Vol. 38 (2018)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一组带扰积分算子 M-P 逆的抗扰投影逼近

高 洁

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了一类算子方程及其扰动系统计算格式面临的格式扰动问题. 利用最小二乘投影的方法, 获得了最佳逼近解的投影近似格式经得起稳定扰动取决于 λ 的选取这一结果. 推广了从特殊算子到一般有限秩算子这一结果.

关键词: 算子方程; 稳定扰动; 最小二乘投影法; 计算格式; 特征值

MR(2010) **主题分类号**: 47A55; 47A58; 15A09 **中图分类号**: O241.2; O241.5

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)04-0751-10

1 引言

考虑第一类算子方程

$$T\varphi = f, \tag{1.1}$$

其中 $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $f \in Y$ 是已知项, $\varphi \in X$ 为未知项, 这里 $\mathcal{B}(X, Y)$ 表示 Hilbert 空间 X 和 Y 之间的全体有界线性算子所组成的 Banach 空间, 并以 $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{R}(T)$, $\mathcal{N}(T)$ 分别表示 T 的定义域, 值域, 零空间.

方程 (1.1) 不一定有解, 即使有解也不一定是唯一的. 因此, 考虑方程 (1.1) 的最佳逼近解 $\varphi_\infty = T^\dagger f$, 其中 $T^\dagger$ 是 T 的 Moore-Penrose 广义逆. 人们感兴趣的是 $\dim X = \infty$ 时 φ_∞ 的有限维投影逼近问题. 为此, 取完备 (正交) 投影格式 $(X, \{X_n\}; Y, \{Y_n\})$, 即, $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 分别是 X 和 Y 上的有限维子空间序列, 满足

$$\operatorname*{s\text{--}lim}_{n\to\infty} P_{X_n} = I_X, \qquad \operatorname*{s\text{--}lim}_{n\to\infty} Q_{Y_n} = I_Y,$$

其中 $P_n : X \to X_n$, $Q_n : Y \to Y_n$ 为正交投影算子, 而 I_X 和 I_Y 分别表示 X 上和 Y 上的恒等算子. 考虑方程 (1.1) 的有限维投影近似系统

$$T_n\varphi_n = f_n \quad (\varphi_n \in X_n), \tag{1.2}$$

其中 $T_n := Q_nTP_n : X_n \to Y_n$, $f_n = Q_nf$. 我们感兴趣的是 $\varphi_n := T_n^\dagger f_n$ 能否逼近 $\varphi_\infty := T^\dagger f$ 的问题, 文献 [1–8] 系统的研究了上述问题, 给出了 $T^\dagger$ 的投影逼近格式 $\{T_n^\dagger\}$ 强收敛和弱收敛的充要条件.

对于方程 (1.1), 还会不可避免的出现扰动问题

$$(T + S)\varphi = f, \tag{1.3}$$

*收稿日期: 2017-04-09 接收日期: 2017-06-20

作者简介: 高洁 (1991–), 男, 湖北荆州, 硕士, 主要研究方向: 不适定问题与广义逆理论.

其中 $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ 适合

$$\|S\|\|T^\dagger\| < 1 \quad 且 \quad \mathcal{R}(T+S) \cap \mathcal{R}(T)^\perp = \{0\} \text{ (稳定扰动条件)}. \tag{1.4}$$

文献 [9–20] 对扰动问题 (1.3) 已经作出了系统分析, 给出了稳定扰动的一系列刻画.

本文关心的是 $T^\dagger$ 的投影逼近格式 $\{T_n^\dagger\}$ 的强收敛性是否经得起稳定扰动. 即若 S 适合 (1.4) 式, 是否有

$$(T_n + S_n)^\dagger \xrightarrow{\mathbf{s}} (T+S)^\dagger (n \to \infty),$$

其中 $S_n := Q_n S P_n$. 这是方程 (1.1) 的计算格式 $\{T_n^\dagger\}$ 及其扰动系统 (1.3) 的计算格式 $\{(T_n + S_n)^\dagger\}$ 所面临的格式扰动基本问题. 文献 [21–27] 对上述问题在 T 是单射的情况下给出了一些零散的结果, 这些结果有些只能适用于 T 的定义空间 X 是有限维的情形 [26], 鉴于上述问题在一般情形下是一个非常困难的问题, 难以给出统一的判断条件, 本文考虑一个特定的积分算子

$$K\varphi(x) := \int_{-1}^{1} (x-y)\varphi(y)dy, \tag{1.5}$$

研究 (1.5) 引出的第一类算子方程和第二类算子方程的计算格式所面临的格式扰动基本问题, 给出了完整的收敛性分析.

