Vol. 38 (2018)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

两个有界线性算子和的 Drazin 逆

杜 娟, 王 华
(内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

摘 要: 本文研究了两个有界线性算子和的 Drazin 逆的问题. 利用算子的预解式展开的方法, 得到了 $(P+Q)^D$ 的具体表达式, 并将其应用到四分块算子矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的 Drazin 逆上, 推广了文献 [14, 15] 的结果.

关键词: Drazin 逆; 算子矩阵
MR(2010) **主题分类号**: 15A09; 47A05 **中图分类号**: O151.21; O177.2
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)03-0511-09

1 引言与预备知识

广义逆理论是非常重要的研究领域之一, 它在求解奇异微分和差分方程、算子方程、马尔可夫链、迭代法数值分析等方面都有着非常广泛的应用. 特别在求解微分方程组时, 矩阵的广义逆发挥着重要作用, 例如给定一类一阶奇异系统方程

$$AX^{'}(t)+BX(t)=0\ \ (t\geq 0),$$

其中 A 为奇异矩阵. 其通解可表示为

$$X(t)=e^{-{A_1}^D B_1}{A_1}^D A_1 X(0),$$

其中 $A_1=(\lambda A+B)^{-1}A,\ \ B_1=(\lambda A+B)^{-1}B$ [1].

20 世纪以来, 学者们对广义逆理论中的矩阵的 Drazin 逆的研究最为活跃. 1958 年, Drazin [2] 在半群与结合环上引入 Drazin 逆, 并在两个矩阵 P 和 Q 满足 $PQ=QP=0$ 的条件下, 证明出了 $(P+Q)^D=P^D+Q^D$. 对于算子情形, 2009 年, Castro-González [3] 等在 $P^2Q=PQ^2=0$ 条件下讨论了 $P+Q$ 的 Drazin 可逆性, 并给出了 $(P+Q)^D$ 的表达式; 同年, 邓春源 [4] 在 P,Q 均为幂等算子, 且满足三个不同条件 $PQP=0,PQP=PQ,PQP=P$ 时给出了 $(P+Q)^D$ 的表达式; 2011 年, Cvetković [5] 等在 $PQP=0,Q^2P=0$ 的条件下, 给出了 $(P+Q)^D$ 的表达式; 2014 年, 黄俊杰 [6] 等在 $P^2Q+PQ^2=0,P^3Q=PQ^3=0$ 的条件下给出了 $(P+Q)^D$ 的表达式. 对于 P,Q 为矩阵情形，学者魏益民 [7]、Hartwig [8]、卜长江 [9]、刘喜富 [10] 等获得了很多好的结果.

*收稿日期: 2016-07-29 接收日期: 2017-04-05
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11261034; 11601249); 内蒙古自然科学基金资助 (2014MS0113; 2015BS0105).
作者简介: 杜娟 (1992–), 女, 内蒙古呼和浩特, 硕士, 主要研究方向: 算子理论及其应用.
通讯作者: 王华.

对于矩阵而言, 其 Drazin 逆一定存在, 但对于算子并非如此. 那么算子的 Drazin 逆在什么条件下存在, 如果存在, 其 Drazin 逆的表达式又是什么样的形式? 这是需要讨论的问题. 本文讨论了 $P^5Q=0, P^2Q+PQ^2=0, PQPQ=0$ 条件下, 两个有界线性算子和的 Drazin 逆的存在性, 并给出了 $(P+Q)^D$ 的表达式. 最后, 将所得结果应用到四分块算子矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的 Drazin 逆上.

为便于叙述, 文中通篇采用如下的假设及符号. 设 X, Y 是复 Banach 空间, 记 $\mathcal{B}(X,Y)$ 是从 X 到 Y 的所有有界线性算子的集合; $\mathcal{B}(X)$ 是从 X 到 X 的所有有界线性算子的集合; 对于 $A\in\mathcal{B}(X,Y)$, $\rho(A), \sigma(A)$, $r(A)$ 分别表示其预解集, 谱集, 谱半径; $R(\lambda, A)$ 表示算子 A 的预解式 $(\lambda I-A)^{-1}$.

下面给出本文用到的定义和引理.

