Vol. 38 (2018)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有反馈控制和时滞的随机 logistic 种群模型的均值稳定性与灭绝性

戴祥军, 毛 志, 徐松金
(铜仁学院大数据学院, 贵州 铜仁 554300)

摘 要: 本文研究了一类具有反馈控制的随机 logistic 种群系统的均值稳定性与灭绝性. 利用分析法和伊藤公式等方法, 几乎得到了该种群均值稳定性与灭绝性的充要条件; 然后又把该模型推广到一般情形, 考虑了一类具有反馈控制和时滞的 n 个种群的随机 Lotka-Volerra 竞争系统的均值稳定性与灭绝性, 并提出了该系统各种群均值稳定与灭绝的充分条件.

关键词: 反馈控制; 均值稳定性; 灭绝性; 时滞
MR(2010) 主题分类号: 34K50; 60H10 中图分类号: O211.63
文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2018)04-0721-10

1 引言

生物种群模型主要是用来描述、调节、控制和预测每个物种的发展过程和发展趋势, 从而对一些生态问题和自然生命现象做出合理的决策和方案, 其中 Logistic 种群系统作为最基本的一类生物数学模型, 已经被广大学者所研究. 1993 年, Gopalsamy 和 Weng 考虑到物种在其生存的环境中可能会受到负反馈的影响, 譬如有毒的剩余残渣的积累, 人为的控制调节等. 同时考虑到种群的密度变化和种群生命运行规律活动的演化过程不是瞬时发生的, 而是有一定的时间延迟的; 大量事实也表明许多事物的变化规律不仅依赖于当前的状态，还与过去的历史有关, 即受时间滞后的影响. 于是提出了如下一类具有反馈控制的 logistic 模型 [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)[r - ax(t) - bx(t-\tau) - cu(t)], \\ \dfrac{du(t)}{dt} = -eu(t) + fx(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x(t)$ 是种群在 t 时刻的种群密度, $u(t)$ 是反馈控制变量; r 表示内禀增长率; a, b 表示同种群的竞争系数, 且 r, a, b, c, e, f 为正常数. 他们探讨该系统平衡点的全局渐近稳定性等性态. 近年来, 具有反馈控制的种群系统受到广大学者的关注 [2−5].

然而, 在现实环境中, 种群不可避免的会受到环境中各种细小的随机因子的干扰, 如某天突然下场雨、温度突然升高等等, 捕食者与食饵的随机相遇等, 这些细小的随机因子可以综合看成是白噪声的作用. 因此环境白噪声对种群的影响是不可忽视的且考虑白噪声的干扰将更加有实际意义. 目前已经引起了广大学者的高度重视 [6−8]. Mao [6] 指出环境白噪声

*收稿日期: 2017-02-14 接收日期: 2017-06-20
基金项目: 贵州省科技厅合作协议项目 (黔科合 LH 字 [2016]7300 号); 贵州省创新群体重大研究项目 (黔教合 KY 字 [2016]051).
作者简介: 戴祥军 (1989–), 男, 湖南邵阳, 讲师, 主要研究方向: 生物数学.

的干扰可能会影响出生率, 死亡率和竞争系数等其他参数. 在这里假设环境白噪声主要影响系统 (1) 的增长率 r. 而我们通常估计一个值都是通过它的平均值加上它的误差项, 即 $r \to r + \sigma \dot{B}(t)$, 其中 $\dot{B}(t)$ 代表白噪声, 而 σ^2 代表白噪声的浓度, $\sigma \geq 0$. $B(t)$ 是定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 上的布朗运动, 且 $B(0) = 0$. 因此在系统 (1.1) 的基础上提出如下一类具有反馈控制和时滞的随机 logistic 种群模型

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)[r - ax(t) - bx(t-\tau) - cu(t)]dt + \sigma x(t) dB(t), \\ du(t) = [-eu(t) + fx(t)]dt. \end{cases} \tag{1.2}$$

令初始条件为

$$x(\theta) = \varphi(\theta) > 0, \theta \in [-\tau, 0], u(0) > 0. \tag{1.3}$$

对于具有反馈控制的随机种群模型的研究成果还很少, 因此在这里也没有太多的文献可以借鉴. 为了方便起见, 给出了下列记号

$$R_+^* = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n\}, \langle f(t) \rangle = t^{-1} \int_0^t f(s) ds,$$
$$\langle f(t) \rangle^* = \limsup_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t f(s) ds, \langle f(t) \rangle_* = \liminf_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t f(s) ds.$$

2 全局正解

因为 $x(t)$ 代表种群的密度, 那么它应该是非负的. 因此首先就是讨论系统 (1.2) 存在唯一全局正解.