本文以下由三节组成: 第二节研究由积分算子 (1.5) 引出的第一类算子方程; 第三节研究了由积分算子 (1.5) 引出的第二类算子方程; 最后一节是结论和评注.

2 第一类算子方程

考虑由积分算子 (1.5) 引出的第一类算子方程

$$K\varphi := \int_{-1}^{1} (x-y)\varphi(y)dy = f, \tag{2.1}$$

这里 $K : L^2_{\mathbb{C}}[-1,1] \to L^2_{\mathbb{C}}[-1,1]$ 为紧算子, 满足

$$\mathcal{R}(K) = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{C}\}, \ \dim \mathcal{R}(K) = 2 < \infty,$$
$$\mathcal{N}(K) = \left\{\varphi \in L^2[-1,1] \middle| \int_{-1}^{1} \varphi(y)dy = \int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy = 0\right\}, \ \dim \mathcal{N}(K) = \infty.$$

还易知对任意的 $f = ax + b \in \mathcal{R}(T)$, 方程 (2.1) 有如下最佳逼近解

$$K^\dagger (ax+b) = \frac{1}{2}a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3}{n\pi} \sin \pi n x \cdot b.$$

取 X_n 为

$$X_n = \mathbf{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-in\pi x}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi x}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi x}, \cdots, , \frac{1}{\sqrt{2}}e^{in\pi x}\right\},$$

对任意的 $f \in Y$, 此时方程 (2.1) 在 X_n 上的最佳逼近解为

$$K_n^\dagger f = \frac{\pi \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot \sin k\pi x}{k}}{4\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \int_{-1}^{1} f(y)dy + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} yf(y)dy,$$

其中 $K_n := KP_{X_n}$. 当方程有扰动 $S \in \mathcal{B}(X)$ 时, 若 S 适合条件 (1.4), 有如下定理.

定理 2.1　对上述积分方程 (2.1), 考虑形如 (1.2) 的投影方程, 其中 X_n 如上所述, $K_n = KP_{X_n}$, 那么 $K_n^\dagger \xrightarrow{\|\cdot\|} K^\dagger (n \to \infty)$; 进一步, 若 S 适合条件 (1.4), 则

$$((K+S)P_{X_n})^\dagger \xrightarrow{\|\cdot\|} (K+S)^\dagger \ (n \to \infty).$$

证　令 $\|M\| := \|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin \pi kx/k\| < \infty$, 那么对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\|(KP_{X_n})^\dagger\| &= \sup_{\|f\|=1} \|(KP_{X_n})^\dagger f\|_{L^2} \\ &< \sup_{\|f\|=1} \left(\frac{\pi}{4}\|M\|\|\int_{-1}^{1} f(y)dy\| + \frac{3}{4}\|\int_{-1}^{1} yf(y)dy\|\right) < \infty.\end{aligned}$$

对任意的 $\varphi \in L^2_{\mathbb{C}}[-1,1]$, 有

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle \varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi nx} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi nx} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n e^{i\pi nx},$$

那么 $T\varphi = ax+b$, 其中 $a = \varphi_0$, $-b = 1/(\pi i)\sum\limits_{n\neq 0}((-1)^n \cdot \varphi_n)/n$, 且 $\varphi = 1/2a + 1/2\sum\limits_{n \neq 0} \varphi_n e^{i\pi nx}$.

