

多目标优化问题近似解的非线性标量化刻画

李小燕, 李美术, 高 英
(重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331)

摘 要: 本文主要研究非线性标量化问题近似解与多目标优化问题近似解的关系. 利用两种范数建立非线性标量化问题, 得到了多目标优化问题近似有效解和近似真有效解的非线性标量化结果, 并给出例子对主要结果进行了说明.

关键词: 多目标优化; 近似解; 范数; 非线性标量化

MR(2010) 主题分类号: 90C29; 90C30

中图分类号: O221.6

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2018)03-0563-08

1 引言

多目标优化问题中, 如何定义最优解是首要问题. 目前研究的解的概念主要有: 有效解, 弱有效解和各种真有效解的概念. 关于这些解的存在性, 最优性条件和对偶等理论是多目标优化理论研究的主要内容. 但这些解存在性条件较强, 通常需要对可行集增加某种意义下的凸性或紧性条件. 大量研究表明, 在非紧条件下, 近似解有可能存在. 因此, 在非紧条件下研究近似解成为了多目标优化问题研究的又一重要方向. 近几十年来, 一些学者提出了各种不同的近似解的概念, 并进行了进一步的研究. 1979 年, Kutateladze^[1] 首先提出了近似解的概念. 1984 年, Loridan^[2] 引进了多目标优化问题 ε -有效解的概念. 随后, 一些学者又提出了几种近似解的概念 (如 White^[3], Helbig^[4]). 2006 年, Gutiérrez 等人^[5,6] 利用 co-radiant 集定义了多目标优化问题的一种新的近似解, 该近似解推广并统一了先前给出的诸多近似解的概念 (如 Kutateladze^[1], White^[3], Helbig^[4]). 受文献 [5, 6] 中研究工作的启发, 高英等人^[7,8] 在 Benson 真有效解的基础上, 利用 co-radiant 集提出了一种近似真有效解的概念.

求解多目标优化问题一个重要途径是将多目标优化问题转化为数值优化问题, 这种转化方法称为标量化方法. 标量化主要分为线性标量化和非线性标量化. 线性标量化主要是在凸性和一些广义凸性条件下利用凸集分离定理或择一定理进行刻画. 非线性标量化主要是通过一些特殊的非线性函数, 在非凸分离定理的基础上进行研究. 近年来, 对有效解, 弱有效解和各种真有效解的标量化研究可参见文献 [9–15], 关于多目标优化问题各种近似解的标量化研究可参见文献 [16–20]. 但利用范数研究多目标优化问题各种近似解的非线性标量化的成果并不多见. 因此本文受文献 [7–9, 17] 的启发, 利用范数考虑多目标优化问题近似有效解和近似真有效解的非线性标量化刻画, 并举例说明主要结果.

*收稿日期: 2016-11-28

接收日期: 2017-04-01

基金项目: 国家自然科学基金 (11201511; 11771064); 重庆市科委项目 (cstc2015jcyjA00005); 重庆市教委项目 (KJ1500309).

作者简介: 李小燕 (1990–), 女, 重庆, 硕士, 主要研究方向: 最优化理论与方法.

通讯作者: 高英.

2 预备知识

令 R^n 为 n 维欧氏空间, R_+^n 为其非负卦限. 设 $C \subset R^n$, $\text{int}C$ 表示 C 的内部, $\text{cl}C$ 表示 C 的闭包. 若 $C \cap (-C) \subset \{0\}$, 则称 C 为点集. 任取 $x, y \in R^n$, 记

$$x < y \iff y - x \in \text{int}R_+^n; x \leq y \iff y - x \in R_+^n \setminus \{0\}; x \leq y \iff y - x \in R_+^n.$$

由集合 C 生成的锥定义为 $\text{cone}(C) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha C$, 其中 $\alpha \in R$.

定义 2.1^[9] 设 $S \subset R^n$, S 的回收锥 S^+ 定义为

$$S^+ = \{\hat{s} \in R^n : \text{存在 } \{\alpha_k\} \subset R, \{s^k\} \subset S \text{ 使得 } \alpha_k > 0, \alpha_k \rightarrow 0 \text{ 且 } \alpha_k \cdot s^k \rightarrow \hat{s}\}.$$

考虑如下的多目标优化问题

$$(\text{MOP}) \begin{cases} \min & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T, \\ \text{s.t.} & x \in X, \end{cases}$$

其中 $X \subset R^n$ 非空, $f_i : X \rightarrow R, i = 1, \dots, p$. 令 $Y = f(X) := \bigcup_{x \in X} f(x)$.