定理 2.1 对任意给定的正初始值满足条件 (1.3), 系统 (1.2) 存在唯一全局正解 $(x(t), u(t))$ $(t \geq -\tau)$, 且此解以概率 1 停留在 R_+ 内.

证 因为系统 (1.2) 的系数满足局部 Lipschitz 条件, 那么对于任意给定的正初始值满足条件 (1.3), 存在唯一的局部解 $(x(t), u(t))$ 在 $[-\tau, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时间.

为了去证明系统 (1.2) 的解是全局正解, 那么只要证明 $\tau_e = \infty$. 设 $n_0 > 0$ 充分大, 使得初始值落入区间 $[1/n_0, n_0]$, 对于每一个正整数 $n > n_0$, 定义停时

$$\tau_n = \inf\{t \in [0, \tau_e) : x(t) \notin (1/n, n), u(t) \notin (1/n, n)\}. \tag{2.1}$$

显然 τ_n 随着 $n \to +\infty$ 是递增的, 设 $\tau_\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} \tau_n$, 因此 $\tau_\infty \leq \tau_e$. 所以只需要证明 $\tau_\infty = +\infty$. 使用反证法, 如果结论是错的, 那么这里一定存在常数 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$, 使得 $P(\tau_\infty < T) > \varepsilon$, 即存在一个整数 $n_1 > n_0$, 有 $P(\tau_n < T) > \varepsilon$, $n > n_1$.

定义一个函数 $V(x, u) = x + 1 - \ln x + \frac{cu}{e}$,

$$\begin{aligned} dV(x, u) &= \{(x-1)[r - ax(t) - bx(t-\tau) - cu] + o.5\sigma^2 - cu + \frac{cfx}{e}\}dt + \sigma(x-1)dB(t) \\ &\leq [r + \frac{cf}{e} + a]x - ax^2 + bx(t-\tau) + 0.5\sigma^2]dt + \sigma(x-1)dB(t). \end{aligned}$$

上式从 0 到 $\tau_n \wedge T$ 积分再取均值有

$$\begin{aligned}&EV(x(\tau_n \wedge T), u(\tau_n \wedge T)) - V(x(0), u(0))\\ \leq& E\int_0^{\tau_n \wedge T}[r+\frac{cf}{e}+a+b]x-ax^2+0.5\sigma^2 ds + b\int_{-\tau}^{0}x(s)ds.\end{aligned}$$

很容易知道一定会存在正常数 K, 有

$$[r+\frac{cf}{e}+a+b]x-ax^2+0.5\sigma^2+bT^{-1}\int_{-\tau}^{0}x(s)ds \leq K.$$

则

$$EV(x(\tau_n \wedge T), u(\tau_n \wedge T)) \leq V(x(0), u(0)) + KT.$$

由于剩下的证明跟文献 [7] 的证明类似, 在这里就省略了.

3 均值稳定性与灭绝性

本节主要是探讨系统 (1.2) 解的均值稳定性与灭绝性. 首先先介绍几个引理.

引理 3.1 [8] 假设 $Z(t,\omega) \in C(R_+, \Omega)$.

(1) 如果存在正常数 μ 和 T, 使得对任意的 $t \geq T$, 有

$$\ln Z(t) \leq \lambda t - \mu\int_0^t Z(s)ds + \sum_{i=1}^{n}\beta_i B_i(t),$$

那么

$$\begin{cases}\langle Z(t)\rangle^* \leq \dfrac{\lambda}{\mu} \ \text{ a.s. } \ \lambda \geq 0,\\ \lim\limits_{t\to+\infty} Z(t) = 0 \ \text{ a.s. } \ \lambda \leq 0.\end{cases}$$

(2) 如果存在正常数 λ, μ 和 T, 使得对任意的 $t \geq T$, 有

$$\ln Z(t) \geq \lambda t - \mu\int_0^t Z(s)ds + \sum_{i=1}^{n}\beta_i B_i(t),$$

那么 $\langle Z(t)\rangle^* \geq \frac{\lambda}{\mu}$ a.s.

