Vol. 38 (2018)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

麦比乌斯梯子 $C(2n,n)$ 的强边色数

姚顺禹, 马登举
(南通大学理学院, 江苏 南通 226019)

摘 要: 本文研究了麦比乌斯梯子 $C(2n,n)$ 的强边染色问题. 利用组合分析的方法, 得到了如下结果: 当 $n=3$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=9$; 当 $n=4$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=10$; 当 $n=5,8$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=8$; 当 $n\geqslant 3$ 且 $n\equiv 2 \pmod 4$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=6$; 当 $n\geqslant 7$ 且 $n\equiv 0,1$ 或 $3 \pmod 4$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=7$.

关键词: 强边染色; 强边色数; 麦比乌斯梯子

MR(2010) **主题分类号**: 05C15 **中图分类号**: O157.5

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)03-0497-05

1 引言

在图 $G=(V(G),E(G))$ 中, $V(G)$, $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集合, 边集合. 图 G 的一个 k - 边正常染色是指一个映射 $f:E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$, 使得对于任何两个相邻的边 e_1, e_2, 均有 $f(e_1)\neq f(e_2)$, 图 G 的 k - 边正常染色又简称为 k - 边染色. 设 G 是一个图, $e_1=u_1v_1$, $e_2=u_2v_2$ 是图 G 中的两条边. 若 e_1 与 e_2 相邻, 则称 e_1 与 e_2 的距离为 0, 若 e_1 与 e_2 不相邻, 从 e_1 的一个端点到 e_2 的一个端点的路称为 e_1 到 e_2 的一条路. e_1 与 e_2 的距离是指在 e_1 到 e_2 的所有路中一条最短路所含的边数. 图 G 的 k - 强边染色是一种 k - 正常染色, 使得任意相邻于同一条边的两条边不得染相同的颜色. 换句话说, 图 G 的强边染色是一种边染色, 使得任意两条距离不大于 1 的边被染不同颜色. 图 G 的强边色数 $\chi_s'(G)$ 是最小的 k, 使得 G 有一个 k - 强边染色.

1985 年, Erdös 和 Nešetřil[1] 给出了关于强边染色的概念, 并提出了如下猜想: 对于最大度为 Δ_G 的图 G, $\chi_s'(G)\leqslant\frac{5}{4}\Delta_G^2$. Molloy 和 Reed[2] 证明了当 Δ_G 足够大时, $\chi_s'(G)\leqslant(2-\epsilon)\Delta_G^2$, 这里 ϵ 约为 $\frac{1}{50}$. 而 Bruhn 和 Joos[3] 进一步证明了 $\chi_s'(G)\leqslant 1.93\Delta_G^2$; Andersen[4] 证明了一个 3 - 正则图 G 的强边色数 $\chi_s'(G)\leqslant 10$.

麦比乌斯梯子 $C(2n,n)$ 是这样一个图, 它的顶点集为 $V=\{v_i\mid i=1,2,\cdots,2n\}$, 边集为 $E=\{v_iv_{i+1}\,,v_iv_{i+n}\mid i=1,2,\cdots 2n\}$, 这里的加法在取模 $2n$ 的情况下进行. 它是一个 3 - 正则图, 可以嵌入在射影平面上, 当 $n=3$ 时, $C(2n,n)$ 就是 $K_{3,3}$.

本文研究了 $C(2n,n)$ 的强边色数, 得到如下结果: 当 $n=3$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=9$; 当 $n=4$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=10$; 当 $n=5,8$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=8$; 当 $n\geqslant 3$ 且 $n\equiv 2 \pmod 4$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=6$; 当 $n\geqslant 7$ 且 $n\equiv 0,1$ 或 $3 \pmod 4$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=7$.

*收稿日期: 2016-12-24 接收日期: 2017-02-17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171114).
作者简介: 姚顺禹 (1992–), 男, 江苏淮安, 硕士, 主要研究方向: 拓扑图论.

2 主要结论

在本节的开始, 先给出 $C(2n,n)$ 的强边色数的一个下界.

当 $n=2$ 时, $C(2n,n)$ 即为 K_4, 因为 K_4 中任意两条边之间的距离都小于 2, 且 K_4 含有 6 条边, 所以 $\chi_s'(C(4,2))=6$. 接下来, 考虑 $n\geqslant 3$ 的情形.

引理 2.1 当 $n\geqslant 3$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))\geqslant 6$.

