Vol. 38 (2018)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类非线性 Schrödinger-Maxwell 方程基态解的存在性

汪敏庆, 黄文念, 方立婉
(广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林 541006)

摘 要: 本文研究了如下 Schrödinger-Maxwell 方程基态解的存在性问题

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = b(x)|u|^{p-1}u + \lambda g(x,u) \text{ in } \mathbb{R}^3, \\ -\triangle\phi = K(x)u^2 \text{ in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0, V(x) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, 且 $V(x) > 0$. 在 K, g, b 满足一定的假设条件下, 且 $0 < p < 1$ 时, 利用变分法和临界点理论, 获得了基态解的存在性. 该结论推广了文献 [7] 的结果.

关键词: Schrödinger-Maxwell 方程; 非线性; 基态解; 变分法; 临界点理论; Nehari 流形
MR(2010) **主题分类号**: 39A23; 58E05 **中图分类号**: O175.25
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)04-0743-08

1 引言及主要结果

考虑以下非线性 Schrödinger-Maxwell 方程基态解的存在性.

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = b(x)|u|^{p-1}u + \lambda g(x,u) \text{ in } \mathbb{R}^3, \\ -\triangle\phi = K(x)u^2 \text{ in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

这样的方程又被称为 Schrödinger-Poisson 方程. 在量子力学中, 该方程可描述带电粒子与电磁场的相互作用 (关于物理方面的更多的描述可详见文献 [1]).

过去的几十年里, 在临界点理论和变分法的帮助下, 类似于系统 (1.1) 的系统的解的存在性、不存在性和多重性得到了广泛的研究, 具体可参考文献 [2–4]. 进一步地, 当 $V(x) \equiv K(x) \equiv 1$, $f(x,u) = |u|^{p-1}u, 1 < p < 5$ 时的情形, 在文献 [5] 中已经得到研究. 无独有偶, 在文献 [6] 中, Sun 运用变形的喷泉定理证明了系统 (1.1) 无穷多解的存在性. 文献 [7] 中, Ma 和 Sun 运用变形的山路定理, 在特定的假设下得到了系统 (1.1) 基态解的存在性. 更多的结论可参阅文献 [8, 9, 10, 11] 等.

对 V, K, b, g 有以下假设

(V) $V(x) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}), \inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3} V(x) \geq a_1 > 0$, 其中 $a_1 > 0$ 是一个常数. 对每一个 $M > 0, \text{meas}\{x \in \mathbb{R}^3, V(x) \leq M\} < \infty$.

(K) $K \in L^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^3$, 有 $K(x) \geq 0$.

(B) $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ 是一个正连续函数, 并且 $b \in L^{\frac{2}{1-p}}$, 其中 $0 < p < 1$.

*收稿日期: 2017-05-09 接收日期: 2017-10-18
基金项目: 广西自然科学基金资助 (2015GXNSFBA139018); 广西师范大学科学研究基金资助 (2014ZD001); 广西师范大学研究生创新项目基金资助 (XYCZ2017074).
作者简介: 汪敏庆 (1992–), 男, 湖北黄冈, 硕士, 主要研究方向: 非线性泛函分析.

(g1) $g(x,u)\in C(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R},\mathbb{R})$, g 在 $x_i\ (i=1,2,3)$ 中是 1 - 周期的, 且 $|g(x,u)|\le C(1+|u|^{q-1})$, 其中 $2<q<6$.

(g2) 当 $u\to 0$ 时, 对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$, 有 $g(x,u)=o(u)$.

(g3) 当 $u\to\infty$ 时, 对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$, 有 $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{g(x,u)}{u^3}=\infty$.

(g4) 对任意的 $(x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, 有 $\frac{1}{4}g(x,u)u-G(x,u)\ge 0$, 其中 $G(x,u)=\displaystyle\int_0^u g(x,s)ds$.

对于系统 (1), 主要的结果如下

定理 1.1 假设 (V), (K), (B), (g1)–(g4) 成立, 则系统 (1.1) 存在一个基态解, 其中 $C>0$ 表示一系列不同的正常数.

