Vol. 38 (2018)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Poisson 方程的一维最优系统和不变解

白月星, 苏道毕力格
(内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘 要: 本文研究了 Poisson 方程的一维最优系统及其不变解问题. 利用吴 - 微分特征列集算法, 借助于 Mathematica 软件, 计算了 Poisson 方程的古典对称, 并构建了 Lie 代数的一维最优系统. 同时, 利用不变量法, 获得了一维最优系统中一个元素对应的 Poisson 方程的不变解. 得到的结果推广了 Poisson 方程的精确解.

关键词: 古典对称; 最优系统; 吴 - 微分特征列集算法; 不变解
MR(2010) **主题分类号**: 22E60; 35B06 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)04-0706-07

1 引言

在现代经济学和物理领域中求解偏微分方程 (PDEs) 的解常常是困难的, 因此求解 PDEs 显得至关重要. Lie 对称是公认的普适性最广的方法之一, Lie 群是研究微分方程的对称性并求出其解析解的强有力工具, 一个主要应用是寻找群不变解[1–5]. 利用给定对称群的任意子群求解相应的特征方程, 可以把原方程约化为自变量更少的方程. 对称群的每个子群都对应着一组群不变解, 然而这样的子群似乎总有无穷多个, 要列出所有可能的群不变解几乎是不可能的. 要找到这些完整且不等价的群不变解, 也就需要对所有的群不变解进行分类. 对这个问题, Ovsiannikov 和 Olver 分别发展出一些系统有效的方法, 由此引入了"最优系统"的概念. 构建最优系统有很多方法, 如 Ovsiannikov 利用伴随表示的矩阵法构建最优系统[6], Petera 发展了一种很重要的方法, 已经广泛的应用到物理学中[7, 8]. 目前国内外研究者对其进行研究, 推动了最优系统的发展[9–15].

应用对称方法的前提是确定 PDEs 拥有的各类对称. Lie 算法把确定对称的问题转化为确定对应无穷小向量的问题, 而该无穷小向量是由满足确定方程组的无穷小生成函数确定. 完成这个过程将涉及到大量、复杂的机械化计算. 研究发现, 微分形式的吴方法是有效克服 Lie 算法缺陷的方法之一. 近年来, 朝鲁教授推广建立了微分形式的吴方法, 即吴 - 微分特征列集算法[16, 17]. 该算法主要考虑控制计算过程中符号堆积及易于在软件 Mathematica 中实现的问题, 使吴方法的应用从纯代数理论推广到微分情形, 发展了吴方法. 我们知道如果直接得到微分方程 (组) 的全部对称群是非常困难的, 并且传统 Lie 算法中未能考虑未知量的序关系, 导致计算机上的无穷循环及工作量大等许多困难, 而这些问题由吴 - 微分特征列集算法得到部分解决. 目前, 吴 - 微分特征列集算法成功的应用在 PDEs 的古典对称、非古典对称、高阶对称、近似对称、势对称、守恒律和对称分类等问题上, 取得了优异的成果, 促进了

*收稿日期: 2017-07-01 接收日期: 2017-10-18
基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (11661060; 11571008).
作者简介: 白月星 (1990–), 女, 山西兴县, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程求解和符号计算.
通讯作者: 苏道毕力格.

PDEs 对称理论的研究[18–23]. 我们基于该算法研究了对称方法在 NLPDE 边值问题中的应用[24, 25]. 最近, 朝鲁等人利用该算法研究了 Lie 代数的最优系统 .

本文利用 Lie 对称方法研究了 Poisson 方程的单参数李对称群和群对应的伴随表达式, 在此基础上构建了该 Lie 对称群的一维最优系统, 并利用一维最优系统中的元素对 Poisson 方程进行对称约化, 确定不变解及其精确解. 具体过程: 首先, 利用吴 - 微分特征列集算法和符号计算软件 Mathemetica, 计算 Poisson 方程对应的古典对称; 其次, 计算换位子、伴随算子, 通过伴随方法构建该方程的一维最优系统; 最后, 确定古典对称所对应的不变解以及精确解, 丰富了 Poisson 方程的精确解.