由于 $P_{X_n}\varphi = 1/2\sum\limits_{k=-n}^{n} \varphi_k \cdot e^{i\pi kt}$, 那么 $KP_{X_n}\varphi = a_1 x + b_1$, 其中

$$a_1 = a, \ \ b_1 = 1/(\pi i)\sum_{k=-n}^{n} ((-1)^k \varphi_k)/k.$$

再由 $f = ax+b$, 那么

$$\begin{aligned}\|K - KP_{X_n}\|_{L^2}^2 &= \sup_{\varphi\neq 0} \frac{\|(K-KP_{X_n})\varphi\|_{L^2}^2}{\|\varphi\|_{L^2}^2} = \sup_{\varphi \neq 0}\frac{\|b-b_1\|_{L^2}^2}{\|\varphi\|_{L^2}^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2}\sup_{\varphi\neq 0} \frac{\left\|\sum\limits_{|k|\geq n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \varphi_k}{k}\right\|_{L^2}^2}{\|\varphi\|_{L^2}^2} \leq \frac{1}{\pi^2}\sup_{\varphi \neq 0}\frac{\sum\limits_{|k|\geq n+1}^{+\infty} \left|\frac{\varphi_k}{k}\right|_{L^2}^2}{\|\varphi\|_{L^2}^2} \\ &< \frac{1}{\pi^2}\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}\left(\sum\limits_{k\neq 0}|\varphi_k|_{L^2}^2 + a^2\right)}{\|\varphi\|_{L^2}^2} = \frac{4}{\pi^2(n+1)^2},\end{aligned}$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\|K - KP_{X_n}\| = 0$.

令 $A_n = 2/\pi \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k^2$, $B_n x = \sum\limits_{k=1}^{n}\left((-1)^k \sin k\pi x\right)/k$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \pi/3 = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left((-1)^k \sin k\pi x\right)/k = Bx$, 利用 $f = ax+b$, 那么

$$\begin{aligned}\|K^\dagger - K_n^\dagger\| &= \sup_{\substack{f\in D(K^\dagger)\\ \|f\|=1}} \|\left(K^\dagger - (KP_{X_n})^\dagger\right) P_{\mathcal{R}(K)} f\| \\ &= \sup_{\substack{f\in D(K^\dagger)\\ \|f\|=1}} \|\left(\frac{B_n x}{A_n} - \frac{Bx}{A}\right)\cdot b\| \\ &\le \sup_{\substack{f\in D(K^\dagger)\\ \|f\|=1}} \frac{\|A\|\|B_n x - Bx\| + \|Bx\|\|A_n - A\|}{\|A_n\|\|A\|}\cdot\|b\|,\end{aligned}$$

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\|K^\dagger - (KP_{X_n})^\dagger\| = 0$.

下面考虑有扰动的算子的抗扰稳定性问题, 即对任意的 $S\in\mathcal{B}(X)$, 满足条件 (1.5). 令 $\widetilde{K} = K + S$, 由文献 [18] 定理 4 可知 $\|\widetilde{P} - P\| < 1$, 其中 $\widetilde{P}$, P 分别是 Y 到 $\mathcal{R}(K)$ 及 $\mathcal{R}(K)$ 上的正交投影. 再根据文献 [28] 可知 $\dim\mathcal{R}(\widetilde{K}) = \dim\mathcal{R}(K) = 2 < \infty$, 即 $\widetilde{K}$, K 都是有限秩算子, 那么 $S = \widetilde{K} - K$ 也是有限秩算子, 即 $\dim\mathcal{R}(S) < +\infty$, 再利用文献 [29] 引理 4.2.1, 那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|S_n - S\| = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\widetilde{K}_n - \widetilde{K}\| = 0$.

下面计算 $\widetilde{K}^\dagger$ 和 $\widetilde{K}_n^\dagger$. 由于 $\mathcal{R}(\widetilde{K})\bigcap\mathcal{R}(K)^\perp = \{0\}$, 利用文献 [11] 定理 1 可知

$$\widetilde{K}^\dagger = (I_X - O(Q))\left(I_X + K^\dagger S\right)^{-1} K^\dagger O\left(\widetilde{K}B\right),$$

其中 $Q = \left(I_X + K^\dagger S\right)^{-1}\left(I_X - K^\dagger K\right)$, $B = \left(I_X + K^\dagger S\right)^{-1} K^\dagger$, 这里 $O(Q)$, $O(\widetilde{K}B)$ 表示从 X 到 $\mathcal{R}(Q)$ 和从 X 到 $\mathcal{R}(\widetilde{K}B)$ 的正交投影, 即

$$O(Q) = -Q(I - Q - Q^*)^{-1},\ O(\widetilde{K}B) = -(\widetilde{K}B)\left(I - (\widetilde{K}B) - (\widetilde{K}B)^*\right)^{-1},$$