2 预备知识及相关引理

定义下列函数空间 $H^1(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3)|\nabla u\in(L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$. 对应的范数为

$$\|u\|_{H^1}:=(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)dx)^{\frac{1}{2}}.$$

定义函数空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3):=\{u\in L^{2^*}(\mathbb{R}^3):\nabla u\in(L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$. 对应范数为

$$\|u\|_{D^{1,2}}:=(\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2)dx)^{\frac{1}{2}}.$$

令

$$E=\{u\in H^1(\mathbb{R}^3):\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx<+\infty\}.$$

则 E 是一个 Hilbert 空间, 对应的内积为

$$(u,v)_E=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)dx,$$

范数为 $\|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}$.

记 $\|\cdot\|$ 为 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 下的范数, $H=H^1_r(\mathbb{R}^3)$ 为 $H(\mathbb{R}^3)$ 空间中径向函数的子空间, 则 H 可以紧嵌入 $L^s(\mathbb{R}^3)$, 其中 $s\in(2,6)$ [16]. 再记

$$S=\inf_{u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3),|u|_6=1}|\nabla u|_2,\gamma_s=\sup_{u\in H^1(\mathbb{R}^3),\|u\|=1}|u|_s,$$

则 E 是连续嵌入到 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中的, $s\in[2,2^*]$, 这里的 $2^*=6$ 是在三维空间里 Sobolev 嵌入的临界指数. 因此, 存在一个常数 $C>0$, 使得

$$\|u\|_{L^s}\le C\|u\|,\forall u\in E,\tag{2.1}$$

其中

$$\|u\|_{L^s}:=(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^s dx)^{\frac{1}{s}},\forall s\in[2,2^*]$$

是在 Lebesgue 空间 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 下的范数.

因为 $K\in L^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, 故对每一个 $u\in E$, 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}Ku^2vdx &\le \left(\int_{\mathbb{R}^3}(Ku^2)^{\frac{6}{5}}dx\right)^{\frac{5}{6}}\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|v|^6)dx\right)^{\frac{1}{6}}\\ &\le C\|u\|_{12/5}^2\|v\|_{\mathcal{D}},\forall v\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3).\end{aligned}\tag{2.2}$$

由 Lax-Milgram 定理 (详见文献 [11]) 可知, 对任意的 $u\in E$, 存在唯一的 $\phi_u\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, 使得

$$-\triangle\phi_u=Ku^2.\tag{2.3}$$

对于 ϕ_u, 可以写成下列积分形式

$$\phi_u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{K(y)u^2(y)}{|x-y|}dy.$$

故由 $x\in\mathbb{R}^3,K(x)\ge 0$ 可知, $\phi_u(x)\ge 0$. 结合 (2.1) 和 (2.2) 式, 有

$$\|\phi_u\|_{\mathcal{D}}\le C\|u\|_{12/5}^2.$$

因此由 Hölder 不等式和 (2.1) 式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_u u^2dx &\le C(\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_u|^6dx)^{\frac{1}{6}}(\int_{\mathbb{R}^3}|u|^{\frac{12}{5}}dx)^{\frac{5}{6}}\\ &\le C\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}\|u\|_{12/5}^2\le C\|u\|_{12/5}^4\le c\|u\|^4.\end{aligned}\tag{2.4}$$

定义泛函 I: $E\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}I(u,\phi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+V(x)u^2)dx-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\phi|^2)dx\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_u u^2dx-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^{p+1}dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)dx.\end{aligned}$$

从上面的讨论可知 I 是 C^1 的, 并且 I 的临界点就是问题 (1.1) 的解. 进一步地, 由 (2.3) 式有

$$\Phi(u)=I(u,\phi)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_u u^2dx-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^{p+1}dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)dx.$$

如果 $u\in E$ 是泛函 Φ 的一个临界点 (也就是 $\Phi'(u)=0$), 则 (u,ϕ_u) 是系统 (1.1) 的一个解. 进一步地, 对任意的 $u,v\in E$, 有

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+V(x)uv)dx+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_u uvdx-\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^{p-1}uvdx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)vdx.$$

特别地,

$$\langle\Phi'(u),u\rangle=\|u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_u u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^{p-1}u^2dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)udx.$$

定义对应的 Nehari 流形为 $\mathcal{N}=\{u\in E:\langle\Phi'(u),u\rangle=0\}$. 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Hilbert 空间, $\{e_j\}$ 为其一组标准正交基, 令 $X_j=\mathrm{span}\{e_j\},Y_k=\bigoplus_{j=0}^k X_j,Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^\infty X_j}$.

