Vol. 38 (2018)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有非局部项的热方程的能控性

周秀香
(岭南师范学院数学与统计学院, 广东 湛江 524048)

摘 要: 本文研究了具有非局部项的热方程的能控性问题. 利用对偶原理和反证法, 获得当系统施加双线性控制时, 具有非局部项的热方程不是零能控的. 推广了受控系统不能边界零能控的结果.

关键词: 非局部项; 热方程; 零能控性; 双线性控制
MR(2010) **主题分类号**: 93B05; 45K05 **中图分类号**: O231.4
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)04-0696-05

1 引言

给定 $T>0$, 并设 $Q=(0,1)\times(0,T)$. 考虑如下具有非局部项的受控系统

$$\begin{cases} y_t(x,t)-y_{xx}(x,t)=a\int_0^t y(x,s)\,\mathrm{d}s+b(x)u(t), & (x,t)\in Q,\\ y(0,t)=y(1,t)=0, & t\in(0,T),\\ y(x,0)=y_0(x), & x\in(0,1), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a\in\mathbf{R}$ 是非零常数, $b\in L^2(0,1)$ 是给定的函数, $u\in L^2(0,T)$ 是控制函数且 $y_0\in L^2(0,1)$ 是初始条件. 这类控制称为"双线性"控制 (参见文献 [1]). 由 Galerkin 方法可知 (参见文献 [2]), 系统(1.1) 存在唯一的解 $y\in L^2(Q)$.

系统(1.1) 主要描述含有关于时间的非局部反应项的一类扩散现象. 这个模型在热交换、人口动力学、核反应等领域有着广泛的应用. 因此关于系统(1.1) 的能控性问题已经逐渐引起学者的广泛关注. 首先, 我们一起回忆一下零能控的概念.

定义 1.1 系统(1.1) 在时刻 T 是零能控的, 是指对于任意 $y_0\in L^2(0,1)$, 存在控制 $u\in L^2(0,T)$ 使得系统(1.1) 相应的解满足

$$y(x,T)=0,\ \text{几乎处处}\ x\in(0,1). \tag{1.2}$$

当 $a=0$ 时, 系统(1.1) 是经典的热方程. 众所周知, 无论施加内部控制还是边界控制, 这类方程都是零能控的 (参见文献 [3]). 当 $a\neq0$ 时, 由于非局部项的存在, 系统(1.1) 施加内部控制和边界控制都不是零能控的 (参见文献 [4]). 而本文讨论的是施加双线性控制后, 系统(1.1) 的零能控性. 我们有如下结论.

*收稿日期: 2017-03-19 接收日期: 2017-06-20
基金项目: 岭南师范学院校级自然科学专项项目基金资助 (ZL1612); 广东省青年创新人才类项目基金资助 (2015KQNCX090); 国家自然科学基金项目基金资助 (11601213).
作者简介: 周秀香 (1983–), 女, 吉林吉林, 讲师, 主要研究方向: 分布参数控制理论.

定理 1.1 假设 $b_j = \int_0^1 b(x)\sin(j\pi x)\,\mathrm{d}x \neq 0,\ \forall\, j \geq 1$. 则系统(1.1) 不是零能控的, 即存在 $y_0 \in L^2(0,1)$ 使得对于任意 $u \in L^2(0,T)$, 系统(1.1) 相应的解都不满足

$$y(x,T) = 0,\ \text{几乎处处}\ x \in (0,1).$$

本文分为四部分: 第二部分给出与零能控等价的充要条件; 第三部分给出定理 1.1 的证明, 也就是证明与之等价的充要条件不成立; 最后一部分是本文的总结, 并指出进一步研究的问题.

2 引理

在证明定理 1.1 之前, 给出零能控的一个等价命题.

引理 2.1 系统(1.1) 在时刻 T 零能控的充要条件是

$$\int_0^T \int_0^1 b(x)\varphi(x,t)u(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(0,1), \tag{2.1}$$

其中 φ 是下述对偶系统的解

$$\begin{cases} \varphi_t + \varphi_{xx} + a\displaystyle\int_t^T \varphi(x,s)\,\mathrm{d}s = 0, & (x,t) \in Q, \\ \varphi(0,t) = \varphi(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ \varphi(x,T) = \varphi_T(x), & x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.2}$$

证 方程(1.1) 两端同时乘以 φ, 再在 Q 上分部积分可得

$$\int_0^1 y(x,T)\varphi_T(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 y_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = \int\int_Q b(x)u(t)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

因此存在控制 $u \in L^2(0,T)$ 使得 $y(x,T) = 0$, 几乎处处 $x \in (0,1)$ 的充要条件是

$$\int_0^T \int_0^1 b(x)\varphi(x,t)u(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, \varphi_T \in L^2(0,1).$$

结论得证.