证 当 $n\geqslant 3$ 时, $C(2n,n)$ 有一个导出子图同构于如图 1 所示的图 H. 不难发现图 H 中任何两条边之间的距离都不大于 1. 因图 H 含有 6 条边, 故 $\chi_s'(H)\geqslant 6$, 从而 $\chi_s'(C(2n,n))\geqslant 6$.

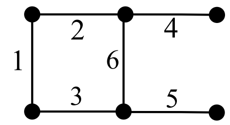

图 1: 图 H

引理 2.2 当 $n\geqslant 3$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=6$ 当且仅当 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

证 充分性 设 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$, 欲证 $\chi_s'(C(2n,n))=6$.

由引理 2.1 知 $\chi_s'(C(2n,n))\geqslant 6$, 故只需证 $\chi_s'(C(2n,n))\leqslant 6$. 此时, 只需给出 $C(2n,n)$ 的一种只含有 6 种颜色的强边染色. 现定义 $C(2n,n)$ 的一个边染色 $f: E(C(2n,n))\to\{1,2,3,4,5,6\}$, 如下: $f(v_iv_{n+i})=1\ (i=1,3,5\cdots,n-1)$; $f(v_iv_{i+1})=2\ (i=1,5,9,\cdots,2n-3)$; $f(v_1v_{2n})=f(v_iv_{i+1})=3\ (i=4,8,12,\cdots,2n-4)$; $f(v_iv_{i+1})=4\ (i=3,7,11,\cdots,2n-1)$; $f(v_iv_{i+1})=5\ (i=2,6,10,\cdots,2n-2)$; $f(v_iv_{n+i})=6\ (i=2,4,8,\cdots,n)$. 不难验证 f 符合强边染色的定义, 所以当 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))\leqslant 6$.

必要性 设 $\chi_s'(C(2n,n))=6$, 欲证 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

只需证明当 $n\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))\neq 6$.

当 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 假设 $\chi_s'(C(2n,n))=6$. 此时, 存在 $C(2n,n)$ 的一个强边染色 $f: E(G)\to\{1,2,3,4,5,6\}$. 首先边 v_1v_2, v_1v_{n+1}, v_1v_{2n}, v_2v_{2+n}, $v_{n+1}v_{n+2}$, v_nv_{n+1} 中的任一条边都需要染不同的颜色, 因为在这些边中任意两条边之间的距离都小于 2. 不妨设 $f(v_1v_{n+1})=1, f(v_1v_2)=2, f(v_1v_{2n})=3, f(v_{n+1}v_{n+2})=4, f(v_nv_{n+1})=5, f(v_2v_{n+2})=6$. 因为 v_2v_3 与边 v_1v_2, v_1v_{n+1}, v_1v_{2n}, v_2v_{2+n}, $v_{n+1}v_{n+2}$ 之间的距离都小于 2, 而与 v_nv_{n+1} 的距离等于 2, 所以 $f(v_2v_3)=5$. 同样的, $f(v_1v_{2n})=f(v_{n+2}v_{n+3})=3$, $f(v_1v_{n+1})=f(v_3v_{n+3})=1$, $f(v_{n+1}v_{n+2})=f(v_3v_4)=4$, $f(v_{n+3}v_{n+4})=f(v_1v_2)=2$, $f(v_4v_{n+4})=f(v_2v_{n+2})=6$. 对剩下的边染色, 每一条边只有一种颜色可染. 染色规律如下

$$f(v_iv_{n+i})=1\ (i=1,3,5\cdots,n-1);$$
$$f(v_iv_{i+1})=2\ (i=1,5,9,\cdots,n-3,n+3,n+7,\cdots,2n-1);$$
$$f(v_1v_{2n})=f(v_iv_{i+1})=3\ (i=4,8,12,\cdots,n-4,n+2,n+6,\cdots,2n-2);$$
$$f(v_iv_{i+1})=4\ (i=3,7,11,\cdots,n-1,n+1,n+5,\cdots,2n-3);$$
$$f(v_iv_{i+1})=5\ (i=2,6,10,\cdots,n-2,n,n+4,\cdots,2n-4); f(v_iv_{n+i})=6\ (i=2,4,\cdots,n).$$

此时会发现, 因为 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$, 所以 $f(v_{n-1}v_n)=4$, 而 $f(v_{n+1}v_{n+2})=4$, 但两边之间的

距离为 1, 这与强边染色的定义相矛盾, 故当 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, $\chi_s^{'}(C(2n,n))\neq 6$. 同理, 当 $n\equiv 1$ 或 $3\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, $\chi_s^{'}(C(2n,n))\neq 6$.