那么

$$\|\widetilde{K}^\dagger\| \le \frac{\|K^\dagger\|}{1 - \|K^\dagger\|\|S\|} < +\infty.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\widetilde{K}_n - \widetilde{K}\| = 0$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\|\widetilde{K}_n - \widetilde{K}\| < \frac{1}{\|\widetilde{K}^\dagger\|}$, 即 $\|\widetilde{K}_n - \widetilde{K}\|\|\widetilde{K}^\dagger\| < 1$.

由于 $\mathcal{R}(\widetilde{K}_n)\subset\mathcal{R}(\widetilde{K})$, 那么 $\mathcal{R}(\widetilde{K}_n)\bigcap\mathcal{R}(\widetilde{K})^\perp = \{0\}$, 利用文献 [11] 定理 1 可知存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\widetilde{K}_n^\dagger = (I_X - O(Q_1))\left(I_X + \widetilde{K}^\dagger(\widetilde{K}_n - \widetilde{K})\right)^{-1}\widetilde{K}^\dagger O\left(\widetilde{K}_n B_1\right),$$

其中

$$Q_1 = \left(I_X + \widetilde{K}^\dagger(\widetilde{K}_n - \widetilde{K})\right)^{-1}\left(I_X - \widetilde{K}^\dagger\widetilde{K}\right),\ B_1 = \left(I_X + \widetilde{K}^\dagger(\widetilde{K}_n - \widetilde{K})\right)^{-1}\widetilde{K}^\dagger,$$

$$\|\widetilde{K}_n^\dagger - \widetilde{K}^\dagger\| \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{\|\widetilde{K}^\dagger\|^2\|\widetilde{K}_n - \widetilde{K}\|}{1-\|\widetilde{K}^\dagger\|\|\widetilde{K}_n - \widetilde{K}\|} < +\infty,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\widetilde{K}_n^\dagger - \widetilde{K}^\dagger\| = 0$.

3 第二类算子方程

对 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, 考虑第二类算子方程

$$T\varphi := (\lambda I - K)\varphi = \lambda\varphi - x\cdot\int_{-1}^{1}\varphi(y)dy + \int_{-1}^{1}y\varphi(y)dy = f. \tag{3.1}$$

易知

$$\mathcal{N}(T) = \left\{ax+b \,\middle|\, a,b\in\mathbb{C}, \begin{bmatrix}\lambda & -2\\ \frac{2}{3} & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right\}, \qquad \mathcal{R}(T) = L^2_{\mathbb{C}}[-1,1],$$

且

$$\dim\mathcal{N}(\lambda I - K) = \begin{cases}0, & \lambda \ne \pm 2i/\sqrt{3},\\ 1, & \lambda = \pm 2i/\sqrt{3}.\end{cases}$$

并令 $T_n := TP_{X_n},\quad n\in\mathbb{N}$, 其中 $\{X_n\}$ 是 X 的一列适当的有限维子空间.

显然, 当 $\lambda \ne 0,\ \pm 2i/\sqrt{3}$ 时, 算子 T 是双射, 利用 Banach 逆算子定理和 Neumann 级数, 易说明最佳逼近解的投影逼近格式经得起稳定扰动, 即

$$((T+S)P_{X_n})^{-1} \xrightarrow{\mathbf{s}} (T+S)^{-1}\ (n\to\infty).$$

注 3.1 注意, 算子 T 为双射时, 此时子空间的选取如下

$$X_n = \mathbf{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-in\pi x},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi x},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi x},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{in\pi x}\right\},$$
$$Y_n = \mathbf{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-in\pi y},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi y},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi y},\cdots,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{in\pi y}\right\}.$$

对任意的 $f\in Y$, 方程 (3.1) 的解为

$$T^{-1}f = \frac{1}{\lambda}f(x) + \int_{-1}^{1}\frac{(-6xy-2)\frac{1}{\lambda}+3x-3y}{3\lambda^2+4}f(y)dy.$$