定义 2.2^[5] 称 $C \subset R^p$ 为 co-radiant 集, 若对所有的 $d \in C$ 和 $\alpha > 1$ 都有 $\alpha d \in C$. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $C(\varepsilon) = \varepsilon C, C(0) = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon)$.

定义 2.3^[5,7] 设 $\varepsilon \in R$, 且 $\varepsilon \geq 0, x \in X, C \subset R^p$ 为 co-radiant 点集.

(i) 称 $\bar{x}$ 为 (MOP) 问题关于 C 的 ε -有效解, 若 $(f(\bar{x}) - C(\varepsilon)) \cap f(X) \subset \{f(\bar{x})\}$.

(ii) 称 $\bar{x}$ 为 (MOP) 问题关于 C 的 ε -真有效解, 若

$$\text{clcone}(f(X) + C(\varepsilon) - f(\bar{x})) \cap (-C(\varepsilon)) \subset \{0\}.$$

记 (MOP) 问题关于 C 的 ε -有效解和 ε -真有效解之集分别为 $E(f, C, \varepsilon)$ 和 $P(f, C, \varepsilon)$.

R^p 中的 l_∞ -范数和 l_α -范数分别定义为

$$\|y\|_\infty = \max\{|y_i| : 1 \leq i \leq p\} \text{ 和 } \|y\|_\alpha = \left[\sum_{i=1}^p |y_i|^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

其中 $y = (y_1, \dots, y_p)^T \in R^p, \alpha \in [1, \infty)$.

令 $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p)$, 其中 $\tilde{y}_i = \inf\{y_i : y_i \text{ 为 } y \in Y \text{ 的第 } i \text{ 个分量}\}, i = 1, \dots, p$. 若 $\bar{y} \in R^p$, 满足 $\bar{y} \leq \tilde{y}$, 则称 $\bar{y}$ 为 Y 的理想点.

设 $\|\cdot\|$ 为 R^p 中的某种范数, $\bar{y}$ 为 $Y = f(X)$ 的理想点. 考虑如下的非线性标量化问题:

$$(\text{SP}) \begin{cases} \min & \|f(x) - \bar{y}\|, \\ \text{s.t.} & x \in X. \end{cases}$$

定义 2.4 设 $\varepsilon \geq 0, \hat{x} \in X, \alpha \in [1, \infty)$.

(i) 称 $\hat{x}$ 为 (SP) 问题关于 $\|\cdot\|_\alpha$ 的 ε -最优解, 若 $\|f(\hat{x}) - \bar{y}\|_\alpha \leq \|f(x) - \bar{y}\|_\alpha + \varepsilon, \forall x \in X$.

(ii) 称 $\hat{x}$ 为 (SP) 问题关于 $\|\cdot\|_\alpha$ 的 ε -最优解, 若 $\|f(\hat{x}) - \bar{y}\|_\alpha \leq \|f(x) - \bar{y}\|_\alpha + \varepsilon, \forall x \in X$. 记 (SP) 问题关于 $\|\cdot\|_\infty$ 和 $\|\cdot\|_\alpha$ 的 ε -最优解之集分别为 $A_\infty(f, \varepsilon)$ 和 $A_\alpha(f, \varepsilon)$.

3 主要结果

本节利用 $\|\cdot\|_1$ 范数和 $\|\cdot\|_\infty$ 范数得到多目标优化问题近似有效解和近似真有效解的标量化结果. 若无特别说明, 本节总假设 $C \subset R_+^p$ 为 co-radiant 点集且 $0 \notin \text{cl}C$.

为了证明的方便, 假设 $y^1 = (y_1^1, \dots, y_p^1)^T \in R^p, y^2 = (y_1^2, \dots, y_p^2)^T \in R^p$, 由 $\|\cdot\|_1$ 范数的定义, $\|y^1 + y^2\|_1 \leq \|y^1\|_1 + \|y^2\|_1$. 若 $y^1, y^2 \in R_+^p$, 则满足等式关系 $\|y^1 + y^2\|_1 = \|y^1\|_1 + \|y^2\|_1$, 这是因为

$$\|y^1 + y^2\|_1 = \sum_{i=1}^p |y_i^1 + y_i^2| = \sum_{i=1}^p (|y_i^1| + |y_i^2|) = \sum_{i=1}^p (|y_i^1|) + \sum_{i=1}^p (|y_i^2|) = \|y^1\|_1 + \|y^2\|_1.$$

本文在很多地方用到这一结论.