引理 3.2 [9] 考虑随机微分方程 $dx = x[r-ax]dt + \sigma x dB(t)$, 其中 r, a, σ 为正常数. 当 $r > 0.5\sigma^2$ 时, 对于任意的初始值 $x_0 > 0$, 方程的解 x 有

$$\lim_{t\to+\infty}\ln x(t)/t = 0 \ \text{ a.s.}, \ \ \lim_{t\to+\infty}\langle x(t)\rangle = \frac{r-0.5\sigma^2}{a} \ \text{ a.s.}.$$

定理 3.1 当 $r \neq 0.5\sigma^2$ 时, 对任意初始值满足 (1.3), 则系统 (1.2) 有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln x(t)}{t} \leq 0, \ \ \lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t} = 0 \ \text{ a.s.}.$$

证 由系统 (1.2) 显然有 $dx \leq x[r-ax]dt + \sigma x dB(t)$.

设 $X(t)$ 是下面这个随机微分方程的解

$$\begin{cases} dX(t) = X(t)[r - aX(t)]dt + \sigma X(t)dB(t), \\ X(0) = x(0). \end{cases}$$

上式方程有如下复杂的显式解

$$X(t) = \frac{\exp\{rt - 0.5\sigma^2 t + \sigma B(t)\}}{x^{-1}(0)\int_0^t \exp\{rs - 0.5\sigma^2 s + \sigma B(s)\}ds}.$$

同样根据方程 (1.2) 的第二个方程有

$$u(t) = \frac{f\int_0^t x(s)\exp\{es\}ds + u(0)}{\exp\{et\}}.$$

如果 $r < 0.5\sigma^2$, 由比较原理可知

$$x(t) \le X(t) \le x(0)\exp\{[r - 0.5\sigma^2 + \sigma\frac{B(t)}{t}]t\}.$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{B(t)}{t} = 0$, 易知

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(x(t))}{t} \le 0 \text{ a.s.},$$

且 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ a.s., 故显然有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t} = 0$ a.s..

如果 $r > 0.5\sigma^2$, 那么

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(x(t))}{t} \le \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(X(t))}{t} = 0, \text{ a.s..}$$

对 $\exp\{et\}\ln X(t)$ 应用伊藤公式,

$$\begin{aligned} d\exp\{et\}\ln X(t) &= e\exp\{et\}\ln X(t)dt + \frac{\exp\{et\}}{X(t)}dX(t) - \frac{\exp\{et\}\sigma^2}{2X^2(t)}(dX(t))^2 \\ &= \exp\{et\}[e\ln X(t) + (r - 0.5\sigma^2) - aX(t)]dt + \sigma\exp\{et\}dB(t), \end{aligned}$$

然后两边同时在 [0,t] 上积分再除以 $t\exp\{et\}$ 有

$$\begin{aligned} \frac{a\int_0^t X(s)\exp\{es\}ds}{t\exp\{et\}} =& \frac{\ln X(0)}{t\exp\{et\}} - \frac{\ln X(t)}{t} + \frac{e\int_0^t \exp\{es\}\ln X(s)ds}{t\exp\{et\}} \\ &+ \frac{(r - 0.5\sigma^2)[\exp\{et\} - 1]}{t\exp\{et\}} + \frac{\int_0^t \sigma\exp\{es\}dB(s)}{t\exp\{et\}}, \end{aligned}$$

那么根据积分中值定理有

$$\begin{aligned}\frac{a\displaystyle\int_0^t X(s)\exp\{es\}ds}{t\exp\{et\}} =&\frac{\ln X(0)}{t\exp\{et\}}+\frac{\ln X(\tau_1)}{t}-\frac{\ln X(\tau_1)}{t\exp\{et\}}+\frac{(r-0.5\sigma^2)[\exp\{et\}-1]}{t\exp\{et\}}\\ &-\frac{\ln X(t)}{t}+\frac{\sigma B(t)}{t}+\frac{e\sigma B(\tau_2)(\exp\{et\}-1)}{t\exp\{et\}},\end{aligned}$$