2 Poisson 方程的一维最优系统

2.1 Poisson 方程的对称

考虑 Poisson 方程

$$u_{tt} + 2u_x u_{xx} - (1 - u_x^2)u_{xx} = 0. \tag{2.1}$$

假设方程 (2.1) 对应的对称向量为

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.2}$$

其中 $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$, $\eta(x,t,u)$ 为该对称的无穷小生成函数. 根据 Lie 算法可以得到方程 (2.1) 的对称对应的确定方程组, 但是很难手动求解. 基于吴 - 微分特征列集算法, 应用该算法的 Mathematica 程序包进行计算得到与确定方程组等价的特征列集对应的方程组, 即

$$\xi_t = \xi_u = \xi_{xx} = 0, \tau_x = \tau_u = 0, \eta_x = \eta_{tt} = 0, \xi_x - \tau_t = 0, \eta_u - \xi_x = 0.$$

求解上面的方程组, 得到无穷小生成函数

$$\xi = c_1 x + c_2, \tau = c_1 t + c_5, \eta = c_1 u + c_3 t + c_4,$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 是任意常数, 则无穷小向量为

$$X = (c_1 x + c_2)\frac{\partial}{\partial x} + (c_1 t + c_5)\frac{\partial}{\partial t} + (c_1 u + c_3 t + c_4)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{2.3}$$

所以方程 (2.1) 有 5 个单参数古典对称, 其对应的无穷小向量为

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = t\frac{\partial}{\partial u}, X_4 = \frac{\partial}{\partial u}, X_5 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

2.2 Poisson 方程的一维最优系统

在上一部分中得到了无穷小生成向量, 下面构造一维最优系统.

定义 1 无穷小生成元 X_α, X_β 的换位子是一阶算子

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{2.4}$$

其中

$$\eta_j(x)=\sum_{i=1}^{n}(\xi_{\alpha i}(x)\frac{\partial\xi_{\beta j}(x)}{\partial x_i}-\xi_{\beta i}(x)\frac{\partial\xi_{\alpha j}(x)}{\partial x_i}),$$

因此得到 $[X_\alpha,X_\beta]=-[X_\beta,X_\alpha]$.

定义 2 设 G 是 Lie 对称群, g 是 G 对应的 Lie 代数, 对于每一个 $v\in g$, 伴随算子 Adv 关于 $w\in g$, 有

$$Ad(\exp(\varepsilon v))w=w-\varepsilon[v,w]+\frac{\varepsilon^2}{2}[v,[v,w]]-\cdots. \tag{2.5}$$

根据定义 1 和定义 2, 可以计算方程 (2.1) 所拥有的 Lie 对称构造一维最优系统.

表 1: 换位子表

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	$-X_2$	0	$-X_4$	$-X_5$
X_2	X_2	0	0	0	0
X_3	0	0	0	0	$-X_4$
X_4	X_4	0	0	0	0
X_5	X_5	0	X_4	0	0

表 2: 伴随关系表

Ad	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	X_1	$e^\varepsilon X_2$	X_3	$e^\varepsilon X_4$	$e^\varepsilon X_5$
X_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_3	$X_1-\varepsilon X_2$	X_2	X_3	X_4	$X_5+\varepsilon X_4$
X_4	$X_1-\varepsilon X_4$	X_2	X_3	X_4	X_5
X_5	$X_1-\varepsilon X_5$	X_2	$X_3-\varepsilon X_4$	X_4	X_5

根据求一维最优系统的方法, 设一个非零的 $X\in L_5$, L_5 是构成 Lie 代数

$$X=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5, \tag{2.6}$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是任意常数.

(1) 假设 $a_1\neq 0$, 不失一般性. 令 $a_1=1$, 则 $X=X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5$. 为了使 X_2 消失, 利用伴随算子 $X'=Ad(\exp(\varepsilon X_3))X$, 通过计算有

$$X'=X_1+(a_2-\varepsilon)X_2+a_3X_3+(a_4+\varepsilon a_5)X_4+a_5X_5.$$

令 $\varepsilon=a_2$, 则有

$$X'=X_1+a_3X_3+(a_4+a_2a_5)X_4+a_5X_5.$$

下一步将 $Ad(\exp(\varepsilon X_5))$ 作用于 X', 有 $X''=Ad(\exp(\varepsilon X_5))X'$, 通过计算有

$$X''=X_1+a_3X_3+(a_4+a_2a_5-\varepsilon a_3)X_4+(a_5-\varepsilon)X_5.$$

为了消去 X_5, 令 $\varepsilon = a_5$, 有 $X'' = X_1 + a_3X_3 + (a_4 + a_2a_5 - a_3a_5)X_4$. 将 $Ad(\exp(\varepsilon X_4))$ 作用于 X'', 有 $X''' = Ad(\exp(\varepsilon X_4))X''$, 通过计算有

$$X''' = X_1 + a_3X_3 + (a_4 + a_2a_5 - a_3a_5 - \varepsilon)X_4.$$

为了消去 X_6, 令 $\varepsilon = a_4 + a_2a_5 - a_3a_5$, 有 $X''' = X_1 + a_3X_3$. 由上式知不能再继续利用伴随算子.