定理 3.1 设 $\varepsilon \geq 0, 0 < \beta < d_{\|\cdot\|_1}(0, C)$, 则

(i) $A_1(f, \varepsilon\beta) \subset E(f, C, \varepsilon)$;

(ii) 若 $Y + C(\varepsilon)$ 为闭集, 则 $A_1(f, \varepsilon\beta) \subset P(f, C, \varepsilon)$,

其中 $d_{\|\cdot\|_1}(0, C)$ 为 0 到 C 的距离, 即 $d_{\|\cdot\|_1}(0, C) = \inf\{\|c\|_1 : c \in C\}$.

证 设 $\hat{x} \in A_1(f, \varepsilon\beta)$, 令 $f(\hat{x}) = \hat{y}$, 则由定义 2.4 有

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_1 \leq \|y - \bar{y}\|_1 + \varepsilon\beta, \forall y \in Y. \quad (3.1)$$

(i) 当 $\varepsilon > 0$ 时, 若 $\hat{x} \notin E(f, C, \varepsilon)$, 则存在 $y^1 \in Y, y^1 \neq \hat{y}$, 使得 $y^1 - \hat{y} \in -C(\varepsilon)$. 从而存在 $c^1 \in C \subset R_+^p$, 使得 $\hat{y} = y^1 + \varepsilon c^1$. 因此 $\|\hat{y} - \bar{y}\|_1 = \|y^1 + \varepsilon c^1 - \bar{y}\|_1$. 由 $\bar{y}$ 为 Y 的理想点, 则 $\bar{y} \leq y^1$, 即 $y^1 - \bar{y} \in R_+^p$. 因此, 由 $\|\cdot\|_1$ 范数的性质可得

$$\|y^1 + \varepsilon c^1 - \bar{y}\|_1 = \|y^1 - \bar{y}\|_1 + \|\varepsilon c^1\|_1 > \|y^1 - \bar{y}\|_1 + \varepsilon\beta.$$

这与 (3.1) 式矛盾. 因此 $\hat{x} \in E(f, C, \varepsilon)$.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 若 $\hat{x} \notin E(f, C, 0)$, 则存在 $y^2 \in Y, y^2 \neq \hat{y}$, 使得 $y^2 - \hat{y} \in -C(0)$. 从而存在 $\hat{\varepsilon} > 0, c^2 \in C \subset R_+^p$, 使得 $\hat{y} = y^2 + \hat{\varepsilon} c^2$. 因此

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_1 = \|y^2 + \hat{\varepsilon} c^2 - \bar{y}\|_1 = \|y^2 - \bar{y}\|_1 + \|\hat{\varepsilon} c^2\|_1 > \|y^2 - \bar{y}\|_1.$$

这与 (3.1) 式矛盾. 因此 $\hat{x} \in E(f, C, 0)$.

综上, (i) 成立.

(ii) 当 $\varepsilon > 0$ 时, 若 $\hat{x} \notin P(f, C, \varepsilon)$, 则存在非零向量

$$-c \in \text{clcone}(f(X) + C(\varepsilon) - \hat{y}) \cap (-C(\varepsilon)).$$

从而存在 $\{\beta_k\} \subset R_+ \setminus \{0\}, \{y^k\} \subset f(X) = Y, \{c^k\} \subset C(\varepsilon)$, 使得 $\beta_k(y^k + c^k - \hat{y}) \rightarrow -c$.