相应的投影解为

$$(TP_{X_n})^{-1}f = \sum_{k\ne 0}\left(2\sum_{m\ne 0}\frac{(-1)^{m+k}}{mk\pi^2\overline{\lambda}^2M}e^{ik\pi x} + \frac{1}{2\overline{\lambda}}e^{ik\pi x} - \frac{(-1)^k}{k\pi\overline{\lambda}M}\right)\cdot\int_{-1}^{1}e^{ik\pi y}f(y)dy$$
$$+\left(\sum_{k\ne 0}\frac{(-1)^k}{k\pi\overline{\lambda}M}e^{ik\pi x} + \frac{1}{2M}\right)\cdot\int_{-1}^{1}f(y)dy,$$

其中 $M = \overline{\lambda} + 8/(\overline{\lambda}\pi^2)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}1/k^2$.

当 $\lambda = \pm 2i/\sqrt{3}$ 时, 此时 $\dim \mathcal{N}(T) = 1$, $\dim \mathcal{R}(T) = \infty$. 易知

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n + S_n) - (T + S)\| = 0$$

将不会恒成立, 即条件 (1.4) 将无法再保证, 而 Banach 逆算子定理和 Neumann 级数仅适用于单射的情形. 为了研究问题, 必须讨论稳定性条件

$$\sup_n \|(T_n + S_n)^\dagger\| < \infty$$

是否成立, 根据文献 [4] 定理 1.1, 这只需判断, 是否存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得条件 $\mathcal{N}(T+S) \subset X_n$ 成立. 一般地, 上述条件成立有赖于 $\{X_n\}$ 的选取. 在此我们给出 $\{X_n\}$ 的一种选法使上式不成立, 从而说明此时方程 (3.1) 的收敛的投影近似格式经不起稳定扰动.

取 X_n, Y_n 为

$$\begin{aligned} X_n &= \mathbf{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}P_0(x), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}P_1(x), \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}P_2(x), \cdots, \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(x)\right\}, \\ Y_n &= \mathbf{span}\left\{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}P_0(y), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}P_1(y), \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}P_2(y), \cdots, \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n(y)\right\}, \end{aligned}$$

其中

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}.$$

对任意的 $f \in Y$, 若 $\lambda = -2i/(\sqrt{3})$, 此时方程的投影解为

$$\begin{aligned} (TP_{X_n})^\dagger f =& \frac{\sqrt{3}}{16}(-i+\sqrt{3}x)\int_{-1}^{1} f(y)dy - \frac{3}{16}(1+\sqrt{3}ix)\int_{-1}^{1} yf(y)dy \\ &- \frac{\sqrt{3}}{4}i\sum_{k=2}^{n}\int_{-1}^{1}(2k+1)P_k(y)f(y)dy. \end{aligned}$$

若 $\lambda = 2i/(\sqrt{3})$, 此时方程的投影解为

$$\begin{aligned} (TP_{X_n})^\dagger f =& \frac{\sqrt{3}}{16}(i-\sqrt{3}x)\int_{-1}^{1} f(y)dy + \frac{3}{16}(1+\sqrt{3}ix)\int_{-1}^{1} yf(y)dy \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{4}i\sum_{k=2}^{n}\int_{-1}^{1}(2k+1)P_k(y)f(y)dy. \end{aligned}$$

进一步, 对任意的 $S \in \mathcal{B}(X)$, 若条件 (1.4) 成立, 如下定理成立.

定理 3.1 对上述积分方程 (3.1), 考虑形如 (1.2) 的投影方程, 其中 X_n, Y_n 如上所述, 那么对任意的 $f \in Y$, 有

$$(TP_{X_n})^\dagger \xrightarrow{\mathbf{s}} T^\dagger \ (n \to \infty).$$

从而积分方程 (3.1) 的最佳逼近解如下: 对任意的 $f \in Y$,

若 $\lambda = -2i/(\sqrt{3})$, 此时

$$\begin{aligned} T^\dagger f =& \frac{\sqrt{3}}{16}(-i+\sqrt{3}x)\int_{-1}^{1} f(y)dy - \frac{3}{16}(1+\sqrt{3}ix)\int_{-1}^{1} yf(y)dy \\ &- \frac{\sqrt{3}}{4}i\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-1}^{1}(2n+1)P_n(y)f(y)dy; \end{aligned}$$