定义 2.1 设 E 是一个实 Banach 空间, $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$. 当 $n \to \infty, u_n \in E$ 时, 如果对任意满足

$$\Phi(u_n) \to c, \Phi'(u_n) \to 0$$

的序列 $\{u_n\} \subset X$ 都有收敛的子列, 则称 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

为了证明定理 1.1, 我们将会利用以下形式的山路定理 (详见文献 [12, 13, 14]).

定理 2.2 [12,13,14] 设 E 是一个实 Banach 空间, $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R}), \Phi(0) = 0$, 对任意的 $c > 0$,Φ 满足满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件, 且

(i) 存在 $\rho, \alpha > 0$, 使得 $\Phi|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;

(ii) 存在 $e \in E \backslash B_\rho$, 使得 $\Phi(e) \leq 0$.

则 Φ 有一个临界值 $c \geq \alpha$.

引理 2.3 [15] 对任意的 $2 \leq s < 2^*$, 有 $\beta_k := \sup\limits_{u \in Z_k, \|u\|_E = 1} |u|_{L^s} \to 0, k \to \infty$.

3 定理 1.1 的证明

引理 3.1 若 (V), (K), (B), (g1)–(g4) 成立, $e \in E\backslash\{0\}$, 则

(i) 存在 $\rho, \alpha > 0$, 使得 $\Phi|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$.

(ii) 当 $|t| \to \infty, \Phi(te) = -\infty$.

证 (i) 由假设 (g1), (g2) 可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C(\varepsilon) > 0$, 使得对所有的 $x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}$, 有

$$|g(x,u)| \leq \varepsilon|u| + C(\varepsilon)|u|^{q-1}. \tag{3.1}$$

因此, 由中值定理, 有

$$|G(x,u)| = |G(x,u) - G(x,0)| = \left|\int_0^1 g(x,su)uds\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2 + \frac{C(\varepsilon)}{q}|u|^q. \tag{3.2}$$

由引理 2.3 及 $p \in (0,1)$ 可知, 存在 $R_e > 0$, 使得当 $\|u\| \geq R_e$ 时, 有

$$\frac{|\lambda|\gamma_s^{p+1}}{p+1}|b| \cdot \|u\|^{p+1} \leq \frac{1}{4}\|u\|^2. \tag{3.3}$$

于是, 对于 $u \in Z_k$,$\|u\| \geq R_e$, 有

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u|^{p+1}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u|^{p+1}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} G(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^2 - \frac{\lambda\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda C(\varepsilon)}{q}\|u\|^q \\
&= (\frac{1}{4} - \frac{\lambda\varepsilon}{2})\|u\|^2 - \frac{\lambda\varepsilon}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda C(\varepsilon)}{q}\|u\|^q.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $\varepsilon > 0$ 足够小, 使得 $(\frac{1}{4} - \frac{\lambda\varepsilon}{2}) > 0$, 由于 $q > 2$, 所以有

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{\lambda\varepsilon}{2})\|\rho\|^2 \equiv \alpha > 0, \forall\|u\| = \rho,$$

其中 $\rho=\left[\frac{q}{2\lambda C(\varepsilon)}(\frac{1}{4}-\frac{\lambda\varepsilon}{2})\right]^{\frac{1}{q-2}}$.

(ii) 由 (g3) 可知, 对任意的 $M>0$, 存在 $\xi=\xi(M)>0$, 使得对所有的 $x\in\mathbb{R}^3, |u|>\xi$, 有

$$G(x,u)\geq M|u|^4, \tag{3.5}$$

由 (g1), (g2) 可知, 存在 $M_1=M_1(M)>0$, 使得对所有的 $x\in\mathbb{R}^3, 0<|u|\leq\xi$, 有

$$\frac{|g(x,u)u|}{|u|^2}\leq M_1. \tag{3.6}$$

由 (3.6) 式和中值定理可知, 对所有的 $x\in\mathbb{R}^3, |u|\leq\xi$, 有

$$G(x,u)\leq\frac{M_1}{2}|u|^2. \tag{3.7}$$

令 $\tilde{M}=M|\xi|^2+\frac{M_1}{2}$, 结合 (3.5) 和 (3.7) 式, 有

$$G(x,u)\geq M|u|^4-\tilde{M}|u|^2, (x,u)\in(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