若 $\{\beta_k\}$ 有界. 不失一般性, 假设 $\beta_k \rightarrow \beta_0$, 则 $\beta_0 \geq 0$. 若 $\beta_0 = 0$, 由 $C \subset R_+^p$ 有 $c^k \in C(\varepsilon) \subset R_+^p$, 因此 $y^k + c^k \geq \bar{y}$, 则 $y^k + c^k - \hat{y} \in \bar{y} - \hat{y} + R_+^p$, 从而 $-c \in (\bar{y} - \hat{y} + R_+^p)^+ = R_+^p$, 这与 $c \in C(\varepsilon)$ 矛盾. 若 $\beta_0 > 0$, 则 $y^k + c^k - \hat{y} \rightarrow -\frac{c}{\beta_0}$. 由 $Y + C(\varepsilon)$ 为闭集有

$$y^k + c^k \rightarrow \hat{y} - \frac{c}{\beta_0} \in Y + C(\varepsilon).$$

从而存在 $y^0 \in Y, d^0 \in C$ 使得 $\hat{y} = y^0 + \frac{c}{\beta_0} + \varepsilon d^0$, 则由 $\|\cdot\|_1$ 范数的性质可得

$$\begin{aligned}\|\hat{y} - \bar{y}\|_1 &= \|y^0 + \frac{c}{\beta_0} + \varepsilon d^0 - \bar{y}\|_1 > \|y^0 + \varepsilon d^0 - \bar{y}\|_1 \\ &= \|y^0 - \bar{y}\|_1 + \|\varepsilon d^0\|_1 > \|y^0 - \bar{y}\|_1 + \varepsilon\beta.\end{aligned}$$

这与 (3.1) 式矛盾.

若 $\{\beta_k\}$ 无界, 不失一般性, 假设当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\beta_k \rightarrow +\infty$, 则 $y^k + c^k - \hat{y} = y^k + \varepsilon d^k - \hat{y} \rightarrow 0$, 其中, $d^k \in C \subset R_+^p, \forall k$. 即 $\forall \gamma > 0$, 存在自然数 K_γ , 当 $k > K_\gamma$ 时, 有 $\|y^k + \varepsilon d^k - \hat{y}\|_1 < \gamma$, 则

$$\|y^k + \varepsilon d^k - \bar{y}\|_1 - \|\hat{y} - \bar{y}\|_1 < \|y^k + \varepsilon d^k - \hat{y}\|_1 < \gamma.$$

从而 $\|y^k + \varepsilon d^k - \bar{y}\|_1 - \gamma < \|\hat{y} - \bar{y}\|_1$. 因此存在 k^* 使得 $\|y^{k^*} + \varepsilon d^{k^*} - \bar{y}\|_1 \leq \|\hat{y} - \bar{y}\|_1$. 事实上, 若对任意的 k , $\|y^k + \varepsilon d^k - \bar{y}\|_1 > \|\hat{y} - \bar{y}\|_1$, 则存在 $\bar{\gamma} > 0$, 使得

$$\|y^k + \varepsilon d^k - \bar{y}\|_1 - \bar{\gamma} > \|\hat{y} - \bar{y}\|_1, \forall k. \quad (3.2)$$

令 $\gamma = \bar{\gamma}$, 则对 $\bar{\gamma}$ 存在自然数 $K_{\bar{\gamma}}$, 使得当 $k > K_{\bar{\gamma}}$ 时, $\|y^k + \varepsilon d^k - \bar{y}\|_1 - \bar{\gamma} < \|\hat{y} - \bar{y}\|_1$, 这与 (3.2) 式矛盾. 因此, 结合 $\|\cdot\|_1$ 范数的定义可得

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_1 \geq \|y^{k^*} + \varepsilon d^{k^*} - \bar{y}\|_1 = \|y^{k^*} - \bar{y}\|_1 + \|\varepsilon d^{k^*}\|_1.$$

从而 $\|\hat{y} - \bar{y}\|_1 > \|y^{k^*} - \bar{y}\|_1 + \varepsilon\beta$. 这与 (3.1) 式矛盾. 综上, 当 $\varepsilon > 0$ 时, $\hat{x} \in P(f, C, \varepsilon)$.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 利用 $\varepsilon > 0$ 的证明思路, 结合 (i) 中 $\varepsilon = 0$ 的情况, 可得结论. 从而 (ii) 成立.

注 3.1 (i) 定理中的 $0 < \beta < d_{\|\cdot\|_1}(0, C)$ 必不可少. 若 $\beta = d_{\|\cdot\|_1}(0, C)$, 则 $A_1(f, \varepsilon\beta) \subseteq E(f, C, \varepsilon)$ 不一定成立. 见例 3.1.