定义 1.1 设 $A\in\mathcal{B}(X)$, 若存在 $A^D\in\mathcal{B}(X)$, 使得算子方程组

$$AA^D=A^DA, A^DAA^D=A^D, A^{k+1}A^D=A^k$$

对某个非负整数 k 成立, 则称 A 是 Drazin 可逆的. 对于上述方程组, 若有解, 则解必定唯一, 这个唯一的解 A^D 称为 A 的 Drazin 逆, 并称使得方程组成立的最小非负整数 k 为 A 的指标, 记为 $\mathrm{ind}(A)$. 当 $\mathrm{ind}(A)=0$ 时, A 是可逆的, 即 $A^D=A^{-1}$.

引理 1.2 [11] 设 $A\in\mathcal{B}(X,Y), B\in\mathcal{B}(Y,X)$, 如果 BA 为 Drazin 可逆, 那么 AB 也为 Drazin 可逆, 且

$$(AB)^D=A((BA)^D)^2B, \quad \mathrm{ind}(AB)\le\mathrm{ind}(BA)+1.$$

引理 1.3 [12] 设 $A\in\mathcal{B}(X)$, 则 A^D 存在当且仅当 $0\in\rho(A)$ 或 $0\in\sigma(A)$ 为预解式 $R(\lambda, A)$ 的一个极点, 此时有

$$R(\lambda, A)=\sum_{n=1}^{\mathrm{ind}(A)}\lambda^{-n}A^{n-1}A^{\pi}-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(A^D)^{n+1}, \tag{1.1}$$

其中 $0<|\lambda|<(r(A^D))^{-1}$, $A^{\pi}=I-AA^D$, I 是单位算子.

注 由引理 1.3 可知, A 的 Drazin 逆 A^D 就是 $R(\lambda, A)$ 的 Laurent 展开式中 $-\lambda^0$ 的系数, 即

$$A^D=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\lambda^{-1}R(\lambda, A)d\lambda,$$

其中 $\gamma=\{\lambda:|\lambda|=\varepsilon\}$ 且 ε 须足够小以使 $\{\lambda:|\lambda|\le\varepsilon\}\bigcap\sigma(A)=\{0\}$.

引理 1.4 [13] 设算子矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$, $A\in\mathcal{B}(X)$, $D\in\mathcal{B}(Y)$, $C\in\mathcal{B}(X,Y)$. 若 $\mathrm{ind}(A)=r, \mathrm{ind}(D)=s$, 那么 M 是 Drazin 可逆的, 且

$$M^D=\begin{bmatrix} A^D & 0 \\ X & D^D \end{bmatrix},$$

其中 $X=\sum\limits_{i=0}^{r-1}(D^D)^{i+2}CA^iA^\pi+\sum\limits_{i=0}^{s-1}D^\pi D^iC(A^D)^{i+2}-D^DCA^D$.

2 主要结果

引理 2.1 设 $P,Q\in\mathcal{B}(X,Y)$ 均是 Drazin 可逆的, 且 $\mathrm{ind}(P)=t$, $\mathrm{ind}(Q)=s$. 若 $P^5Q=0,P^2Q+PQ^2=0,PQPQ=0$, 则

$$\Delta(\lambda)^{-1}=R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3), \tag{2.1}$$

其中 $0<|\lambda|<\min((r(P^D))^{-1},(r(Q^D))^{-1})$, $\Delta(\lambda)=\lambda I-Q-R(\lambda,P)PQ$.

证 由 $P^5Q=0$, 知 $P^DQ=0$, 进而 $P^\pi PQ=PQ$. 再由 $P^2Q+PQ^2=0$, 知

$$P^kQ=-P^{k-1}Q^2=(-1)^{k+1}PQ^k,\quad k\geq 2. \tag{2.2}$$

从而当 $0<|\lambda|<(r(P^D))^{-1}$ 时, 由 (1.1) 式, 知

$$\begin{aligned} R(\lambda,P)PQ &= \lambda^{-1}PQ+\lambda^{-2}P^2Q+\lambda^{-3}P^3Q+\lambda^{-4}P^4Q\\ &= \lambda^{-1}PQ-\lambda^{-2}PQ^2+\lambda^{-3}P^3Q-\lambda^{-4}P^3Q^2\\ &= (\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)(\lambda I-Q). \end{aligned} \tag{2.3}$$