其中 τ_1, $\tau_2\in[0,t]$. 由引理 3.2 和 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{B(t)}{t}=0$, 有

$$0\le\lim_{t\to+\infty}\frac{a\displaystyle\int_0^t x(s)\exp\{es\}ds+u(0)}{t\exp\{et\}}\le\lim_{t\to+\infty}\frac{a\displaystyle\int_0^t X(s)\exp\{es\}ds+u(0)}{t\exp\{et\}}=0.$$

故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t}=0$. 证明完成.

定理 3.2 对于任意初始值满足条件 (1.3),

(1) 如果 $r-0.5\sigma^2<0$, 那么种群 $x(t)$ 将趋于灭绝. 即 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=0$ a.s..

(2) 如果 $r-0.5\sigma^2>0$, 那么种群 $x(t)$ 均值稳定. 即

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x(t)\rangle=\frac{(r-0.5\sigma^2)e}{ae+be+cf},\lim_{t\to+\infty}u(t)=\frac{(r-0.5\sigma^2)f}{ae+be+cf}\ \ \text{a.s..}$$

证 对 (1.2) 式应用伊藤公式, 有

$$\frac{\ln x(t)-\ln x(0)}{t}=[r-0.5\sigma^2-a\langle x(t)\rangle-b\langle x(t-\tau)\rangle-c\langle u(t)\rangle]+\frac{\sigma B(t)}{t},\tag{3.1}$$

$$\frac{u(t)-u(0)}{t}=-e\langle u(t)\rangle+f\langle x(t)\rangle.\tag{3.2}$$

由 (3.1) 式可知

$$\frac{\ln x(t)-\ln x(0)}{t}\le[r-0.5\sigma^2-a\langle x(t)\rangle]+\frac{\sigma B(t)}{t}.$$

(1) 当 $r-0.5\sigma^2<0$ 时, 根据引理 3.1 可知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=0$ a.s..

(2) 当 $r-0.5\sigma^2>0$ 时, 由 (3.1) 式可知

$$\begin{aligned}\frac{\ln x(t)-\ln x(0)}{t}=&[r-0.5\sigma^2-(a+b)\langle x(t)\rangle-c\langle u(t)\rangle]+\frac{\sigma B(t)}{t}\\&-b[t^{-1}\int_{-\tau}^0 x(s)ds+t^{-1}\int_t^{t-\tau}x(s)ds].\end{aligned}\tag{3.3}$$

根据引理 3.2 可得

$$0\ge t^{-1}\int_t^{t-\tau}x(s)ds\ge t^{-1}\int_t^{t-\tau}X(s)ds=t^{-1}\int_0^{t-\tau}x(s)ds-t^{-1}\int_0^t x(s)ds\to0\ \ (t\to+\infty).$$

因此对于 $\varepsilon>0$, 假设 ε 足够的小, 使得 $r-0.5\sigma^2-\varepsilon>0$, 存在常数 $T>0$, 当 $t\ge T$ 时, 有

$$\begin{aligned}&-\frac{\varepsilon}{3}\le b[t^{-1}\int_{-\tau}^0 x(s)ds+t^{-1}\int_t^{t-\tau}x(s)ds]\le\frac{\varepsilon}{3},-\frac{\varepsilon}{3}\le\frac{\ln x(0)}{t}\le-\frac{\varepsilon}{3},\\&-\frac{\varepsilon}{3}\le\frac{c}{e}\frac{u(t)-u(0)}{t}\le\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

把上面不等式代入等式 (3.1) 和 (3.2) 可得

$$\frac{\ln x(t)}{t} \le [r - 0.5\sigma^2 + \varepsilon - (a + b + \frac{cf}{e})\langle x(t)\rangle] + \frac{\sigma B(t)}{t}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\ln x(t)}{t} \ge [r - 0.5\sigma^2 - \varepsilon - (a + b + \frac{cf}{e})\langle x(t)\rangle] + \frac{\sigma B(t)}{t}, \tag{3.5}$$