若 $\lambda = 2i/(\sqrt{3})$, 此时

$$\begin{aligned} T^\dagger f =& \frac{\sqrt{3}}{16}(i-\sqrt{3}x)\int_{-1}^{1} f(y)dy + \frac{3}{16}(1+\sqrt{3}ix)\int_{-1}^{1} yf(y)dy \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{4}i\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-1}^{1}(2n+1)P_n(y)f(y)dy. \end{aligned}$$

但是, 若 S 适合条件 (1.4), 此时 $((T+S)P_{X_n})^\dagger \overset{\mathbf{s}}{\nrightarrow} (T+S)^\dagger$ $(n\to\infty)$.

证 由于 $\mathcal{N}(T)\subset X_1$, 利用文献 [4] 定理 1.1 可知

$$(TP_{X_n})^\dagger \xrightarrow{\mathbf{s}} T^\dagger \ (n\to\infty).$$

(i) 若 $\lambda = -2i/(\sqrt{3})$, 此时

$$\begin{aligned} T^\dagger f =& \frac{\sqrt{3}}{16}(-i+\sqrt{3}x)\int_{-1}^{1} f(y)dy - \frac{3}{16}(1+\sqrt{3}ix)\int_{-1}^{1} yf(y)dy \\ &- \frac{\sqrt{3}}{4}i\sum_{n=2}^{\infty}\int_{-1}^{1}(2n+1)P_n(y)f(y)dy. \end{aligned}$$

(ii) 若 $\lambda = 2i/(\sqrt{3})$, 此时

$$\begin{aligned} T^\dagger f =& \frac{\sqrt{3}}{16}(i-\sqrt{3}x)\int_{-1}^{1} f(y)dy + \frac{3}{16}(1+\sqrt{3}ix)\int_{-1}^{1} yf(y)dy \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{4}i\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{-1}^{1}(2n+1)P_n(y)f(y)dy. \end{aligned}$$

下面考虑扰动的情况, 当 $S\in\mathcal{B}(X)$, 下面给出反例, 说明在不补充其他条件的情况下, 经不起稳定扰动, 请看下面的反例.

对任意的 $\varphi\in L^2_{\mathbb{C}}[-1,1]$, 任意的充分小的正数 ε, 令扰动算子

$$S(\varphi) = \varepsilon\varphi - \pi\varepsilon\sin\pi x\int_{-1}^{1}\varphi(y)dy - \left[\frac{(\lambda+\varepsilon)^2}{4(\varepsilon+\frac{1}{3})}+1\right]\int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy,$$

那么 $S\in\mathcal{B}(X,Y)$, 且对充分小的 ε, 满足条件 (1.4), 那么

$$(T+S)(\varphi) = (\lambda+\varepsilon)x - (x+\varepsilon\pi\sin\pi x)\int_{-1}^{1}\varphi(y)dy - \frac{(\lambda+\varepsilon)^2}{4(\varepsilon+\frac{1}{3})}\int_{-1}^{1} y\varphi(y)dy,$$

由于

$$\mathcal{N}(T+S)=\left\{\frac{x+\varepsilon\pi\sin\pi x}{\lambda+\varepsilon}a+\frac{\lambda+\varepsilon}{4(\varepsilon+\frac{1}{3})}b\middle|a(\lambda+\varepsilon)-\frac{(\lambda+\varepsilon)^2}{2(\varepsilon+\frac{1}{3})}b=0\right\},$$

且 $\dim\mathcal{N}(T+S)=1$, 但此时不存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $\mathcal{N}(T+S)\subset X_n$, 由文献 [4] 定理 1.1 可知稳定性条件不满足, 即

$$((T+S)P_{X_n})^\dagger \stackrel{\mathbf{s}}{\nrightarrow} (\lambda I-T+S)^\dagger(n\to\infty).$$

4 总结

对方程 (1.5) 引出的第一类算子方程 (2.1), 我们得到了定理 (2.1). 实际上, 对于一般的有限秩算子, 定理 (2.1) 的结论也是成立的, 我们有如下的结论.