注意到 $PQ^3=P^3Q,PQPQ=0$, 可知 $PQ^3PQ=P^3QPQ=0$. 由此

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \lambda I-Q-R(\lambda,P)PQ\\ &= (I-\lambda^{-2}PQ-\lambda^{-4}PQ^3)(\lambda I-Q)\\ &= [\lambda^{-2}(\lambda^2-PQ)-(\lambda^{-4}PQ^3-\lambda^{-6}PQ^3PQ)](\lambda I-Q)\\ &= \lambda^{-6}(\lambda^4-PQ^3)(\lambda^2-PQ)(\lambda I-Q). \end{aligned}$$

由 $(PQ)^2=0$ 以及 $(PQ^3)^2=0$, 知 PQ,PQ^3 是 Drazin 可逆的, 且 $(PQ)^D=0,(PQ^3)^D=0$, 则

$$R(\lambda^2,PQ)=\lambda^{-2}+\lambda^{-4}PQ,\quad R(\lambda^4,PQ^3)=\lambda^{-4}+\lambda^{-8}PQ^3.$$

于是, 当 $0<|\lambda|<\min((r(P^D))^{-1},(r(Q^D))^{-1})$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda)^{-1} &= \lambda^6R(\lambda,Q)R(\lambda^2,PQ)R(\lambda^4,PQ^3)\\ &= R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3). \end{aligned}$$

结论得证.

引理 2.2 设 $P,Q\in\mathcal{B}(X,Y)$ 均是 Drazin 可逆的, 且 $\mathrm{ind}(P)=t$, $\mathrm{ind}(Q)=s$. 若 $P^5Q=0,P^2Q+PQ^2=0,PQPQ=0$, 那么算子矩阵 $M=\begin{bmatrix}P & PQ\\ I & Q\end{bmatrix}$ 的预解式可表示为

$$R(\lambda,M)=\begin{bmatrix}(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)R(\lambda,P) & \lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3\\ R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)R(\lambda,P) & R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)\end{bmatrix},$$

其中 $0<|\lambda|<\min((r(P^D))^{-1},(r(Q^D))^{-1})$.

证 令 $\rho(\Delta)=\{\lambda\in\mathcal{C}:\Delta(\lambda)\text{可逆}\}$. 显然, $\rho(M)\bigcap\rho(P)=\rho(P)\bigcap\rho(\Delta)$. 则当 $\lambda\in\rho(M)\cap\rho(P)$ 时,

$$R(\lambda,M)=\begin{bmatrix}R(\lambda,P)+R(\lambda,P)PQ\Delta(\lambda)^{-1}R(\lambda,P) & R(\lambda,P)PQ\Delta(\lambda)^{-1}\\ \Delta(\lambda)^{-1}R(\lambda,P) & \Delta(\lambda)^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

由 (2.3), (2.1), (2.2) 式, 以及 $PQPQ=0$, 有

$$\begin{aligned}&R(\lambda,P)PQ\Delta(\lambda)^{-1}\\ =\ &(\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)(\lambda I-Q)R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)\\ =\ &\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3.\end{aligned}$$

于是, 便有

$$\begin{aligned}R(\lambda,P)+R(\lambda,P)PQ\Delta(\lambda)^{-1}R(\lambda,P)&=(I+R(\lambda,P)PQ\Delta(\lambda)^{-1})R(\lambda,P)\\ &=(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)R(\lambda,P).\end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.3 设 $P,Q\in\mathcal{B}(X,Y)$ 均是 Drazin 可逆的, 且 $\operatorname{ind}(P)=t,\operatorname{ind}(Q)=s$. 若 $P^5Q=0,P^2Q+PQ^2=0,PQPQ=0$, 则下列结论成立.

