ 时, 文 [8] 中主要结果可看成上述定理的特殊情况. 解释如下: 文 [8] 中迭代函数系为 $\{\rho x,\rho x+\rho,\rho x+1\}$, 其中 $0<\rho<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 不妨设其吸引子为 F_ρ. 取 ρ 为 a 可知 E 是 F_a 的伸缩拷贝, 更具体地说 $E=(1-a)F_\rho$, 获证.

2 定理证明

首先需要如下引理和定义.

引理 2.1 [6] 设 $\{g_i\}_{i=1}^m$ 是欧氏空间自相似集 F 的一个迭代函数系. 更进一步, 假设对任意自相似压缩映射 f 满足 $f(F)\subseteq F$, 均存在 $i\in\{1,\cdots,m\}$, 使得 $f(F)\subseteq g_i(F)$. 设 h 是满足 $h(F)\subseteq F$ 的一个相似压缩映射. 则存在正整数 n 和 $i_1,\cdots,i_n\in\{1,\cdots,m\}$, 使得 $h(F)=g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_n}(F)$.

定义 2.2 称开区间 (a,b) 为集合 E 中的 gap 若 $a,b\in E$ 且 $(a,b)\cap E=\emptyset$.

定义 2.3 设 $i_1,\cdots,i_n\in\{1,2,3\}$, 定义 $E_{i_1\cdots i_n}=f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}(E)$.

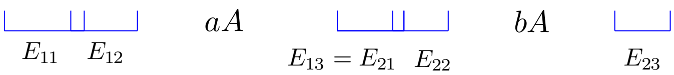
定理 1.1 的证明 首先证明

$$\text{存在某}i\in\{1,2,3\}\text{使得}g(E)\subseteq f_i(E). \tag{2.1}$$

然后由引理 2.1 知存在正整数 n 和 $i_1,\cdots,i_n\in\{1,2,3\}$ 满足 $g(E)=f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}(E)$. 又 E 非对称, 故 $g(x)=f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_n}(x)$, 定理获证.

设 E 中最大 gap 长度为 A, 则该 gap 位于 E_2 与 E_3 之间且 $A=1-2b-a(1-b)$.

由 $b\le a$ 知 $E_1\cup E_2$ 中最大 gap 长度为 aA (见下图).



为证 (2.1) 式, 使用反证法: 假定 $g(E)\subseteq E$ 且对任意 $i=1,2,3$, 有 $g(E)\nsubseteq f_i(E)$. 由于 $g(E)$ 中最大的 gap 长度小于 A, 故 $g(E)\subseteq E_1\cup E_2$. 注意到 $E_{13}=E_{21}$, 从而 $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_1\cup E_2=(E_{11}\cup E_{12})\cup E_2$ 且 $E_{11}\cup E_{12}$ 与 E_2 的距离为 aA. 由于 $g(E_1\cup E_2)$ 最大的 gap 长度小于 aA, 故 $g(E_1\cup E_2)$ 是 $E_{11}\cup E_{12}$ 或 E_2 的子集. 下面分情况讨论.

(1) $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_{11}\cup E_{12}$. 设 ρ_g 为自相似映射 g 的相似压缩比, 因为 $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_{11}\cup E_{12}=f_1(E_1\cup E_2)$, 故可得 $|\rho_g|\le a$. 因为 $E_1\cup E_2$ 不对称, 故若 $|\rho_g|=a$, 则导致 $g=f_1$, 与假设不符, 故有 $|\rho_g|<a$. 从而 $g(E)$ 中最大的 gap 长度小于 aA, 故 $g(E)\subseteq E_{11}\cup E_{12}\subseteq E_1$, 矛盾.

(2) $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_2$. 下证 $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_{21}\cup E_{22}$ 或 $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_{23}$.

假设上述结论不成立, 则 $g(E_1\cup E_2)$ 中最大 gap 的长度不小于 $E_{21}\cup E_{22}$ 与 E_{23} 的距离, 即 $|\rho_g|\cdot aA\ge bA$, 从而 $|\rho_g|\ge\frac{b}{a}$. 另一方面, 又由 $g(E_1\cup E_2)\subseteq E_2$ 知 $|\rho_g|\cdot(b+a(1-b))\le b$, 从而 $\frac{b}{a}(b+a(1-b))\le b$, 得 $b(1-a)\le 0$, 矛盾.

下面分别讨论上述两种情况.

情况 1 $g(E_1 \cup E_2) \subseteq E_{21} \cup E_{22} = f_2(E_1 \cup E_2)$. 由上式知 $|\rho_g| \leq b$. 因为 $E_1 \cup E_2$ 不对称, 故若 $|\rho_g| = b$, 则导致 $g = f_2$, 与假设不符, 故有 $|\rho_g| < b$. 从而 $g(E)$ 中最大 gap 长度小于 aA, 故 $g(E) \subseteq E_{11} \cup E_{12} \subseteq E_1$ 或 $g(E) \subseteq E_2$, 矛盾.

情况 2 $g(E_1 \cup E_2) \subseteq E_{23}$. 下证 $g(E_3) \subseteq E_{23}$. 否则 $g(E)$ 的最大 gap 长度不小于 bA, 即 $|\rho_g| \cdot A \geq bA$, 推出 $|\rho_g| \geq b$. 由 $g(E_1 \cup E_2) \subseteq E_{23}$ 知 $|\rho_g|(b + a(1-b)) \leq b^2$. 从而 $b(b + a(1-b)) \leq b^2$, 矛盾. 故 $g(E) \subseteq E_{23} \subseteq E_2$, 矛盾.

由反证法, (2.1) 式获证.

参 考 文 献

[1] Feng Dejun, Wang Yang. On the structure of generating iterated function systems of Cantor sets [J]. Adv. Math., 2009, 222: 1964–1981.

[2] Hutchinson J E. Fractals and self-similarity [J]. Indiana Univ. Math. J., 1981, 30: 713–747.

[3] Deng Qirong, Lau Ka-Sing. On the equivalence of homogeneous iterated function systems [J]. Nonlinearity, 2013, 26: 2767–2775.

[4] Deng Qirong, Lau Ka-Sing. Structure of the class of iterated function systems that generate the same self-similar set [J]. J. Fractal Geom., 2017, 4: 43–71.

[5] Yao Yuanyuan. Generating iterated function systems of some planar self-similar sets [J]. J. Math. Anal. Appl., 2015, 421: 938–949.

[6] Yao Yuanyuan. Generating iterated function systems for self-similar sets with a separation condition [J]. Fund. Math., 2017, 237: 127–133.

[7] Deng Guotai, He Xinggang, Wen Zhiying. Self-similar structure on intersections of triadic Cantor sets [J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 337: 617–631.

[8] Yao Yuanyuan, Li Wenxia. Generating iterated function systems for a class of self-similar sets with complete overlap [J]. Publ. Math. Debrecen., 2015, 87(1-2): 23–33.

GENERATING ITERATED FUNCTION SYSTEMS FOR A CLASS OF NON-HOMOGENEOUS SELF-SIMILAR SETS WITH COMPLETE OVERLAP

PAN Yan[1], YAO Yuan-yuan[2]

(*1. School of Economics & Management, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China*)

(*2. School of Science, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China*)

Abstract: This paper investigates all the generating iterated function systems for a class of non-homogeneous self-similar set with complete overlap. By using some gap properties of these self-similar sets, we derive all their generating iterated function systems, which improves the main result of [8].

Keywords: complete overlap; self-similar set; iterated function system

2010 MR Subject Classification: 28A80; 28A78