3 定理 1.1 的证明

设 $w_j(x) = \sin(j\pi x)$, $\lambda_j = (j\pi)^2$, $\forall\, j \in \mathbf{N}$. 从而存在整数 j_0, 使得 $|a| < \lambda_{j_0}^2/4$. 设 $M > j_0$ 是一个充分大的整数. 令

$$\varphi_T(x) = \sum_{k=1}^{10} \beta_{M+k} w_{M+k}(x), \quad \forall\, x \in (0,1),$$

其中 $\{\beta_{M+k}\}_{k=1}^{10}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{10} b_{M+k}\beta_{M+k} \frac{1+\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}}{2\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}} (\mu_{M+k}^- + k^2\pi^2 + 2Mk\pi^2)^l = 0, \quad l = 0, 1, \cdots 5, \tag{3.1}$$

并且

$$\sum_{k=1}^{10} b_{M+k}\beta_{M+k}\lambda_{M+k}^{-2}=0. \tag{3.2}$$

由于 (3.1) 和 (3.2) 式是关于 $\{\beta_{M+k}\}_{k=1}^{10}$ 的七个方程十个未知数的线性方程组, 所以存在非零解 $\{\beta_{M+k}\}_{k=1}^{10}$ 且其上、下界与 M 无关. 以下用 C 来表示与 M 无关的常数. 于是, 方程 (2.2) 的解表示为

$$\varphi(x,t)=\sum_{k=1}^{10}\left(C_{1,M+k}e^{\mu_{M+k}^{+}(T-t)}+C_{2,M+k}e^{\mu_{M+k}^{-}(T-t)}\right)w_{M+k}(x),\quad \forall\,(x,t)\in Q,$$

其中

$$\begin{aligned}
&\mu_{M+k}^{\pm}=\frac{-\lambda_{M+k}\mp\sqrt{\lambda_{M+k}^2+4a}}{2}=-\frac{\lambda_{M+k}}{2}\left(1\pm\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}\right),\\
&C_{1,M+k}=\beta_{M+k}\frac{1+\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}}{2\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}},\ \ C_{2,M+k}=\beta_{M+k}\frac{-1+\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}}{2\sqrt{1+4a/\lambda_{M+k}^2}}.
\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^1|\varphi(x,0)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(C_{1,M+k}e^{\mu_{M+k}^{+}T}+C_{2,M+k}e^{\mu_{M+k}^{-}T}\right)^2,\\
I_2 &:= \int_0^T|\int_0^1 b(x)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x|^2\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}\left(C_{1,M+k}e^{\mu_{M+k}^{+}(T-t)}+C_{2,M+k}e^{\mu_{M+k}^{-}(T-t)}\right)|^2\,\mathrm{d}t\\
&\le 2\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}C_{1,M+k}e^{\mu_{M+k}^{+}t}|^2\,\mathrm{d}t+2\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}C_{2,M+k}e^{\mu_{M+k}^{-}t}|^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

记上式最后两项分别为 A_1, A_2.

由于 $\mu_{M+k}^{+}+\mu_{M+k}^{-}=-\lambda_{M+k}$, 则

$$\begin{aligned}
A_1&=2\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}C_{1,M+k}e^{-(\mu_{M+k}^{-}+\lambda_{M+k})t}|^2\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^T e^{-2M^2\pi^2t}|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}C_{1,M+k}\exp\{(-\mu_{M+k}^{-}-k^2\pi^2-2Mk\pi^2)t\}|^2\,\mathrm{d}t\\
&=2\int_0^T e^{-2M^2\pi^2t}g_M(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中

$$g_M(t)=\left(\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}C_{1,M+k}\exp\{(-\mu_{M+k}^{-}-k^2\pi^2-2Mk\pi^2)t\}\right)^2,\ \forall\,t\in[0,T].$$