(ii) 定理中的两种反包含关系不一定成立. 事实上, 对任意的 $0 < \beta < d_{\|\cdot\|_1}(0, C)$, $E(f, C, \varepsilon) \subseteq \text{cl}A_1(f, \varepsilon\beta)$, $P(f, C, \varepsilon) \subseteq \text{cl}A_1(f, \varepsilon\beta)$ 都不一定成立. 见例 3.1.

(iii) 文献 [9] 利用 $\|\cdot\|_\alpha$ ($\alpha \in [1, \infty)$) 给出了精确的有效解和真有效解的非线性标量化结果. 但对近似解来说, 定理中的结果对其它范数不一定成立. 如 $\|\cdot\|_\infty$ 范数和 $\|\cdot\|_2$ 范数. 见例 3.2.

例 3.1 令 $X = R_+^2, C = \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1\}, f : X \rightarrow R^2, f(x) = x$, 则 $Y = f(X) = R_+^2$ 的理想点之集为 R_+^2 且 $d_{\|\cdot\|_1}(0, C) = 1$. 令 $\varepsilon = 1$, 则

$$\begin{aligned}E(f, C, 1) &= \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 < 1\}, \\ P(f, C, 1) &= \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.\end{aligned}$$

$E(f, C, 1)$ 的图象如图 1 所示.

若 $\beta = d_{\|\cdot\|_1}(0, C) = 1$, 则

$$A_1(f, \beta) = A_1(f, 1) = \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

显然, $A_1(f, \varepsilon\beta) \not\subseteq E(f, C, \varepsilon)$,

$$\forall \beta \in (0, 1), A_1(f, \beta) = \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq \beta\}.$$

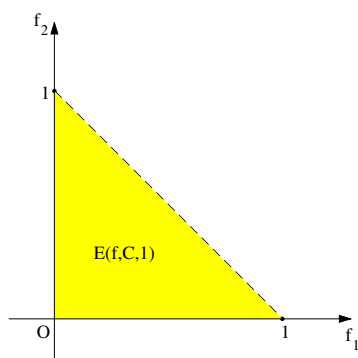


图 1

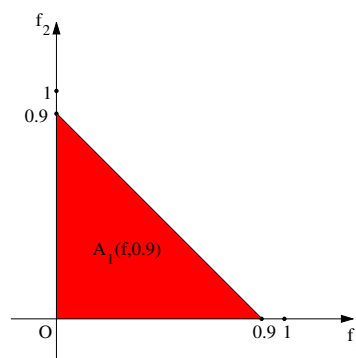


图 2

特别取 $\beta = 0.9$ 时, $A_1(f, 0.9)$ 的图象如图 2 所示. 显然, $E(f, C, 1) \not\subseteq \text{cl} A_1(f, \beta), P(f, C, 1) \not\subseteq \text{cl} A_1(f, \beta), \forall 0 < \beta < 1$. 这说明定理 3.1 中的两种反包含关系不一定成立.

例 3.2 令

$$X = \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq -1\},$$

$$C = \{(x_1, x_2)^T : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 1\}, \quad f : X \rightarrow R^2, \quad f(x) = x,$$

则 $d_{\|\cdot\|_\infty}(0, C) = \frac{1}{2}, d_{\|\cdot\|_2}(0, C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 令 $\varepsilon = 1$, 容易验证

$$(0, 0) \notin E(f, C, 1), \quad (0, 0) \notin P(f, C, 1).$$

取 $\bar{y} = (-1, -1), \beta = \frac{1}{3}$, 则 $(0, 0) \in A_\infty(f, \frac{1}{3})$. 取 $\bar{y} = (-1, -1), \beta = \frac{1}{2}$, 则 $(0, 0) \in A_2(f, \frac{1}{2})$. 这说明定理 3.1 的结果对 $\|\cdot\|_\infty$ 范数和 $\|\cdot\|_2$ 范数不一定成立.