由 (3.8) 式, 有

$$\begin{aligned}\Phi(te)&\leq\frac{1}{2}t^2\|e\|^2+Ct^4\|e\|^4-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)t^{p+1}|e|^{p+1}dx-\lambda Mt^4\|e\|_4^4+\lambda\tilde{M}t^2\|e\|_2^2\\&\leq\frac{1}{2}t^2\|e\|^2+Ct^4\|e\|^4-\lambda Mt^4\|e\|_4^4+\lambda\tilde{M}t^2\|e\|_2^2.\end{aligned}$$

令 M 足够大, 使得 $C\|e\|^4-\lambda M\|e\|_4^4<0$, 则当 $|t|\to\infty$ 时, 有 $\Phi(te)\to-\infty$.

引理 3.2 若 (V), (K), (B), (g1)–(g4) 成立, 则 Φ 满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件.

证 设序列 $\{u_n\}\subset E\backslash 0$ 满足 $\Phi(u_n)\to c>0, \Phi'(u_n)\to 0$. 当 n 充分大时, 有

$$\begin{aligned}&c+1+\|u_n\|\geq\Phi(u_n)-\frac{1}{4}\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle\\=&\frac{1}{2}\|u_n\|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u_n|^{p+1}dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)dx\\&-\frac{1}{4}(\|u_n\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u_n|^{p-1}u_n^2dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_n)u_ndx)\\=&\frac{1}{4}\|u_n\|^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{p+1})\|b\|_2^{1-p}\|u_n\|_2^{p+1}+\lambda(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4}g(x,u_n)u_n-G(x,u_n))dx\\\geq&\frac{1}{4}\|u_n\|^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{p+1})\|b\|_2^{1-p}\|u_n\|_2^{p+1}.\end{aligned}$$

再由 $p\in(0,1)$ 可知, $\{u_n\}$ 在 E 中有界.

在 E 中不妨设 u_n 弱收敛到 u, 则在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ $(s\in(2,6))$ 中, u_n 强收敛到 u, 且有

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^2=&\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(\phi_u u-\phi_{u_n}u_n)(u_n-u)dx\\&+\int_{\mathbb{R}^3}b(x)(|u_n|^{p-1}u_n-|u|^{p-1}u)dx+\lambda\int_{\mathbb{R}^3}(g(x,u_n)-g(x,u))(u_n-u)dx.\end{aligned}$$

显然 $\langle I'(u_n)-I'(u),u_n-u\rangle\to 0$. 由 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(\phi_u u-\phi_{u_n}u_n)(u_n-u)dx\right|\le(|K\phi_{u_n}|_6|u_n|_2+|K\phi_u|_6|u|_2)|u_n-u|_3,\\&\left|\int_{\mathbb{R}^3}b(x)(|u_n|^{p-1}u_n-|u|^{p-1}u)(u_n-u)dx\right|\le|b|_{\frac{2}{1-p}}(|u_n|_2^p+|u|_2^p)|u_n-u|_2,\\&\left|\int_{\mathbb{R}^3}(g(x,u_n)-g(x,u))(u_n-u)dx\right|\le(|g(x,u_n)|_{q+1}^q+|g(x,u)|_{q+1}^q)|u_n-u|_{q+1}.\end{aligned}$$

由 Sobolev 不等式及 E 可以连续嵌入到 $L^s(\mathbb{R}^3)$ $(s\in(2,6))$ 中可知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}K(x)(\phi_u u-\phi_{u_n}u_n)(u_n-u)dx\to 0,\\&\int_{\mathbb{R}^3}b(x)(|u_n|^{p-1}u_n-|u|^{p-1}u)(u_n-u)dx\to 0,\\&\int_{\mathbb{R}^3}(g(x,u_n)-g(x,u))(u_n-u)dx\to 0.\end{aligned}$$

因此 $\|u_n-u\|^2\to 0$.

引理 3.3 假设 (V), (K), (B), (g1)–(g4) 成立, 则对任意的 $u\in E\backslash\{0\}$, 存在 $t_u>0$, 使得 $t_u u\in\mathcal{N}$.