(i) $R(\lambda,Q)R(\lambda,P)$ 的 Laurent 展开式中 $-\lambda^0$ 的系数为

$$\sum_{n=0}^{s-1}Q^nQ^\pi(P^D)^{n+2}-Q^DP^D+\sum_{n=0}^{t-1}(Q^D)^{n+2}P^nP^\pi.$$

(ii) $\lambda^{-2}R(\lambda,Q)PQR(\lambda,P)$ 的 Laurent 展开式中 $-\lambda^0$ 的系数为

$$\sum_{n=0}^{s-1}Q^nQ^\pi PQ(P^D)^{n+4}-\sum_{n=1}^{3}(Q^D)^nPQ(P^D)^{4-n}+\sum_{n=0}^{t-1}(Q^D)^{n+4}PQP^nP^\pi.$$

(iii) $\lambda^{-4}R(\lambda,Q)PQ^3R(\lambda,P)$ 的 Laurent 展开式中 $-\lambda^0$ 的系数为

$$\sum_{n=0}^{s-1}Q^nQ^\pi PQ^3(P^D)^{n+6}-\sum_{n=1}^{5}(Q^D)^nPQ^3(P^D)^{6-n}+\sum_{n=0}^{t-1}(Q^D)^{n+6}PQ^3P^nP^\pi.$$

(iv) $R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)R(\lambda,P)$ 的 Laurent 展开式中 $-\lambda^0$ 的系数为 $U-V+W$, 其中

$$U=Q^\pi\sum_{n=0}^{s-1}Q^n(I+PQ(P^D)^2+PQ^3(P^D)^4)(P^D)^{n+2},$$

$$V=Q^DP^D+\sum_{n=1}^{3}(Q^D)^nPQ(P^D)^{4-n}+\sum_{n=1}^{5}(Q^D)^nPQ^3(P^D)^{6-n},$$

$$W=\sum_{n=0}^{t-1}(Q^D)^{n+2}(I+(Q^D)^2PQ+(Q^D)^4PQ^3)P^nP^\pi.$$

证 根据 $R(\lambda,P)$ 和 $R(\lambda,Q)$ 的 Laurent 展开, 即可得到 (i), (ii), (iii) 中的结论. 又注意到

$$\begin{aligned}&R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)R(\lambda,P)\\ =\ &R(\lambda,Q)R(\lambda,P)+\lambda^{-2}R(\lambda,Q)PQR(\lambda,P)+\lambda^{-4}R(\lambda,Q)PQ^3R(\lambda,P),\end{aligned}$$

这样便由 (i), (ii), (iii) 可得结论 (iv).

定理 2.4 设 $P,Q\in\mathcal{B}(X,Y)$ 均是 Drazin 可逆的, 且 $\mathrm{ind}(P)=t$, $\mathrm{ind}(Q)=s$. 若 $P^5Q=0$, $P^2Q+PQ^2=0$, $PQPQ=0$, 则 $P+Q$ 是 Drazin 可逆的, 且

$$\begin{aligned}(P+Q)^D\ =\ &P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5+Q(U-V)+((Q^D)^2PQ+(Q^D)^4PQ^3)P^D\\ &+(Q^DPQ+(Q^D)^3PQ^3)(P^D)^2+(Q^D)^2PQ^3(P^D)^3+Q^DPQ^3(P^D)^4\\ &+(W-V)P+Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3,\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中 U,V,W 见引理 2.3.

证 令 $A=\begin{bmatrix}I & Q\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}P\\ I\end{bmatrix}$, 显然 $P+Q=AB$, $BA=M$. 根据引理 2.2, 知 0 为预解式 $R(\lambda,BA)$ 的至多为 $t+s+4$ 阶极点, 所以 BA 是 Drazin 可逆的. 再由引理 1.2, AB 也是 Drazin 可逆的.

注意到 $(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)R(\lambda,P)$ 和 $R(\lambda,Q)(I+\lambda^{-2}PQ+\lambda^{-4}PQ^3)$ 的 Laurent 展开式中 $-\lambda^0$ 的系数分别为 $P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5$ 和 $Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3$. 于是, 由引理 1.3 和引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}(BA)^D\ &=\ -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\lambda^{-1}R(\lambda,BA)d\lambda\\ &=\ \begin{bmatrix}P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5 & 0\\ U-V+W & Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由 $P^DQ=0,PQ^D=0$, 以及 $PP^D=P^DP$ 知