令

$$\Lambda^{++} = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)^T : \sum_{i=1}^p \mu_i = 1 \text{ 且 } \mu_i > 0, i = 1, \dots, p\},$$

$\forall \mu \in \Lambda^{++}, \alpha \in [1, \infty), y = (y_1, \dots, y_p)^T \in R_+^p, y$ 的 (μ, α) 范数定义为 $\|y\|_\alpha^\mu = \|\mu \odot y\|_\alpha, y$ 的 (μ, ∞) 范数定义为 $\|y\|_\infty^\mu = \|\mu \odot y\|_\infty$, 其中 $\mu \odot y = (\mu_1 y_1, \dots, \mu_p y_p)^T$. 记

$$A_1^\mu(f, \varepsilon) = \{\hat{x} \in X : \|f(\hat{x}) - \bar{y}\|_1^\mu \leq \inf\{\|f(x) - \bar{y}\|_1^\mu : x \in X\} + \varepsilon\},$$

$$A_\infty^\mu(f, \varepsilon) = \{\hat{x} \in X : \|f(\hat{x}) - \bar{y}\|_\infty^\mu \leq \inf\{\|f(x) - \bar{y}\|_\infty^\mu : x \in X\} + \varepsilon\}.$$

推论 3.1 在定理 3.1 的条件下, 对任意的 $\mu \in \Lambda^{++}$, 有

(i) $A_1^\mu(f, \varepsilon\beta) \subset E(f, C, \varepsilon)$;

(ii) 若 $Y + C(\varepsilon)$ 为闭集, 则 $A_1^\mu(f, \varepsilon\beta) \subset P(f, C, \varepsilon)$.

证 与定理 3.1 的证明类似.

注 3.2 当 $\varepsilon = 0$ 且 $C(0) \cup \{0\} = R_+^p$ 时, 推论 3.1 中的条件和结果退化到文献 [9] 中的定理 3.4.8 中的特殊情形.

由例 3.2 知, 若定理 3.1 中的范数改为 $\|\cdot\|_\infty$ 范数, 结果不一定成立. 对 $\|\cdot\|_\infty$ 范数有如下的标量化结果.

定理 3.2 设 $\varepsilon > 0$, $C \subset \text{int}R_+^p$ 为 co-radiant 点集. 若

$$0 < \epsilon < \varepsilon \cdot \inf_{i=1, \dots, p} \{c_i\}, \forall c = (c_1, \dots, c_p)^T \in C,$$

则

(i) $A_\infty(f, \epsilon) \subset E(f, C, \varepsilon)$;

(ii) 若 $Y + C(\varepsilon)$ 为闭集, 则 $A_\infty(f, \epsilon) \subset P(f, C, \varepsilon)$.

证 设 $\hat{x} \in A_\infty(f, \epsilon)$, 令 $f(\hat{x}) = \hat{y}$, 则

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty \leq \|y - \bar{y}\|_\infty + \epsilon, \forall y \in Y. \quad (3.3)$$

(i) 若 $\hat{x} \notin E(f, C, \varepsilon)$, 则存在 $y^0 \neq \hat{y}$, $y^0 \in (\hat{y} - C(\varepsilon)) \cap Y$, 从而存在 $c^0 \in C$, 使得 $\hat{y} = y^0 + \varepsilon c^0$. 因此

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty = \|y^0 + \varepsilon c^0 - \bar{y}\|_\infty \geq \|y^0 - \bar{y}\|_\infty + \varepsilon \cdot \inf_{i=1, \dots, p} \{c_i^0\} > \|y^0 - \bar{y}\|_\infty + \epsilon.$$

这与 (3.3) 式矛盾. 因此 $\hat{x} \in E(f, C, \varepsilon)$.

(ii) 若 $\hat{x} \notin P(f, C, \varepsilon)$, 则存在非零向量 $-c \in \text{clcone}(Y + C(\varepsilon) - \hat{y}) \cap (-C(\varepsilon))$. 从而存在 $\{\beta_k\} \subset R_+ \setminus \{0\}$, $\{y^k\} \subset Y$, $\{c^k\} \subset C(\varepsilon)$, 使得 $\beta_k(y^k + c^k - \hat{y}) \rightarrow -c$, 其中 $c \in C(\varepsilon)$.