那么由 (3.4), (3.5) 式和引理 3.1 可知

$$\frac{r - 0.5\sigma^2 - \varepsilon}{a + b + \frac{cf}{e}} \le \langle x(t)\rangle_* \le \langle x(t)\rangle^* \le \frac{r - 0.5\sigma^2 + \varepsilon}{a + b + \frac{cf}{e}}.$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x(t)\rangle = \frac{(r - 0.5\sigma^2)e}{ae + be + cf} \ \text{ a.s.},$$

故

$$\lim_{t\to+\infty}\langle u(t)\rangle = \frac{(r - 0.5\sigma^2)f}{ae + be + cf} \ \text{ a.s.}.$$

完成证明.

4 一般情况

上一节已经讨论了一类具有反馈控制和时滞的 logistic 种群模型的均值稳定性和灭绝性. 现在把它推广到更一般的情形, 考虑 n 个相互竞争种群, 同样我们考虑环境白噪声的干扰, 在这里假设种群可能同时受到 n 个独立的白噪声源的影响, 假设白噪声主要影响种群的增长率, 因此采用下面这种扰动形式, 如文献 [10], 即 $r_i \to r_i + \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}B_j(t),\ \ i = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $\sigma_{ij} \ge 0$.

下面就来考虑一类具有反馈控制的 n 个种群的随机 Lotka-Valterra 竞争系统

$$\begin{cases} dx_i(t) = x_i(t)[r_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x(t) - \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_j(t-\tau_{ij}) - \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}u_j(t)]dt + \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i(t)dB_j(t), \\ du_i(t) = -e_iu_i(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}x_j(t); \quad r_i,\ a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij}, e_i, f_{ij} \in (0, +\infty);\ \ i,\ j = 1,\ 2, \cdots,\ n, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $x_i(t)$ 代表第 i 个种群的种群密度; $u_i(t)$ 表示反馈控制变量; $\tau_{ij} \ge 0$ 代表时滞, $i,\ j = 1,\ 2, \cdots,\ n$. 令初始条件

$$x_i(\theta) = \varphi_i(\theta) > 0,\ \ \theta \in [-\tau, 0],\ u_i(0) > 0,\ \ i = 1, 2, \cdots, n,\ \ \tau = \max_{i,j=1,2,\cdots,n}\{\tau_{ij}\}.$$

为了方便起见, 假设非空集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, $I_m = \{l_1, l_2, \cdots, l_m\}$ 且集合 J 满足

$$J \bigcap I_m = \emptyset,\ \ I = I_m \bigcup J,$$

其中 $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$.

设

$$R_i = r_i - 0.5\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2, h_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + \sum_{l=1}^{n}\frac{c_{il}f_{ij}}{e_i}, A = |h_{ij}|_{n\times n}, B = |h_{l_i l_j}|_{m\times m},$$

A_{ki} 表示行列式 A 第 k 行第 i 列的余子式, B_{ki} 表示行列式 B 第 k 行第 i 列的余子式.

$$M_i = \begin{vmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1(i-1)} & R_1 & h_{1(i+1)} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & \cdots & h_{2(i-1)} & R_2 & h_{2(i+1)} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{n(i-1)} & R_n & h_{n(i+1)} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}, \ i = 1,\ 2, \cdots,\ n,$$

$$G_i = \begin{vmatrix} h_{l_1l_1} & \cdots & h_{l_1l_{(i-1)}} & R_{l_1} & h_{l_1l_{(i+1)}} & \cdots & h_{l_1l_m} \\ h_{l_2l_1} & \cdots & h_{l_2l_{(i-1)}} & R_{l_2} & h_{l_2l_{(i+1)}} & \cdots & h_{l_2l_m} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ h_{l_ml_1} & \cdots & h_{l_ml_{(i-1)}} & R_{l_m} & h_{l_ml_{(i+1)}} & \cdots & h_{l_ml_m} \end{vmatrix}, \ i = 1,\ 2, \cdots,\ m.$$

定理 4.1 对任意给定的正初始值, 系统 (4.1) 存在唯一全局正解 ($t \geq -\tau$). 如果 $R_i \neq 0$, 则系统 (4.1) 的解有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln x_i(t)}{t} \leq 0, \ \lim_{t\to+\infty}\frac{u_i(t)}{t} = 0 \ \text{a.s.} \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

证 构造函数 $V(X(t), U(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + 1 - \ln x_i + \frac{c_i}{e_i}u_i)$. 方法跟定理 2.1, 定理 3.1 的证明类似, 在这里就省略了.