$$\begin{aligned}&(P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5)^2=(P^D)^2+PQ(P^D)^4+PQ^3(P^D)^6,\\ &(U-V)(P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5)=(U-V)P^D,\\ &W(P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5)\\ =\ &\sum_{n=0}^{t-1}(Q^D)^{n+2}P^nP^\pi(PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5)\\ =\ &\sum_{n=0}^{3}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}Q(P^D)^3+\sum_{n=0}^{1}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}Q^3(P^D)^5,\\ &(Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3)^2=(Q^D)^2+(Q^D)^4PQ+(Q^D)^6PQ^3,\\ &(Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3)(W-V)=Q^D(W-V),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3)U\\
=\ &((Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3)\sum_{n=0}^{s-1}Q^nQ^\pi(P^D)^{n+2}\\
=\ &\sum_{n=0}^{3}(Q^D)^3PQ^{n+1}(P^D)^{n+2}+\sum_{n=0}^{1}(Q^D)^5PQ^{n+3}(P^D)^{n+2}.
\end{aligned}
$$

令

$$
\begin{aligned}
Z_1&=\sum_{n=0}^{3}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}Q(P^D)^3+\sum_{n=0}^{1}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}Q^3(P^D)^5,\\
Z_2&=\sum_{n=0}^{3}(Q^D)^3PQ^{n+1}(P^D)^{n+2}+\sum_{n=0}^{1}(Q^D)^5PQ^{n+3}(P^D)^{n+2},
\end{aligned}
$$

则

$$
((BA)^D)^2=\begin{bmatrix}(P^D)^2+PQ(P^D)^4+PQ^3(P^D)^6 & 0\\ (U-V)P^D+Z_1+Z_2+Q^D(W-V) & (Q^D)^2+(Q^D)^4PQ+(Q^D)^6PQ^3\end{bmatrix}. \tag{2.6}
$$

因此由引理 1.2,

$$
\begin{aligned}
(P+Q)^D &= \begin{bmatrix}I & Q\end{bmatrix}((BA)^D)^2\begin{bmatrix}P\\ I\end{bmatrix}\\
&= P^D\ PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5+Q(U-V)+Q(Z_1+Z_2)P+(W-V)P\\
&\quad +Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3\\
&= P^D+PQ(P^D)^3+PQ^3(P^D)^5+Q(U-V)+((Q^D)^2PQ+(Q^D)^4PQ^3)P^D\\
&\quad +(Q^DPQ+(Q^D)^3PQ^3)(P^D)^2+(Q^D)^2PQ^3(P^D)^3+Q^DPQ^3(P^D)^4\\
&\quad +(W-V)P+Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3.
\end{aligned}
$$

定理得证.

由定理 2.4, 有如下推论.

推论 2.5 设 $P,Q\in\mathcal{B}(X,Y)$ 为 Drazin 可逆, 且 $\mathrm{ind}(P)=t,\mathrm{ind}(Q)=s$. 若 $PQ=0$, 则

$$
(P+Q)^D=P^D+\sum_{n=0}^{s-2}Q^{n+1}Q^\pi(P^D)^{n+2}-QQ^DP^D+\sum_{n=0}^{t-2}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}P^\pi-Q^DP^DP+Q^D.
$$

推论 2.6 设 $P,Q\in\mathcal{B}(X,Y)$ 为 Drazin 可逆, 且 $\mathrm{ind}(P)=t,\mathrm{ind}(Q)=s$. 若 $P^5Q=0,P^2Q+PQ^2=0,PQP=0$, 则

$$
\begin{aligned}
(P+Q)^D &= P^D+\sum_{n=0}^{s-2}Q^{n+1}Q^\pi(P^D)^{n+2}-QQ^DP^D+\sum_{n=0}^{t-2}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}P^\pi-Q^DP^DP\\
&\quad +Q^D+(Q^D)^3PQ+(Q^D)^5PQ^3.
\end{aligned}
$$

推论 2.7 设 $P, Q \in \mathcal{B}(X,Y)$ 为 Drazin 可逆, 且 $\operatorname{ind}(P) = t, \operatorname{ind}(Q) = s$. 若 $P^5Q = 0, P^2Q + PQ^2 = 0, QPQ = 0$, 则

$$\begin{aligned}(P+Q)^D &= P^D + PQ(P^D)^3 + PQ^3(P^D)^5 + \sum_{n=0}^{s-2} Q^{n+1}Q^{\pi}(P^D)^{n+2} - QQ^DP^D \\ &\quad + \sum_{n=0}^{t-2}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}P^{\pi} - Q^DP^DP + Q^D.\end{aligned}$$