定理 2.3 当 $n\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时,

$$\chi_s^{'}(C(2n,n))=\begin{cases}9, & n=3,\\ 10, & n=4,\\ 8, & n=5,8,\\ 7, & n\equiv 0,1 \text{ 或 } 3\ (\mathrm{mod}\ 4).\end{cases}$$

证 当 $n=3$ 时, 在 $C(6,3)$ 中, 任两条边之间距离都小于 2. 所以一种颜色只能染一条边, 又 $C(6,3)$ 有 9 条边, 所以 $\chi_s^{'}(C(6,3))=9$.

当 $n=4$ 时, 在 $C(8,4)$ 中, 圈 $D=v_1v_2v_3\cdots v_8v_1$ 中任何两条边的距离都小于 2. 因圈 D 有 8 条边, 故对圈 D 强边染色至少需要 8 种颜色. 又因 D 中任何一边与 $C(8,4)$ 中除 D 以外的边的距离都小于 2, 故染剩下的边所用的颜色和圈 D 所用的颜色不同. 在剩下的 4 条边中, 存在两条边之间的距离小于等于 1, 故剩下的 4 条边至少需要两种颜色. 综上所述, $C(8,4)$ 进行强边染色至少需要 10 种颜色, 即 $\chi_s^{'}(C(8,4))\geqslant 10$. 现定义 $C(8,4)$ 的一个边染色 $f:E(C(8,4))\to\{1,2,\cdots,10\}$, 如下: $f(v_1v_2)=1$, $f(v_2v_3)=2$, $f(v_3v_4)=3$, $f(v_4v_5)=4$, $f(v_5v_6)=5$, $f(v_6v_7)=6$, $f(v_7v_8)=7$, $f(v_8v_1)=8$, $f(v_1v_5)=f(v_3v_7)=9$, $f(v_2v_6)=f(v_4v_8)=10$. 不难验证 f 是一个强边染色, 即 $\chi_s^{'}(C(8,4))\leqslant 10$, 所以 $\chi_s^{'}(C(8,4))=10$.

当 $n=5$ 时, 由引理 2.1 与 2.2 知 $\chi_s^{'}(C(10,5))\geqslant 7$. 现假设 $\chi_s^{'}(C(10,5))=7$. 则存在一个强边染色 $f:E(C(10,5))\to\{1,2,3,4,5,6,7\}$. 为讨论方便, 称圈 $A=v_1v_2v_3\cdots v_{10}v_1$ 上的边为第一类边, 其余的边为第二类边. 因为圈 A 上任意三条边中, 存在两条边使得它们之间的距离小于等于 1, 故当一种颜色所染的边都是第一类边时, 这种颜色至多染两条边. 因为第二类边的任意三条边中, 存在两条边使得它们之间的距离小于等于 1, 故当一种颜色所染的边都是第二类边时, 这种颜色至多染两条边. 当一种颜色所染的边既有第一类边又有第二类边时, 不妨设所用的颜色为 1, 且 v_1v_2 被颜色 1 所染, 即 $f(v_1v_2)=1$, 此时第二类边中, 只有 v_4v_9 可染与 v_1v_2 相同的颜色, 那么颜色 1 至多可染两条边.

综上所述, 任一种颜色在 $C(10,5)$ 中所染的边数不能大于等于 3. 因为 $C(10,5)$ 共有 15 条边, 且 $\chi_s^{'}(C(10,5))=7$, 所以至少存在一种颜色所染的边数要大于等于 3. 故产生矛盾. 故 $\chi_s^{'}(C(10,5))\geqslant 8$, 现定义 $C(10,5)$ 的一个边染色 $g:E(C(10,5))\to\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 如下 $g(v_1v_6)=g(v_4v_9)=1$, $g(v_1v_2)=g(v_8v_9)=2$, $g(v_1v_{10})=g(v_7v_8)=3, g(v_6v_7)=g(v_3v_4)=4$, $g(v_5v_6)=g(v_3v_8)=5$, $g(v_2v_7)=g(v_5v_{10})=6$, $g(v_4v_5)=7$, $g(v_2v_3)=g(v_9v_{10})=8$. 不难验证边染色 g 是一个强边染色, 即 $\chi_s^{'}(C(10,5))\leqslant 8$. 故 $\chi_s^{'}(C(10,5))=8$.