若 $\{\beta_k\}$ 有界, 假设 $\beta_k \rightarrow \beta_0$. 由定理 3.1 (ii) 的证明知 $\beta_0 \neq 0$. 因此, $\beta_0 > 0$. 则 $y^k + c^k - \hat{y} \rightarrow -\frac{c}{\beta_0}$. 由 $Y + C(\varepsilon)$ 为闭集, 有 $y^k + c^k \rightarrow \hat{y} - \frac{c}{\beta_0} \in Y + C(\varepsilon)$. 从而存在 $y^1 \in Y$, $d^1 \in C$, 使得 $\hat{y} = y^1 + \frac{c}{\beta_0} + \varepsilon d^1$, 则 $\|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty = \|y^1 + \frac{c}{\beta_0} + \varepsilon d^1 - \bar{y}\|_\infty$. 由 $c \in C(\varepsilon)$, $C \subset \text{int}R_+^p$ 可得 c 的每个分量都大于 0. 因此

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty = \|y^1 + \frac{c}{\beta_0} + \varepsilon d^1 - \bar{y}\|_\infty > \|y^1 - \bar{y} + \varepsilon d^1\|_\infty > \|y^1 - \bar{y}\|_\infty + \epsilon.$$

这与 (3.3) 式矛盾.

若 $\{\beta_k\}$ 无界, 类似定理 3.1 (ii) 的证明, 存在 k^* 使得 $\|y^{k^*} + \varepsilon d^{k^*} - \bar{y}\|_\infty \leq \|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty$. 因此

$$\|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty \geq \|y^{k^*} + \varepsilon d^{k^*} - \bar{y}\|_\infty \geq \|y^{k^*} - \bar{y}\|_\infty + \varepsilon \cdot \inf_{i=1, \dots, p} \{d_i^{k^*}\} > \|y^{k^*} - \bar{y}\|_\infty + \epsilon.$$

这与 (3.3) 式矛盾. 综上, $\hat{x} \in P(f, C, \varepsilon)$.

注 3.3 若 $Y + C(0)$ 为闭集, 类似可证 $A_\infty(f, 0) \subset P(f, C, 0)$.

定理 3.3 设 $\varepsilon \geq 0$. 若 $Y + R_+^p$ 为闭集, 则 $A_\infty(f, \varepsilon) \cap E(f, C, \varepsilon) \neq \emptyset$.

证 由 $Y + R_+^p$ 为闭集, 易证 $A_\infty(f, \varepsilon) \neq \emptyset$. 令 $\{\hat{x}^k\} \subseteq A_\infty(f, \varepsilon)$, $f(\hat{x}^k) = \hat{y}^k$ 满足

$$\sum_{i=1}^p \hat{y}_i^k \rightarrow \delta = \inf \left\{ \sum_{i=1}^p y_i^k : y^k = f(x^k), x^k \in A_\infty(f, \varepsilon) \right\},$$

则 $\{\hat{y}^k\}$ 有界, 不妨假设 $\hat{y}^k \rightarrow \hat{y}$. 由 $Y + R_+^p$ 为闭集有 $\hat{y} \in Y + R_+^p$, 即存在 $x^1 \in X$, $f(x^1) = y^1 \in Y$, $d^1 \in R_+^p$, 使得 $\hat{y} = y^1 + d^1$.

先证 $\hat{y} \in Y$. 若 $\hat{y} \notin Y$, 则 $d^1 \neq 0$. 因此

$$\sum_{i=1}^p y_i^1 < \sum_{i=1}^p \hat{y}_i = \delta,$$

这与 $\delta = \inf\{\sum_{i=1}^p y_i^k : y^k = f(x^k), x^k \in A_\infty(f, \varepsilon)\}$ 矛盾, 从而 $\hat{y} \in Y$. 故存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $f(\hat{x}) = \hat{y}$. 因此 $\hat{x} \in A_\infty(f, \varepsilon)$.

再证 $\hat{x} \in E(f, C, \varepsilon)$. 事实上, 若 $\hat{x} \notin E(f, C, \varepsilon)$, 则存在 $x^2 \in X$, $f(x^2) = y^2 \in Y$, $d^2 \in C$ 使得 $\hat{y} = y^2 + \varepsilon d^2$. 由 $0 \notin \text{cl}C$ 知 $d^2 \neq 0$, 从而 $\sum_{i=1}^p y_i^2 < \sum_{i=1}^p \hat{y}_i = \delta$. 又因为

$$\|y^2 - \bar{y}\|_\infty \leq \|\hat{y} - \bar{y}\|_\infty = \inf\{\|y - \bar{y}\|_\infty : y \in Y\} + \varepsilon,$$

这表明 $x^2 \in A_\infty(f, \varepsilon)$. 因此 $\sum_{i=1}^p y_i^2 < \sum_{i=1}^p \hat{y}_i = \delta$, 这与 δ 的定义矛盾. 综上, $\hat{x} \in A_\infty(f, \varepsilon) \cap E(f, C, \varepsilon)$.