推论 2.8 设 $P, Q \in \mathcal{B}(X,Y)$ 为 Drazin 可逆, 且 $\operatorname{ind}(P) = t$, $\operatorname{ind}(Q) = s$. 若 $P^3Q = 0, P^2Q + PQ^2 = 0, PQPQ = 0$, 则

$$\begin{aligned}(P+Q)^D &= P^D + PQ(P^D)^3 + \sum_{n=0}^{s-2} Q^{n+1}Q^{\pi}(P^D)^{n+2} + \sum_{n=0}^{s-2} Q^{n+1}Q^{\pi}PQ(P^D)^{n+4} - QQ^DP^D \\ &\quad - QQ^DPQ(P^D)^3 + \sum_{n=0}^{t-2}(Q^D)^{n+2}P^{n+1}P^{\pi} + \sum_{n=0}^{t-2}(Q^D)^{n+4}PQP^{n+1}P^{\pi} - Q^DP^DP \\ &\quad - \sum_{n=1}^{3}(Q^D)^nPQ(P^D)^{4-n}P + Q^D + (Q^D)^3PQ.\end{aligned}$$

3 应用

本节将算子矩阵的 Drazin 逆应用到四分块算子矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的 Drazin 逆上, 并给出 M^D 的表达式, 其中 $A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y,X), C \in \mathcal{B}(X,Y), D \in \mathcal{B}(Y)$. 关于四分块 (算子) 矩阵的 Drazin 逆请参见文献 [3, 5, 9, 10, 13, 14, 16]. 下面假设 A, D 均是 Drazin 可逆的, 且 $\operatorname{ind}(A) = r, \operatorname{ind}(D) = s$.

定理 3.1 若 $A^2B = ABCB = CBCB = 0, CAB + DCB = 0$, 则算子矩阵 M 是 Drazin 可逆的, 且

$$M^D = \begin{bmatrix} A^D + ABX(A^D)^2 + (B + ABD^D)(XA^D + D^DX) + M_1 & B(D^D)^2 + AB(D^D)^3 + BCB(D^D)^4 \\ X + CBX(A^D)^2 + CBD^DXA^D + CB(D^D)^2X & D^D + CB(D^D)^3 \end{bmatrix},$$

其中

$$M_1 = BCB(X(A^D)^3 + D^DX(A^D)^2 + (D^D)^2XA^D + (D^D)^3X),$$
$$X = \sum_{i=0}^{r-1}(D^D)^{i+2}CA^iA^{\pi} + \sum_{i=0}^{s-1}D^{\pi}D^iC(A^D)^{i+2} - D^DCA^D.$$

证 令 $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $M = P + Q$. 由于

$$P^3Q = \begin{bmatrix} 0 & A^3B \\ 0 & CA^2B + DCAB + D^2CB \end{bmatrix},$$
$$P^2Q + PQ^2 = \begin{bmatrix} 0 & A^2B \\ 0 & CAB + DCB \end{bmatrix}, \quad PQPQ = \begin{bmatrix} 0 & ABCB \\ 0 & CBCB \end{bmatrix}.$$

由此, 根据已知条件, 有 $P^3Q=0, P^2Q+PQ^2=0, PQPQ=0$. 又由引理 1.4, 有

$$P^D=\begin{bmatrix} A^D & 0 \\ X & D^D \end{bmatrix},$$

其中 $X=\sum\limits_{i=0}^{r-1}(D^D)^{i+2}CA^iA^\pi+\sum\limits_{i=0}^{s-1}D^\pi D^iC(A^D)^{i+2}-D^DCA^D$. 从而, 根据推论 2.8, 得到

$$\begin{aligned} M^D &= P^D+Q(P^D)^2+PQ(P^D)^3+QPQ(P^D)^4 \\ &= \begin{bmatrix} A^D+ABX(A^D)^2+(B+ABD^D)(XA^D+D^DX)+M_1 & B(D^D)^2+AB(D^D)^3+BCB(D^D)^4 \\ X+CBX(A^D)^2+CBD^DXA^D+CB(D^D)^2X & D^D+CB(D^D)^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

定理得证.

