Vol. 38 (2018)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

$|x|^{\alpha}$ 的有理插值

许江海 [1], 赵 易 [2]

(1. 杭州电子科技大学理学院, 浙江 杭州 310018)
(2. 杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 311121)

摘 要: 本文研究了 Newman-α 型有理算子逼近 $|x|^{\alpha}(1\le\alpha<2)$ 收敛速度的问题, 取插值结点组为 $X=\{x_i=b^i, b=m^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}\}_{i=1}^{n}$, 其中 $e<m<n$. 利用基本不等式以及放缩法, 获得了逼近阶为 $3e^{\frac{-\alpha\sqrt{n}}{logm}}$.

关 键 词: 有理插值; Newman-α 型有理算子; 逼近阶

MR(2010) **主题分类号**: 41A05; 41A20; 41A25 **中图分类号**: O174.41

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)04-0693-03

1 引言

众所周知, 对于 $[-1,1]$ 上的函数 $|x|$ 用 n 次多项式逼近的最佳逼近阶 [1] 为 $O(\frac{1}{n})$, 此结果在阶的意义下是精确的, 不可改进. 1964 年, Newman 取结点组 $X_n=\{a^k\}_{k=0}^{n-1}, a=e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 构造 $|x|$ 的有理插值函数

$$r_n(X;x)=x\frac{p(x)-p(-x)}{p(x)+p(-x)},\ p(x)=\prod_{k=1}^{n}(x+x_k),$$

得到 [2] 结论 $||x|-r_n(X;x)|\le 3e^{-\sqrt{n}}, x\in[-1,1]$. 这个结论大大改进了多项式插值的结果, 也引起了许多学者的研究兴趣, 几年来关于 $|x|$ 的有理插值, 围绕着结点分布与误差收敛速度发表了许多有意义的结果 [3−5].

2004 年, 夏懋 [6] 研究了对 $|x|^{\alpha}(1\le\alpha<2)$ 在等距结点的 Lagrange 插值多项式的逼近, 主要给出了在零点的逼近阶, 文中最终得到定理: 令 $m\in n, n=2m-1$ 且 $1\le\alpha<2$, 则有 $L_n(|x|^{\alpha})=O(\frac{1}{n\ln n})$; 而在 2011 年, 张慧明、李建俊和门玉梅 [7] 等研究了 $|x|$ 在正切结点组的有理插值, 得到逼近阶为 $O(\frac{1}{n\ln n})$; 朱来义 [8] 等取偶次第二类 Chebyshev 多项式零点的第二类 chebyshev 结点, 用不同的方法得到逼近阶为 $O(\frac{1}{n\log n})$, 且不能改善.

本文对 Newman 结点组进行了调整, 将 Newman 结点组中的 e 一般化为任意 m $(e<m<n)$, 在 $x\in[-1,1]$ 选取结点组 $X=\{x_i=b^i, b=m^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}\}_{i=1}^{n}$, Newman-$\alpha$ 型算子定义为

$$r_n(X;x)=x^{\alpha}\frac{p(X;x)-p(X;-x)}{p(X;x)+p(X;-x)}, p(X;x)=\prod_{i=1}^{n-1}(x+b^i),$$

构造 $|x|^{\alpha}$ 的有理插值函数, 其中 $1\le\alpha=\frac{q}{p}<2$, p,q 互素且为奇数, 得到如下一般的结论.

*收稿日期: 2017-04-18 接收日期: 2017-06-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11601110).
作者简介: 许江海 (1992–), 男, 安徽安庆, 硕士, 主要研究方向: 函数逼近及构造分析.

定理 1.1 对 $n \geq 17$, 成立 $|E_n(X;x)| \leq 3e^{\frac{-\alpha\sqrt{n}}{\log m}}$.

2 定理证明

为了方便证明定理 1.1, 先给出如下引理.

引理 2.1 对 $n \geq 17$, 有 $\prod\limits_{j=1}^{n-1} \frac{1-b^j}{1+b^j} \leq 3e^{\frac{-\alpha\sqrt{n}}{\log m}}$.

证 对于 $0 \leq t \leq 1$, 有熟知的不等式 $\frac{1-t}{1+t} \leq e^{-2t}$, 那么

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-b^j}{1+b^j} \leq \exp\{-2\sum_{j=1}^{n-1} b^j\} = \exp\{-2\frac{b-b^n}{1-b}\}.$$

一方面, $b-b^n = m^{\frac{-1}{\sqrt{n}}} - m^{-\sqrt{n}} = e^{\frac{1\log m}{\sqrt{n}}} - e^{-\sqrt{n}\log m}$. 经初等计算得, 当 $n \geq 17$ 时有 $b-b^n \geq e^{\frac{-\log m}{\sqrt{17}}} - e^{-\sqrt{17}\log m} > \frac{1}{2}$.

另一方面, 又由 $1-e^{-t} \leq t$, 故 $1-b = 1-m^{\frac{-1}{\sqrt{n}}} = 1-e^{\frac{-\log m}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\log m}{\sqrt{n}}$, 于是

$$\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-b^j}{1+b^j} \leq \exp\{\frac{-\sqrt{n}}{\log m}\} \leq 3e^{\frac{-\sqrt{n}}{\log m}}.$$

引理结论得证.