推论 3.2 在定理 3.3 的条件下, 对任意的 $\mu \in \Lambda^{++}$ 有 $A_\infty^\mu(f, \varepsilon) \cap E(f, C, \varepsilon) \neq \emptyset$.

证 与定理 3.3 的证明类似.

注 3.4 当 $\varepsilon = 0$ 且 $C(0) \cup \{0\} = R_+^p$ 时, 推论 3.2 中的条件和结果退化到文献 [9] 中的定理 3.4.9 (i).

参 考 文 献

- [1] Kutateladze S S. Convex ε -programming [J]. Soviet Math. Doklady, 1979, 20(2): 390–393.
- [2] Loridan P. ε -solutions in vector minimization problems [J]. J. Optim. The. Appl., 1984, 43(2): 265–276.
- [3] White D J. Epsilon efficiency [J]. J. Optim. The. Appl., 1986, 49: 319–337.
- [4] Helbig S. One new concept for ε -efficiency [R]. Talk at Optimization Days, 1992.
- [5] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems [J]. SIAM J. Optim., 2006, 17(3): 688–710.
- [6] Gutiérrez C, Jiménez B, Novo V. On approximate efficiency in multiobjective programming [J]. Math. Meth. Oper. Res., 2006, 64(1): 165–185.
- [7] Gao Y, Yang X M, Teo K L. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems [J]. J. Indus. Mgt. Optim., 2011, 7(2): 483–496.
- [8] Gao Y, Hou S H, Yang X M. Existence and optimality conditions for approximate solutions to vector optimization problems [J]. J. Optim. The. Appl., 2012, 152: 97–120.
- [9] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. Theory of multiobjective optimization [M]. Japan: Dpt. Appl. Math. Konan Univ., 1985.
- [10] Kaliszewski I. A theorem on nonconvex functions and its application to vector optimization [J]. European J. Oper. Res., 1995, 80: 439–449.
- [11] Beldiman M, Panaiteanu E, Dogaru L. Approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization [J]. Bull Math. Soc. Math. Roumanie Tome, 2008, 51(2): 109–121.
- [12] Rastegar N, Khorram E. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems [J]. European J. Oper. Res., 2014, 236: 229–237.

- [13] 李小燕, 高英. 多目标优化问题 Proximal 真有效解的最优性条件 [J]. 应用数学和力学, 2015, 36(6): 668–676.
- [14] Zheng X Y. Scalarization of Henig proper efficient points in a normed space [J]. J. Optim. The. Appl., 2000, 105(1): 233–247.
- [15] 杨丰梅, 龚循华. $C^\sharp$ - 单调范数与 Henig 有效点的切比雪夫标量化 [J]. 系统科学与数学, 2002, 22(3): 334–342.
- [16] 岳瑞雪, 高英. 多目标优化问题 $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ - 拟近似解的非线性标量化 [J]. 数学杂志, 2016, 36(3): 615–626.
- [17] Gutiérrez C, Huerga L, Novo V. Scalarization and saddle points of approximate proper solutions in nearly subconvexlike vector optimization problems [J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 389: 1046–1058.
- [18] 高英. 多面体集下多目标优化问题近似解的若干性质 [J]. 运筹学学报, 2013, 17(2): 48–52.
- [19] Flores-Bazán F, Hernández E. A unified vector optimization problem: complete scalarizations and applications [J]. Optim., 2011, 60(12): 1399–1419.
- [20] 郭辉. 向量优化问题 (C, ε) - 弱有效解的一个非线性标量化性质 [J]. 运筹学学报, 2015, 19(2): 105–110.

NONLINEAR SCALARIZATIONS OF APPROXIMATE SOLUTIONS FOR MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING PROBLEMS

LI Xiao-yan, LI Mei-shu, GAO Ying

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, we study the relationships between approximate solutions of scalar problems and approximate solutions of multiobjective programming. By utilizing two kind of norms to establish scalar problems, the nonlinear scalarizations of approximate efficient solutions and approximate properly efficient solutions for multiobjective programming problems are obtained. Moreover, some examples are given to explain the main results.

Keywords: multiobjective programming; approximate solution; norm; nonlinear scalarization

2010 MR Subject Classification: 90C29; 90C30