证 对任意给定的 $u\in E\backslash\{0\}$, 由引理 3.1 中的 (ii) 可知, 存在 $R_e>0$, 使得当 $\|te\|\ge R_e$ 时, 有 $\Phi(te)<0$. 同理, 由引理 3.1 中的 (i) 可知, 对于 $t>0$ 足够小时, 有 $\Phi(tu)>0$. 因此, $0<\max\Phi(tu)<\infty$, 对于 $t_u\in\mathbb{R}^+$, 有 $\Phi(t_u u)=\max\Phi_{t\in\mathbb{R}^+}$. 故 $u_0=t_u u$ 是 $\Phi\mid_{\mathbb{R}^+u}$ 的一个临界点, 因此 $\langle\Phi'(u_0),u_0\rangle=0$, 故 $t_u u\in\mathcal{N}$.

引理 3.4 存在 $\alpha_0>0$, 使得对所有的 $u\in\mathcal{N}$, 有 $\|u\|\ge\alpha_0$.

证 因为 $u\in\mathcal{N}$, 故 $\langle\Phi'(u),u\rangle=0$. 令 $\varepsilon>0$ 足够小, 则有

$$\begin{aligned}0&=\|u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_u u^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^{p-1}u^2dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)udx\\&\ge\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^{p-1}u^2dx-\lambda\varepsilon|u|^2-\lambda C(\varepsilon)|u|^q\ge\frac{1}{2}\|u\|^2-C_1\|u\|^q.\end{aligned}$$

因此 $\|u\|\ge\alpha_0>0,u\in\mathcal{N}$, 其中 $\alpha_0=(\frac{1}{2C_1})^{\frac{1}{q-2}}$.

引理 3.5 [16] 设 $r>0$, 如果 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{y\in\mathbb{R}^3}\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx=0,$$

则对于任意的 $s\in(2,6)$, 在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n\to 0$.

定理 1.1 的证明 设 $\{u_n\}\subset\mathcal{N}$ 是 Φ 的一个极小化序列, 且满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件, 则 $\|u_n\|$ 有界. 令 $c_*=\inf\limits_{\mathcal{N}}\Phi,\delta:=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^3}\int_{B_r(y)}|u_n|^2dx$, 则 $\delta>0$. 如若不然, 则 $\delta=0$. 由引理 3.5 可知, 对任意的 $s\in(2,6)$, 在 $L^s(\mathbb{R}^3)$ 中有 $u_n\to 0$. 从而当 $n\to\infty$ 时, 有 $\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u_n)u_n=o(\|u_n\|)$.

因此有

$$\begin{aligned}o(\|u_n\|) =&\langle \Phi'(u_n), u_n\rangle\\ =&\|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} b(x)|u_n|^{p-1}u_n^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^3} g(x,u_n)u_n dx\\ \geq&\|u_n\|^2 - o(\|u_n\|).\end{aligned}$$

故 $\|u_n\| \to 0$, 这与引理 3.4 相矛盾, 故 $\delta > 0$. 因此存在 $r, \delta > 0, \{y_n\} \subset \mathbb{Z}^3$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \int_{B_r(y)} |u_n|^2 dx \geq \delta > 0.$$

由 (V), (g1) 可知, 存在 $u \in \mathcal{N}$, 使得 $u_n \rightharpoonup u \neq 0$, 则 $\Phi'(u) = 0$. 由于 $u \in \mathcal{N}$, 所以 $\Phi(u) \geq c_*$. 事实上, 由 (g4), Fatou's 引理 (见文献 [17]), $\|\cdot\|$ 的弱下半连续和 $\{u_n\}$ 有界, 可得

$$\begin{aligned}c_* + o(1) &= \Phi(u_n) - \frac{1}{4}\langle \Phi'(u_n), u_n\rangle\\ &= \frac{1}{4}\|u_n\|^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1})\|b\|_2^{1-p}\|u_n\|_2^{p+1} + \lambda(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4} g(x,u_n)u_n - G(x,u_n))dx + o(1)\\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|^2 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1})\|b\|_2^{1-p}\|u\|_2^{p+1} + \lambda(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4} g(x,u)u - G(x,u))dx + o(1)\\ &= \Phi(u) - \frac{1}{4}\langle \Phi'(u), u\rangle + o(1) = \Phi(u) + o(1).\end{aligned}$$

所以 $\Phi(u) \leq c_*$, 因此 $\Phi(u) = c_* = \inf_{\mathcal{N}} \Phi > 0$, 证毕.