(2) 假设 $a_1 = 0$, $a_5 \neq 0$, 不失一般性. 令 $a_5 = 1$, 则 $X = a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + X_5$. 为了使 X_4 消失, 将伴随算子 $Ad(\exp(\varepsilon X_3))$ 作用于 X, 有

$$X' = Ad(\exp(\varepsilon X_3))X,$$

通过计算有

$$X' = a_2X_2 + a_3X_3 + (a_4 - \varepsilon)X_4 + X_5.$$

令 $\varepsilon = a_4$, 则有 $X' = a_2X_2 + a_3X_3 + X_5$. 由上式知不能再继续利用伴随算子.

(3) 假设 $a_1 = a_5 = 0$, $a_2 \neq 0$, 不失一般性. 令 $a_2 = 1$, 则 $X = X_2 + a_3X_3 + a_4X_4$. 为了使 X_4 消失, 将伴随算子 $Ad(\exp(\varepsilon X_5))$ 作用于 X, 有 $X' = Ad(\exp(\varepsilon X_5))X$, 通过计算有

$$X' = X_2 + a_3X_3 + (a_4 - \varepsilon a_3)X_4.$$

令 $\varepsilon = \frac{a_4}{a_3}$, 则有 $X' = X_2 + a_3X_3$. 由上式知不能再继续利用伴随算子.

(4) 假设 $a_1 = a_2 = a_5 = 0$, $a_3 \neq 0$, 不失一般性. 令 $a_3 = 1$, 则 $X = X_3 + a_4X_4$. 为了使 X_4 消失, 将伴随算子 $Ad(\exp(\varepsilon X_5))$ 作用于 X, 有 $X' = Ad(\exp(\varepsilon X_5))X$, 通过计算有

$$X' = X_3 + (a_4 - \varepsilon)X_4.$$

令 $\varepsilon = a_4$, 则有 $X' = X_3$. 由上式知不能再继续利用伴随算子.

(5) 假设 $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 0$, $a_4 \neq 0$. 不失一般性, 令 $a_4 = 1$, 则 $X = X_4$. 由上式知不能再继续利用伴随算子.

综上得到方程 (2.1) 的一维最优系统为

$$\left\{\begin{array}{l} X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_1 + \lambda_1X_3,\ X_2 + \lambda_2X_3, \\ \lambda_3X_2 + X_5, \lambda_4X_3 + X_5, \lambda_5X_2 + \lambda_6X_3 + X_5 \end{array}\right\}, \tag{2.7}$$

其中 λ_i $(i = 1 \cdots 6)$ 是任意常数.

3 Poisson 方程的不变解

本节将计算古典对称对应的不变解. 古典对称 $X_1 + X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} + (u + t)\frac{\partial}{\partial u}$ 对应的特征方程为

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{u + t}. \tag{3.1}$$

由特征方程 (3.1) 得到不变量 $\theta=\frac{t}{x}$, 并且由 $\frac{dx}{x}=\frac{du}{u+t}$, 得 $u=-t+A(\theta)x$, 将其代入方程 (2.1), 解得

$$A(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}[\theta+\frac{1}{2}B+\arctan\frac{\theta^2}{B}]+\frac{c_1}{\theta},\\ -\frac{c_2}{\theta}+c_3,\\ \frac{c_4}{\theta}+\frac{1}{\theta}(\theta-\frac{1}{2}B+\frac{B\sqrt{\ln(2(\theta+Q))}}{\theta Q}).\end{cases}$$

当 $A(\theta)=\frac{1}{\theta}[\theta+\frac{1}{2}B+\arctan\frac{\theta^2}{B}]+\frac{c_1}{\theta}$ 时, 即可得到方程 (2.1) 的不变解

$$u=x+t(-1+c_1+\frac{1}{2}C)+t\arctan\frac{x^2}{t^2C},$$

其中$Q=\sqrt{-2+\theta^2}$, $B=\sqrt{-\theta^2(-2+\theta^2)}$, $C=\sqrt{\frac{x^2(2t^2-x^2)}{t^4}}$, c_1,c_2,c_3,c_4 位任意常数, 由于篇幅有限省去其它两种情况的不变解.