结论 4.1 对积分方程 (1.1), 设 $\dim\mathcal{R}(T)<\infty$, 考虑形如 (1.2) 式的投影方程, 其中 $\{X_n\}$ 是 X 的一列有限维子空间, $T_n:=TP_{X_n}$, 且 $\{X_n\}$ 满足

$$\dim X_n<+\infty,\qquad X_0\subset X_1\subset X_2\subset\cdots,\ \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}X_n}=X,$$

$(X,\{X_n\})$ 为完备 (正交) 投影格式. 那么对任意的 $f\in Y$, 有 $T_n^\dagger\xrightarrow{\|\cdot\|}T^\dagger(n\to\infty)$; 进一步, 若 S 适合条件 (1.4), 那么

$$((T+S)P_{X_n})^\dagger\xrightarrow{\|\cdot\|}(T+S)^\dagger(n\to\infty).$$

注 4.1 上述结论 4.1, 仅仅只能适用于有限秩算子, 但是对于一般的无限维算子, 这个结论是不能成立的.

实际上, 这两种情况就是讨论了第二类积分方程中 λ 的选取问题, 情况一实际上讨论了 $\lambda=0$, 情况二中讨论 λ 是否为算子 K 的特征值的情况, 这说明针对于算子 (1.5), 第二类积分方程的最佳逼近解的投影逼近格式是否经得起稳定扰动, 与 λ 的选取有关. 因此可以给出如下的推论.

结论 4.2 已知积分算子 (1.5), 设第二类积分方程

$$T\varphi:=(\lambda I-K)\varphi=\lambda\varphi-x\cdot\int_{-1}^{1}\varphi(y)dy+\int_{-1}^{1}y\varphi(y)dy=f. \tag{4.1}$$

考虑形如 (1.2) 式的投影方程, 其中 $\{X_n\}$ 是 X 的一列有限维子空间, $T_n:=TP_{X_n}$, 且 $\{X_n\}$ 满足

$$\mathbf{dim}X_n<+\infty,\qquad X_0\subset X_1\subset X_2\subset\cdots,\qquad \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty}X_n}=X,$$

$(X,\{X_n\})$ 为完备 (正交) 投影格式, 对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 满足稳定性条件: $\sup\limits_{n\to\infty}\|T_n^\dagger\|<\infty$. 令 $\widetilde{T}:=T+S\in\mathcal{B}(X,Y)$, 其中 $S\in\mathcal{B}(X,Y)$ 是任意充分小的扰动算子, 适合条件 (1.4), 那么有如下结论

(1) 若 $\lambda\neq\pm2i/\sqrt{3}$, 最佳逼近解的投影逼近格式经得起稳定扰动;

(2) 若 $\lambda=\pm2i/\sqrt{3}$, 最佳逼近解的投影逼近格式经不起稳定扰动.

参 考 文 献

[1] Du Nailin. The basic principles for stable approximations to orthogonal generalized inverses of linear operators in Hilbert spaces[J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 2005, 26(6): 675–708.

[2] Du Nailin. Finite-dimensional approximation settings for infinite-dimensional Moore-Penrose inverses[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2008, 46(3): 1454–1482.

[3] Du Sukai, Du Nalin. On the two mutually independent factors that determine the convergence of least-squares projection method[J]. Arxiv: 1406.0578, 2014.

[4] Du Sukai. On convergence conditions of Least-squares projection method for operator equations of the second kind[J]. J. Math., 2017, 37(2): 291-300.

[5] Kindermann S. Projection methods for ill-posed problems revisited[J]. Comput. Meth. Appl. Math., 2016, 16(2): 257–276.

[6] Kulkarni S H, Nair M T, Ramesh G. Some properties of unbounded operators with closed range[J]. Proc. Math. Sci., 2008, 118(4): 613–625.

[7] Kulkarni S H, Ramesh G. Projection methods for computing Moore-Penrose inverses of unbounded operators[J]. Indian J. Pure Appl. Math., 2010, 41(5): 647–662.

[8] 邱仁军. 闭值域稠定闭算子的 Moore-Penrose 广义逆的有限维逼近 [J]. 数学学报, 2016, 59(6): 835–846.

[9] Chen Guoliang, Wei Yimin, Xue Yifeng. Perturbation analysis of the least squares solution in Hilbert spaces[J]. Linear Alg. Appl., 1996, 244: 69–80.