参 考 文 献

[1] Benci V, Fortunato D. An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations [J]. Topol Meth. Nonl. Anal., 1998, 11: 283–293.

[2] Azzollini A, D'Avenia P, Pomponio A. On the Schrödinger-Maxwell equations under the effect of a general nonlinear term [J]. Ann. Linstitut Henri Poincare Non. Linear Anal., 2010, 27(2): 779–791.

[3] D'Aprile T, Mugnai D. Solitary waves for nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell equations [J]. Proc. Royal Soc. Edinburgh., 2004, 134(5): 893–906.

[4] Coclite G M. A multiplicity result for the nonlinear Schrödinger-Maxwell equations [J]. Commun. Appl. Anal., 2003, 7: 417–423.

[5] Ruiz D. The Schrödinger-Poisson equation under the effect of a nonlinear local term [J]. J. Funct. Anal., 2006, 237(2): 655–674.

[6] Sun J T. Infinitely many solutions for a class of sublinear Schrödinger-Maxwell equations [J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 390(2): 514–522.

[7] Sun J J, Ma S W. Ground state solutions for some Schrödinger-Poisson systems with periodic potentials [J]. J. Diff. Equ., 2016, 260(3): 2119–2149.

[8] Zou W M, Schechter M. Critical point theory and its applications [M]. New York: Springer, 2006.

[9] Zhao L, Zhao F. On the existence of solutions for the Schrödinger-Poisson equations [J]. J. Math. Phys., 2015, 346(9): 155–169.

[10] Gui B. Infinitely many small solutions for a sublinear Schrödinger-Poisson system with sign-changing potential [J]. Comp. Math. Appl., 2016, 71(10): 2082–2088.

[11] Ruiz D. Semiclassical states for coupled Schrödinger-Maxwell equations: concentration around a sphere [J]. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., 2008, 15(01): 141–164.

[12] Bartolo P, Benci V, Fortunato D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problem with strong resonance at infinity [J]. Nonl. Anal., 1983, 7(9): 981–1012.

[13] Costa D G, Miyagaki O H. Nontrivial solutions for perturbations of the p-Laplacian on unbounded domains [J]. J. Math. Anal. Appl., 1995, 193(3): 737–755.

[14] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theorems with applications to differential equations [M]. Amer. J. Math., 1986, 65: 100.

[15] Chen S J, Tang C L. High energy solutions for the superlinear Schrödinger-Maxwell equations [J]. Nonl. Anal. The. Meth. Appl., 2009, 71(10): 4927–4934.

[16] Willem M. Minimax theorems [M]. Boston: Birkhäser, 1996.

[17] Adams R A, Fournier J. Sobole space (2nd ed.) [M]. New York: Academic Press, 2003.

[18] 陈尚杰. 一类非齐次 Schrödinger-Maxwell 方程非平凡解的存在性 [J]. 西南大学学报 (自然科学版). 2015, 2: 55–59.

EXISTENCE OF GROUND STATE SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER-MAXWELL EQUATIONS

WANG Min-qing, HUANG Wen-nian, FANG Li-wan

(*School of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 541006, China*)

Abstract: In this paper, we study the existence of ground state solutions for Schrödinger-Maxwell equations

$$\begin{cases} -\triangle u + V(x)u + K(x)\phi(x)u = b(x)|u|^{p-1}u + \lambda g(x,u) \ \text{ in } \mathbb{R}^3, \\ -\triangle\phi = K(x)u^2 \ \text{ in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $\lambda > 0, V(x) \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ and $V(x) > 0$. Under certain assumptions on K, g and $0 < p < 1$, we obtain the ground state solutions by using variational methods and critical point theory, which promotes the results of literature [7] .

Keywords: Schrödinger-Maxwell equations; nonlinear; ground state solution; variational methods; critical point theory; Nehari manifold

2010 MR Subject Classification: 39A23; 58E05