由 (3.1) 式可得 $g_M(0)=g'_M(0)=\cdots=g_M^{(10)}(0)=0$ 且 $|g_M^{(r)}(t)|\le CM^r$, $\forall\, r\ge 0$. 于是

$$\begin{aligned}A_1&=2\int_0^T e^{-2M^2\pi^2 t}g_M(t)\,\mathrm{d}t\\&=2\sum_{l=0}^{10}\frac{e^{-2M^2\pi^2T}}{(-2M^2\pi^2)^{l+1}}g_M^{(l)}(T)+2\int_0^T\frac{e^{-2M^2\pi^2T}}{(-2M^2\pi^2)^{11}}g_M^{(11)}(t)\,\mathrm{d}t\\&\le Ce^{-2M^2\pi^2T}\sum_{l=0}^{10}\frac{M^l}{M^{2l+2}}+\frac{C}{M^{11}}\int_0^T e^{-2M^2\pi^2T}\,\mathrm{d}t\le\frac{C}{M^{12}}.\end{aligned}$$

同文献 [5], 有

$$C_{2,M+k}=\beta_{M+k}\left(\frac{a}{\lambda_{M+k}^2}+O(\lambda_{M+k}^{-4})\right),$$

并且

$$e^{\mu_{M+k}^{-}t}=1+\frac{at}{\lambda_{M+k}}+O(\lambda_{M+k}^{-2}).$$

于是, 由 (3.2) 式可得

$$\begin{aligned}A_2&=2\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}C_{2,M+k}e^{\mu_{M+k}^{-}t}|^2\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}\beta_{M+k}(a/\lambda_{M+k}^2+O(\lambda_{M+k}^{-4}))(1+at/\lambda_{M+k}+O(\lambda_{M+k}^{-2}))|^2\,\mathrm{d}t\\&=2\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}b_{M+k}\beta_{M+k}(a^2t/\lambda_{M+k}^3+O(\lambda_{M+k}^{-4}))|^2\,\mathrm{d}t\\&\le C\int_0^T|\sum_{k=1}^{10}((M+k)^{-6}+(M+k)^{-8})|^2\,\mathrm{d}t\le\frac{C}{M^{12}}.\end{aligned}$$

另一方面, 同文献 [5] 可得

$$I_1\ge C(a^2/M^8-1/M^{16})-Ce^{-M^2T}\ge\frac{C}{M^8}.$$

假设系统(1.1) 在时刻 T 零能控, 则由引理 2.1 可得

$$\int_0^1 y_0(x)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x=-\int_0^T\int_0^1 b(x)\varphi(x,t)u(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

进而, 由比较定理可得

$$\int_0^1|\varphi(x,0)|^2\mathrm{d}x\le C\int_0^T|\int_0^1 b(x)\varphi(x,t)\mathrm{d}x|^2\mathrm{d}t.$$

由前面的讨论可知, 存在与 M 无关的两个常数 C_1, C_2 使得

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{M^8}&\le\int_0^1|\varphi(x,0)|^2\mathrm{d}x\le C\int_0^T|\int_0^1 b(x)\varphi(x,t)\mathrm{d}x|^2\mathrm{d}t\\&\le C(A_1+A_2)\le\frac{C_2}{M^{12}}.\end{aligned}$$

这对于充分大的 M 是矛盾的. 故系统(1.1) 不能零能控. 证毕

4 结论

本文讨论了在施加双线性控制时, 具有非局部项的热方程不是零能控的. 推广了文献 [4] 的结果. 应当指出, 这类问题还需要更加深入的研究, 比如此类受控系统的能稳性问题. 相信进一步地探究更有利于把结果应用到实际中.

参 考 文 献

[1] Micu S, Zuazua E. On the controllability of a fractional order parabolic eqaution[J]. SIAM J. Control Optim., 2006, 44(6): 1950–1972.

[2] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[3] Zhang X. A remark on null exact controllability of the heat equation[J]. SIAM J. Control Optim., 2001, 40(1): 39–53.

[4] Guerrero S, Yu O. Imanuvilov. Remarks on non controllability of the heat equations with memory[J]. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2013, 19(1): 288–300.

[5] Zhou X, Gao H. Interior approximate and null controllability of the heat equation with memory[J]. Comput. Math. Appl., 2014, 67(3): 602–613.

CONTROLLABILITY OF THE HEAT EQUATION WITH NONLOCAL TERM

ZHOU Xiu-xiang

(*School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang 524048, China*)

Abstract: In this paper, we study the controllability of the heat equation with local term. By using duality principle and reduction to absurdity, we show that the heat equation with local term is not null controllable by means of bilinear control, which extends the corresponding result of this controlled system with boundary control.

Keywords: local term; heat equation; null controllable; bilinear control

2010 MR Subject Classification: 93B05; 45K05