定理 4.2 如果 $R_i > 0$ 且 $A > 0$, 那么 $M_i < 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 不能同时成立.

证 假设结论不成立, 那么 $M_i < 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 容易得出 $M_i = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k A_{ki} < 0$. 因为 h_{ij} 都是正常数, 故 $h_{1i}M_i = \sum\limits_{k=1}^{n} R_k h_{1i} A_{ki} < 0$. 那么很容易看出

$$\sum_{i=1}^{n} h_{1i}M_i = \sum_{k=1}^{n} R_k \sum_{i=1}^{n} h_{1i}A_{ki} = R_1 A < 0.$$

也就是说 $A < 0$, 显然与 $A > 0$ 矛盾. 完成证明.

定理 4.3 (i) 假设 $R_i > 0$ 且 $A > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$,

(a) 如果 $M_i > 0$, $A_{ii} > 0$ 和 $A_{ki} \leq 0$ ($k \neq i$, $k, i = 1, 2, \cdots, n$), 那么种群 x_i 均值稳定. 即 $\lim\limits_{t\to+\infty}\langle x_i(t)\rangle = M_i/A$ a.s. $i = 1, 2, \cdots, n$.

(b) 假设 $M_{l_i} > 0$ 且 $M_k < 0$, $l_i \in I_m, k \in J$, 如果 $B > 0, G_i > 0, B_{ii} > 0$ 和 $B_{ki} \leq 0$ ($k \neq i, k$, $i = 1, 2, \cdots, n$), 那么种群 x_{l_i} 均值稳定, 种群 x_k 将趋于灭绝. 即

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x_{l_i}(t)\rangle = G_i/B \ \text{a.s.} \ l_i \in I_m, \ i = 1, 2, \cdots, m., \ \lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0 \ \text{a.s.} \ k \in J.$$

(ii) 如果 $R_i < 0$, 那么种群 x_i 将趋于灭绝. 即 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i = 0$ a.s. $i = 1, 2, \cdots, n$.

(iii) 假设 $R_{l_i} > 0$ 且 $R_k < 0$, $l_i \in I_m, k \in J$, 如果 $B > 0, G_i > 0, B_{ii} > 0$ 和 $B_{ki} \leq 0$ ($k \neq i$, k, $i = 1, 2, \cdots, n$), 那么种群 x_{l_i} 均值稳定, 种群 x_k 将趋于灭绝. 即

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x_{l_i}(t)\rangle = G_i/B \text{ a.s. } l_i\in I_m,\ i=1,2,\cdots,m,\ \lim_{t\to+\infty}x_k(t)=0 \text{ a.s. } k\in J.$$

证 对于 (4.1) 式应用伊藤公式, 有

$$\frac{\ln x_i(t)/x_i(0)}{t} = [R_i-\sum_{j=1}^n a_{ij}\langle x_j(t)\rangle-\sum_{j=1}^n b_{ij}\langle x_j(t-\tau_{ij})\rangle-\sum_{j=1}^n c_{ij}\langle u_j(t)\rangle] \tag{4.2}$$

$$+\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_{ij}B_j(t)}{t}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^n\frac{c_{ij}}{e_i}\frac{u_i(t)-u_i(0)}{t} = -\sum_{j=1}^n c_{ij}\langle u_i(t)\rangle+\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{f_{ij}c_{ik}}{e_i}\langle x_j(t)\rangle, \tag{4.4}$$

$$\langle x_j(t-\tau_{ij})\rangle = t^{-1}[\int_{-\tau_{ij}}^0 x_j(s)ds+\int_t^{t-\tau_{ij}}x_j(s)ds]+\langle x_j(t)\rangle. \tag{4.5}$$