1. 下面计算古典对称

$$X_1+X_3=x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+(u+t)\frac{\partial}{\partial u}$$

对应的 Lie 变换群. X_1+X_3 对应的初值问题为

$$\begin{cases}\frac{dx^*}{d\varepsilon^*}=x^*, \frac{dt^*}{d\varepsilon^*}=t^*,\ \frac{du^*}{d\varepsilon^*}=u^*+t^*,\\ x^*\mid_{\varepsilon=0}=x,\ t^*\mid_{\varepsilon=0}=t,\ u^*\mid_{\varepsilon=0}=u.\end{cases} \tag{3.2}$$

通过求解 (3.2) 式, 得到对应的单参数 Lie 变换群如下

$$\begin{cases}x^*=e^{\varepsilon}x,\\ t^*=e^{\varepsilon}t,\\ u^*=e^{\varepsilon}(u+t\varepsilon).\end{cases} \tag{3.3}$$

将 Lie 变换群 (3.3) 作用于该情况的不变解 $u=x+t(-1+c_1+\frac{1}{2}C)+t\arctan\frac{x^2}{t^2C}$, 得到下面的新解

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}[-2t+2c_1t+2\varepsilon t+2\arctan(\frac{x^2}{t^2D})t+2x+tC].$$

其中$D=\sqrt{\frac{e^{4\varepsilon}(2e^{-4\varepsilon}t^2x^2-e^{-4\varepsilon}x^4)}{t^4}}$.

2. 通过古典对称

$$X_2+X_3+X_5=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}+t\frac{\partial}{\partial u}$$

对应的单参数 Lie 变换群为

$$\begin{cases}x^*=x+\varepsilon,\\ t^*=t+\varepsilon,\\ u^*=\frac{1}{2}(2u+2t\varepsilon+\varepsilon^2).\end{cases} \tag{3.4}$$

将 Lie 变换群 (3.4) 作用于该情况的不变解 $u_1(x,t)$, 得到

$$u_2(x,t)=-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\varepsilon(-\varepsilon+t)+\arctan\frac{(\varepsilon-x)^2}{(\varepsilon-t)^2E}(-\varepsilon+t)+(-\varepsilon+t)(-1+c_1+\varepsilon+\frac{1}{2}E)+x.$$

其中 $E=\sqrt{\frac{2(\varepsilon-t)^2(\varepsilon-x)^2-(\varepsilon-x)^4}{(\varepsilon-t)^4}}$, 以上得到的精确解都是对应方程的新解, 因篇幅有限, 其它情况在本文中不进行讨论.

4 本文结论

偏微分方程 (PDEs)的求解经常出现在物理、工程力学等研究领域中. 随着科技的进步, 推动了求解 PDEs 的持续发展, 目前计算 PDEs 的不变解显得尤为重要. 本文通过应用吴 - 微分特征列集算法和 Mathematica 软件, 获得了 Poisson 方程的对称和 Lie 代数的一维最优系统, 并且计算了最优系统中对应元素的 Lie 变换群. 将所得的 Lie 变换群作用于不变解得到了新的精确解, 达到了丰富 Poisson 方程的精确解的效果.

参 考 文 献

[1] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and differential equations [M]. New York, Berlin: Spring-Verlag, 1989.

[2] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation [J]. J. Math. Mech., 1969(18): 1025–1042.

[3] Bluman G W, Cheviakov A F, Anco S C. Applications of symmetry methods to partial differential equations [M]. New York: Springer, 2010.

[4] 白永强, 薛红梅. MKdV 和 FPU 方程的李点对称 [J]. 数学杂志, 2015, 35(4): 995–1004.

[5] Peter J Olver. Applications of lie groups to differential equations (2nd ed.) [M]. New York: Spring-Verlag, 1993.

[6] Ames W F. Group analysis of differential equations [M]. New York: Academic Press, 1982.