[10] Chen Guoliang, Xue Yifeng. Perturbation analysis for the operator equation $Tx = b$ in Banach spaces[J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, 212(1): 107–125.

[11] Chen Guoliang, Xue Yifeng. The expression of the generalized inverse of the perturbed operator under Type I perturbation in Hilbert spaces[J]. Linear Alg. Appl., 1998, 285(1-3): 1–6.

[12] 陈果良, 薛以峰. Hilbert 空间中稳定扰动下广义逆的误差估计界 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2002(3): 1–6.

[13] Ding Jiu, Huang L J. On the perturbation of the least squares solutions in Hilbert spaces[J]. Linear Alg. Appl., 1994, 212-213(1): 487–500.

[14] Du Fapeng, Xue Yifeng. Note on stable perturbation of bounded linear operators on Hilbert spaces[J]. Clin. Exper. Pharm. Phys., 2011, 3(2):327–328.

[15] Huang Qianglian, Ma Jipu. A Note on the Continuity of Moore-Penrose Inverses $T^{\dagger}$[J]. Math. Appl., 2006, 19(4): 776–781.

[16] 马吉溥. 关于 $R(Ax)$ 闭的连续算子族 Ax 的 Moore-Penrose 广义逆 $A^{\dagger}x$ 连续的充要条件 [J]. 中国科学: 数学物理学天文学技术科学, 1990, 6: 561–568.

[17] 马吉溥. 扰动后算子广义逆连续的新特征 [J]. 淮海工学院学报 (自然科学版), 2005, 14(1): 1–3.

[18] Xue Yifeng, Chen Guoliang. Some equivalent conditions of stable perturbation of operators in Hilbert spaces[J]. Appl. Math. Comput., 2004, 147(3): 765–772.

[19] Xu Qingxiang, Sheng Lijuan. Positive semi-definite matrices of adjointable operators on Hilbert C-modules[J]. Linear Alg. Appl., 2008, 428(4): 992–1000.

[20] Xu Qingxiang, Wei Yimin, Gu Yangyang. Sharp Norm-Estimations for Moore-Penrose Inverses of Stable Perturbations of Hilbert C^{*}-Module Operators[J]. Siam J. Numer. Anal., 2010, 47(47): 4735–4758.

[21] Plato R, Vainikko G. On the regularization of projection methods for solving III-posed problems[J]. Numer. Math., 1990, 57(1): 63–79.

[22] Khyamarik U A. Projection methods for regularization of linear ill-posed problems[J]. The. Meth. Solv. Ill-Posed Prob. Appl., 1983: 79–81.

[23] Khyamarik U A. The discrepancy principle for the choice of the dimension for the solution of ill-posed problems by projection methods[J]. Acta Comment. Univ. Tart., 1984, 672: 27–34.

[24] Vainikko G M, Khyamarik U A. Projection methods and self-regularization in ill-posed problems[J]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 1985, 10: 3–17.

[25] Khyamarik U A. On the self-regularization by solving ill-posed problems by projection methods[J]. Acta Comment. Univ. Tart., 1990, 913: 65–72.

[26] Khyamarik U A. On the discretization error in regularized projection methods with parameter choice by discrepancy principle[J]. Ill-Posed Prob. Nat. Sci., 1992: 24–29.

[27] Khyamarik U A. Self-regularization in solving ill-posed problems by projection methods[J]. Mrs Proc., 2001, 693(8): G482–G484.

[28] Nagy B S. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert[J]. Comment. Math. Helvetici, 1946, 19(1): 347–366.

[29] Groetsch C W. The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations[M]. Boston: Boston Pitman Publication, 1984.

PERTURBED PROJECTION METHODS FOR M-P INVERSES OF INTEGRAL OPERATORS

GAO Jie

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we explore the format perturbation problem in computational scheme of a class of operator equations and its perturbation systems. Through the least squares projection method, we obtain that the projection approximation format of the optimal approximate solution can withstand stable perturbation depending on the selection of λ, which generalizes the result from the special operator to the general finite rank operator.

Keywords: operator equation; stable perturbation; least squares projection method; computational scheme; eigenvalue

2010 MR Subject Classification: 47A55; 47A58; 15A09