结合 (4.2), (4.4) 和 (4.5) 式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n A_{ki}[\frac{\ln x_k(t)/x_k(0)}{t}-\sum_{j=1}^n\frac{c_{kj}}{e_k}\frac{u_k(t)-u_k(0)}{t}]=\sum_{k=1}^n A_{ki}R_i-\sum_{k=1}^n A_{ki}\sum_{j=1}^n h_{kj}\langle x_j(t)\rangle\\&+\sum_{k=1}^n A_{ki}\sum_{j=1}^n\frac{\sigma_{kj}B_j(t)}{t}-\sum_{k=1}^n A_{ki}\sum_{j=1}^n b_{kj}t^{-1}[\int_{-\tau_{kj}}^0 x_j(s)ds+\int_t^{t-\tau_{kj}}x_j(s)ds]\\&=M_i-A\langle x_i(t)\rangle+\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\{\frac{A_{ki}\sigma_{kj}B_j(t)}{t}-\frac{b_{kj}A_{ki}}{t}[\int_{-\tau_{kj}}^0 x_j(s)ds+\int_t^{t-\tau_{kj}}x_j(s)ds]\}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

根据定理 3.1 的证明和定理 4.1 可知 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $T>0$, 当 $t\geq T$, 有

$$\frac{-\varepsilon}{3}\leq\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{b_{kj}A_{ki}}{t}[\int_{-\tau_{kj}}^0 x_j(s)ds+\int_t^{t-\tau_{kj}}x_j(s)ds]\leq\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\frac{-\varepsilon}{3}\leq\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{c_{kj}A_{ki}}{e_k}\frac{u_k(t)-u_k(0)}{t}\leq\frac{\varepsilon}{3},\quad\sum_{k=1,k\neq i}^n A_{ki}\frac{\ln x_k(t)/x_k(0)}{t}\geq\frac{-\varepsilon}{3}.$$

把上面不等式代入 (4.6) 式可得

$$A_{ii}\frac{\ln x_i(t)/x_i(0)}{t}\leq M_i+\varepsilon-A\langle x_i(t)\rangle+\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{A_{ki}\sigma_{kj}B_j(t)}{t}, \tag{4.7}$$

$$A_{ii}\frac{\ln x_i(t)/x_i(0)}{t}\geq M_i+\varepsilon-A\langle x_i(t)\rangle+\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{A_{ki}\sigma_{kj}B_j(t)}{t}. \tag{4.8}$$

(i) (a) 如果 $R_i>0,\ A>0,\ A_{ii}>0,\ M_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$. 由 (4.7), (4.8) 式和引理 3.1, 有

$$\lim_{t\to+\infty}\langle x_i(t)\rangle = M_i/A \text{ a.s. } i=1,2,\cdots,n.$$

(i) (b) 如果 $R_k > 0, A_{kk} > 0,\ M_k < 0,\ k \in J$. 令 ε 足够小, 使得 $M_k + \varepsilon < 0$, 由 (4.7) 式和引理 3.1, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_k(t) = 0$ a.s. $k \in J$., 那么

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} B_{ki}[\frac{\ln x_{l_k}(t)/x_{l_k}(0)}{t} - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_{l_k l_j}}{e_k}\frac{u_{l_k}(t) - u_{l_k}(0)}{t}] \\
=&G_i - B\langle x_{l_i}(t)\rangle + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\{\frac{B_{ki}\sigma_{l_k l_j}B_{l_j}(t)}{t} - \frac{b_{l_k l_j}B_{ki}}{t}[\int_{-\tau_{l_k l_j}}^{0} x_{l_j}(s)ds + \int_{t}^{t-\tau_{l_k l_j}} x_{l_j}(s)ds]\}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

由上面的方法可知

$$
B_{ii}\frac{\ln x_{l_i}(t)/x_{l_i}(0)}{t} \le G_i + \varepsilon - B\langle x_{l_i}(t)\rangle + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{ki}\sigma_{l_k l_j}B_{l_j}(t)}{t}, \tag{4.10}
$$

$$
B_{ii}\frac{\ln x_{l_i}(t)/x_{l_i}(0)}{t} \ge G_i - \varepsilon - B\langle x_{l_i}(t)\rangle + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{B_{ki}\sigma_{l_k l_j}B_{l_j}(t)}{t}. \tag{4.11}
$$

如果 $B > 0,\ B_{ii} > 0,\ G_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$, 由 (4.10), (4.11) 式和引理 3.1, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\langle x_{l_i}(t)\rangle = G_i/B$ a.s. $i = 1, 2, \cdots, m$.