[7] Patera J, Winternitz P, Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics.I. general method and the poincaré group [J]. J. Math. Phys., 1975, 16(8): 1597–1614.

[8] Patera J, Winternitz P, Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics.II. the similitude group [J]. J. Math. Phys., 1975, 16(8): 1615–1624.

[9] Mu M R, Temuer Chaolu. Lie symmetries, 1-dimensional optimal system and optimal reductions of (1+2)-dimensional nonlinear schrödinger equation [J]. J. Appl. Math. Phys., 2014, 2(7): 603-620.

[10] Chou K S, Qu C Z. Optimal systems and group classification of (1+2)-dimensional heat equation [J]. Acta Appl. Math., 2004, 83(3): 257—287.

[11] Ghoshhajra S, Kandel S, Pudasaini S P. Optimal systems of lie subalgebras for a two-phase mass flow [J]. Intern. J. Nonl. Mech., 2017, 88: 109–121.

[12] Hu X R, Li Y Q, Chen Y. A direct algorithm of one-dimensional optimal system for the group invariant solutions [J]. J. Math. Phys., 2015, 56(5): 1597–316.

[13] 李婷, 沃维丰. GdKP 方程的最优系统和群不变解 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2016, 32(3): 324–330.

[14] Liu R C, He W L, Zhang S L, Qu C Z. One-parameter optimal systems for the nonlinearevolution equation [J]. J. Northwest Univ., 2003, 33(4): 383–388.

[15] Xiong N, Li Y Q, Chen J C, Chen Y. One-dimensional optimal system and similarity reductions of Wu-Zhang equation [J]. Commun. Theor. Phys., 2016, 66(7): 1–11.

[16] 朝鲁. 微分方程 (组) 对称向量的吴 - 微分特征列集算法及其应用 [J]. 数学物理学报. 1999, 19 (3): 326–332.

[17] 特木尔朝鲁, 白玉山. 基于吴方法的确定和分类 (偏) 微分方程古典和非古典对称新算法理论 [J]. 中国科学 A: 数学, 2010, 40(4): 331–348.

[18] 朝鲁, 银山. 一类偏微分方程 (组) 非古典对称存在性的判定方法 [J]. 系统科学与数学, 2012, 32(8): 976–985.

[19] Bluman G W, Temuerchaolu. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation [J]. J. Math. Phys., 2005, 46(2): 307-E.

[20] 特木尔朝鲁, 张志勇. 一类非线性波动方程的势对称分类 [J]. 系统科学与数学, 2009, 29(3): 389–411.

[21] 特木尔朝鲁, 额尔敦布和, 郑丽霞. 扩充偏微分方程 (组) 守恒律和对称的辅助方程方法及微分形式吴方法的应用 [J]. 应用数学学报, 2007, 30(5): 910–927.

[22] TumuerChaolu, Bai Y S. An algorithm for determining approximate symmetries of differential equations based on Wu's method [J]. Chin. J. Engin. Math., 2011, 28(5): 617–622.

[23] TemuerChaolu, Bai Y S. Differential characteristic set algorithm for the complete symmetry classification of (partial) diffferential equations [J]. Appl. Math. Mech., 2009, 30(5): 595–606.

[24] 苏道毕力格, 王晓民, 乌云莫日根. 对称分类在非线性偏微分方程组边值问题中的应用 [J]. 物理学报, 2014, 63(4): 6–12.

[25] 苏道毕力格, 王晓民, 鲍春玲. 利用对称方法求解非线性偏微分方程组边值问题的数值解 [J]. 应用数学, 2014, 27(4): 708–713.

ONE-DIMENSIONAL OPTIMAL SYSTEM AND THE INVARIANT SOLUTIONS OF POISSON EQUATION

BAI Yue-xing, SUDAO Bilige

(*College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China*)

Abstract: In this paper, we discuss one-dimensional optimal system and the invariant solutions of Poisson equation. By using Wu-differential characteristic set algorithm with the aid of Mathematica software, the classical symmetries of the Poisson equation are calculated, and the one-dimensional optimal system of Lie algebra is constructed. And we obtain the invariant solution of the Poisson equation corresponding to one element in one dimensional optimal system by using the invariant method, which generalizes the exact solutions of the Poisson equation.

Keywords: classical symmetry; optimal system; Wu-differential characteristic set algorithm; invariant solutions

2010 MR Subject Classification: 22E60; 35B06