推论 3.2 [14] 若 $A^2B=0, BCB=0, CAB=0, DCB=0$, 则

$$M^D=\begin{bmatrix} A^D+ABX(A^D)^2+(B+ABD^D)(XA^D+D^DX) & B(D^D)^2+AB(D^D)^3 \\ X+CBX(A^D)^2+CBD^DXA^D+CB(D^D)^2X & D^D+CB(D^D)^3 \end{bmatrix}.$$

推论 3.3 若 $A^2B=CB=CAB=0$, 则

$$M^D=\begin{bmatrix} A^D+ABX(A^D)^2+(B+ABD^D)(XA^D+D^DX) & B(D^D)^2+AB(D^D)^3 \\ X & D^D \end{bmatrix}.$$

推论 3.4 [15] 若 $AB=CB=0$, 则

$$M^D=\begin{bmatrix} A^D+BXA^D+BD^DX & B(D^D)^2 \\ X & D^D \end{bmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] Campbell S L. The Drazin inverse and systems of second order linear differential equations[J]. Linear Multi-linear Alg., 1983, 14: 195–198.

[2] Drazin M P. Pseudoinverses in associative rings and semigroups[J]. Amer. Math. Month., 1958, 65: 506–514.

[3] Castro-González N, Dopazo E, Martlnez-Serrano M F. On the Drazin inverse of the sum of two operators and its application to operator matrices[J]. Math. Anal. Appl., 2009, 350: 207–215.

[4] Deng C Y. The Drazin inverse of the sum and difference of idempotents[J]. Linear Alg. Appl., 2009, 430: 1282–1291.

[5] Cvetković A S, Milovanović G V. On Drazin inverse of operator matrices[J]. Math. Anal. Appl., 2011, 375: 331–335.

[6] Huang J J, Shi Y F, Chen A. Additive results of the Drazin inverse for bounded linear operators[J]. Compl. Anal. Oper. The., 2014, 8: 349–358.

[7] Hartwig R E, Wang G R, Wei Y M. Some additive results on Drazin inverse[J]. Linear Alg. Appl., 2001, 322: 207–217.

[8] Patricio P, Hartwig R E. Some additive results on Drazin inverses[J]. Appl. Math. Comput., 2009, 530–538.

[9] Bu C J, Feng C C, Bai S Y. Representations for the Drazin inverses of the sum of two matrices and some block matrices[J]. Appl. Math. Comput., 2012, 218: 10226–10237.

[10] Yang H, Liu X F. The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications [J]. Comput. Appl. Math., 2011, 235: 1412–1417.

[11] Wang G R, Wei Y M, Qiao S Z. Generalized inverses: theory and computations[M]. Beijing: Grad. Ser. Math. Sci. Press, 2003.

[12] Caradus S R. Operators theory of the generalized inverse[M]. Queen's Papers Pure Appl. Math., Vol. 38, Queen's Univ., Kingstom: Ontario, 1974.

[13] Meyer C D, Rose N J. The index and the Drazin inverse of block triangular matrices[J]. SIAM J. Appl. Math., 1977, 33: 1–7.

[14] Abdul Shakoor. 矩阵和、分块矩阵与修正矩阵的 Drazin 逆 [D]. 重庆: 重庆大学, 2014.

[15] Cvetković-Ilić D S. A note on the representation for the Drazin inverse of 2×2 block matrices[J]. Linear Alg. Appl., 2008, 429: 242–248.

[16] Huang J J, Shi Y F, Alatancang. The representation of the Drazin inverse of anti-triangular operator matrices based on resolvent expansions[J]. Appl. Math. Comput., 2014, 242: 196–201.

[17] Cui R P, Li X L, Gao J L. The Drazin inverse of a modified matrix $A - CB$[J]. J. Math., 2014, 34(1): 12–16.

DRAZIN INVERSE FOR THE SUM OF TWO BOUNDED LINEAR OPERATORS

DU Juan, WANG Hua

(*College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010021, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the Drazin inverse for the sum of two bounded linear operators. Using the resolvent expansion of the operator, the explicit representation of the Drazin inverse $(P+Q)^D$ is given. Then, we apply our results to the Drazin inverse of the operator matrix $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, which generalize the results in [14, 15].

Keywords: Drazin inverse; operator matrix

2010 MR Subject Classification: 15A09; 47A05