(ii) 如果 $R_i < 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$, 那么

$$
\frac{\ln x_i(t)/x_i(0)}{t} \le R_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_{ij}B_j(t)}{t},
$$

又因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{B_j(t)}{t} = 0$ a.s., 故 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t) = 0$ a.s. $i = 1, 2, \cdots, n$.

(iii) 如果 $R_k < 0,\ k \in J$, 根据 (i) (b) 的证明易得

$$
\lim_{t\to+\infty}\langle x_{l_i}(t)\rangle = \frac{G_i}{B} \text{ a.s. } i = 1, 2, \cdots, m, \lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0 \text{ a.s.}.
$$

在这里就省略了.

5 结论

本文首先探讨了一类具有反馈控制的随机 logistic 种群模型, 当 $r - 0.5\sigma^2 > 0$ 时, 种群 x 均值稳定, 当 $r - 0.5\sigma^2 < 0$ 时, 种群 x 灭绝. 显然反馈没有影响该种群的均值持久性与灭绝性. 接着我们在此基础上把他推广到 n 个种群上, 构建了一类具有时滞和反馈控制的 n 个种群的随机 Lotka-Volerra 竞争系统, 并获得了该系统中的每一个种群的均值稳定和灭绝的充分条件.

参 考 文 献

[1] Gopalsamy K, Weng P X. Feedback regulation of logistic growth[J]. Internat. J. Math. Sci, 1993, 16(1): 177–192.

[2] Gopalsamy K, Weng P X. Global attractivity in a competition system with feedback controls[J]. Comput. Math. Appl., 2003, 45(1): 665–676.

[3] Fan Y H, Wang L L. Global asymptotical stability of a Logistic model with feedback control[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2010, 11(4): 2686–2697.

[4] Li Z, Han M A, Chen F D. Influence of feedback controls on an autonomous Lotka-Volterra competitive system with infinite delays[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2013, 14(1): 402–413.

[5] 周晓燕, 普丽琼, 薛亚龙. 具反馈控制的单方不能独立生存合作系统稳定性研究 [J]. 应用数学学报, 2016, 39(2): 298–305.

[6] Bahar A, Mao X. Stochastic delay population dynamics[J]. Int. J. Pure Appl. Math., 2004, 11(1): 377–400.

[7] Liu M, Wang K, Wu Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle[J]. Bull. Math. Biol., 2011, 73(1): 1969–2012.

[8] May R M. Stability and complexity in model ecosystems[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2001.

[9] Liu M, Wang K. A note on a delay Lotka-Volterra competitive system with random perturbations[J]. Appl. Math. Lett., 2013, 26(6): 589–594.

[10] Liu M, Bai C Z. A remark on stochastic Logistic model with diffusion[J]. J. Appl. Math. Comp., 2014, 228(228): 141–146.

STABILITY IN THE MEAN AND EXTINCTION OF A STOCHASTIC LOGISTIC POPULATION SYSTEM WITH FEEDBACK CONTROLS AND DELAYS

DAI Xiang-jun, MAO Zhi, XU Song-jin

(*School of Data Science, Tongren University, Tongren 554300, China*)

Abstract: Stability in the mean and extinction of a stochastic logistic population system with feedback controls and delays are studied in this paper. By using the analytic method and itǒ's formula, necessary and sufficient condition for the stability in the mean and extinction of the population are almost obtained; Then we extend the model to general case, so that the stability in the mean and extinction of n species stochastic Lotka-Volerra competitive system with feedback controls and delays are considered, and sufficient conditions for stability in the mean and extinction of each population are established.

Keywords: feedback controls; stability in the mean; extinction; delay

2010 MR Subject Classification: 34K50; 60H10