定理 1.1 的证明 由于 $|x|^\alpha$ 与 $r_n(X;x)$ 为偶函数, 故只需考虑 $x \in [0,1]$ 的情形.

1) 当 $x \in [0,b^n]$ 时, $p(X;-x) = \prod\limits_{i=1}^{n-1}(b^i - x) > \prod\limits_{i=1}^{n-1}(b^i - b^n) > 0$, 有

$$r_n(X;x) = x^\alpha \frac{p(X;x)-p(X;-x)}{p(X;x)+p(X;-x)} < x^\alpha,$$

则 $|E_n(X;x)| = ||x|^\alpha - r_n(X;x)| < x^\alpha \leq b^{n\alpha} = e^{-\alpha\sqrt{n}\log m} \leq e^{\frac{-\alpha\sqrt{n}}{\log m}}$. 其次, 有

$$|E_n(X;x)| = ||x|^\alpha - r_n(X;x)| = 2x^\alpha |\frac{p(X;-x)}{p(X;x)+p(X;-x)}| \leq \frac{2x^\alpha}{|\frac{p(X;x)}{p(X;-x)}|-1}.$$

2) 当 $x \in [b^n,1]$ 时, 必存在某一个 $k, 0 \leq k \leq n-1$, 使得 $b^{k+1} \leq x \leq b^k \leq b$, 则

$$\begin{aligned}|\frac{p(X;-x)}{p(X;x)}| &= \prod_{i=1}^{k} \frac{x_i - x}{x_i + x} \prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{x-x_i}{x+x_i} \leq \prod_{i=1}^{k} \frac{b^i - b^n}{b^i + b^n} \prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{b^k - b^i}{b^k + b^i} \\ &= \prod_{j=n-k}^{n-1} \frac{1-b^j}{1+b^j} \prod_{j=1}^{n-k-1} \frac{1-b^j}{1+b^j} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1-b^j}{1+b^j} \leq e^{\frac{-\sqrt{n}}{\log m}},\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&|E_n(X;x)| = ||x|^\alpha - r_n(X;x)| = 2x^\alpha |\frac{p(X;-x)}{p(X;x)+p(X;-x)}| \\ \leq &\frac{2x^\alpha}{|\frac{p(X;x)}{p(X;-x)}|-1} \leq 3b^\alpha e^{\frac{-\sqrt{n}}{\log m}} \leq 3e^{\frac{-\sqrt{n}}{\log m}}.\end{aligned}$$

综上定理得证.

3 结束语

本文取插值结点组 $X=\{x_i=b^i, b=m^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}\}_{i=1}^{n}$ 结点时, 得到 Newman-α 型有理算子逼近 $|x|^\alpha$ 的收敛速度为 $3e^{\frac{-\alpha\sqrt{n}}{\log m}}$, 该结果相比以往估计是更一般性的结论, 当 $\alpha=1$ 时, 结果包含了 $|x|$ 的有理插值得到的逼近阶. 后续将对其他结点组的情况进行近一步探究, 使结论更加完善.

参考文献

[1] Bernstein S. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés[J]. Acta Math., 1914, 37(1): 1–57.

[2] Newman D J. Rational approximation to $|x|$[J]. Michigan Math. J., 1964, 11(1): 11–14. J. Wuhan Univ. (Nat. Sci. Ed.), 2003, 49(5): 571–574.

[3] Brutman L, Passow E. On rational interpolation to $|x|$[J]. Constr. Approx., 1997, 13(3): 381–391.

[4] Xuli H. On the order of approximation for the rational interpolation to[J]. Approx. Theo. Appl., 2002, 18(2): 58–64.

[5] Xie Tingfang, Zhou Songping. The asymptotic property of approximation to $|x|$ by Newman's rational operators[J]. Acta Math. Hungar, 2004, 103(4): 313–319.

[6] Xia M. On Lagrange interpolation to $|x|^\alpha(1\le\alpha<2)$with equally spaced nodes[J]. Anal. Theo. Appl., 2004. 20(3): 281–287.

[7] 张慧明, 门玉梅, 李建俊. $|x|$ 在正切结点组的有理插值 [J]. 天津师范大学学报 (自然科学版), 2011, 31(4): 5–6.

[8] Zhu Laiyi, Dong Zhaolin. On Newman-type rational interpolation to $|x|^\alpha$ at the Chebyshev nodes of the second kind[J]. Anal. The. Appl., 2006, 22(3): 262–270.

ON RATIONAL INTERPOLATION TO $|x|^\alpha$

XU Jiang-hai[1], ZHAO Yi[2]

(*1. School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

(*2. School of Science, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of the convergence rate of Newman-α rational operator approximation to $|x|^\alpha$ $(1\le\alpha<2)$, and take the interpolation node group as $X=\{x_i=b^i, b=m^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}\}_{i=1}^{n}$, where $e<m<n$. By using the basic inequality and the scaling method, we obtain that the approximation order is $3e^{\frac{-\alpha\sqrt{n}}{\log m}}$.

Keywords: rational interpolation; Newman-α type rational operators; order of approximation

2010 MR Subject Classification: 41A05; 41A20; 41A25