当 $n=8$ 时, 由引理 2.1 与 2.2 知 $\chi_s^{'}(C(16,8))\geqslant 7$. 现假设 $\chi_s^{'}(C(16,8))=7$. 则存在一个强边染色 $f:E(C(16,8))\to\{1,2,3,4,5,6,7\}$. 为讨论方便, 称圈 $C=v_1v_2v_3\cdots v_{16}v_1$ 上的边为第一类边, 其余的边为第二类边. 因为圈 C 上任意四条边中, 存在两条边使得它们之间的距离小于等于 1, 故当一种颜色所染的边都是第一类边时, 这种颜色至多染三条边. 因为第二类边的任意五条边中, 存在两条边使得它们之间的距离小于等于 1, 故当一种颜色所染的边都是第二类边时, 这种颜色至多染四条边. 当一种颜色所染的边既有第一类边又有第二类边时. 不妨设所用的颜色为 1, 且 v_1v_2 被颜色 1 所染. 即 $f(v_1v_2)=1$. 此时第二类边中, $f(v_4v_{12})$, $f(v_5v_{13})$, $f(v_6v_{14})$, $f(v_7v_{15})$ 可以等于 1, 当 $f(v_4v_{12})=1$ 时, 剩下边 $f(v_6v_7)$,

$f(v_7v_8)$, $f(v_6v_{14})$, $f(v_7v_{15})$, $f(v_{14}v_{15})$ 可以等于 1, 但这五条边中, 任意两边之间的距离都小于 2, 故只有一条边可染与 v_1v_2 相同的颜色, 故颜色 1 至多染三条边. 故任一种颜色所染的边既有第一类边又有第二类边时, 这种颜色至多能染三条边.

综上所述, 任一颜色在 $C(16,8)$ 中至多染四条边. 此时, 设 x 为只染第二类边的颜色数目. 当 $x=0$ 时, 因为 $\chi_s'(C(16,8))=7$, 所以 7 种颜色至多染 $7\times 3=21$ 条边. 当 $x=1$ 时, 至多染 $1\times 4+(7-1)\times 3=22$ 条边. 当 $x=2$ 时, 至多染 $2\times 4+(7-2)\times 3=23$ 条边. 当 $x\geqslant 3$ 时, 因为只有八条第二类边, 至多染 $8+(7-x)\times 3\leqslant 20$ 条边. 而 $C(16,8)$ 有 24 条边, 所以与假设矛盾. 故 $\chi_s'(C(16,8))\geqslant 8$, 现定义 $C(16,8)$ 的一个边染色 $h: E(C(16,8))\rightarrow\{1,2,\cdots,8\}$, 如下: $h(v_1v_9)=h(v_3v_{11})=h(v_5v_{13})=h(v_7v_{15})=1$, $h(v_1v_2)=h(v_{11}v_{12})=h(v_6v_7)=2$, $h(v_1v_{16})=h(v_{10}v_{11})=h(v_4v_5)=3$, $h(v_3v_4)=h(v_9v_{10})=h(v_{14}v_{15})=4$, $h(v_2v_3)=h(v_8v_9)=h(v_{12}v_{13})=5$, $h(v_2v_{10})=h(v_4v_{12})=h(v_6v_{14})=h(v_8v_{16})=6$, $h(v_5v_6)=h(v_{15}v_{16})=7, h(v_7v_8)=h(v_{13}v_{14})=8$. 不难验证 h 是一个强边染色, 即 $\chi_s'(C(16,8))\leqslant 8$. 故 $\chi_s'(C(16,8))=8$.

当 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 由引理 2.1 与 2.2 知 $\chi_s'(C(2n,n))\geqslant 7$. 下面证 $\chi_s'(C(2n,n))\leqslant 7$. 为此先给出 $C(24,12)$ 的一个有 7 种颜色的强边染色, 如图 2 所示. 而当 $n>12$ 时, 只需将图 2 中的边 v_6v_7 与 $v_{n+6}v_{n+7}$ $(n=4k,k\geqslant 3)$ 删除, 并将点 v_6, v_{n+6}, 分别与图 3 中的点 a, b 粘合, 并分别将点 v_7, v_{n+7} 与 c, d 之间连一条边, 然后令 $f(c\,v_7)=2$, $f(d\,v_{n+7})=4$, 即可得到 $C(2n,n)$ $(n=4k,k>3)$ 的强边色数.

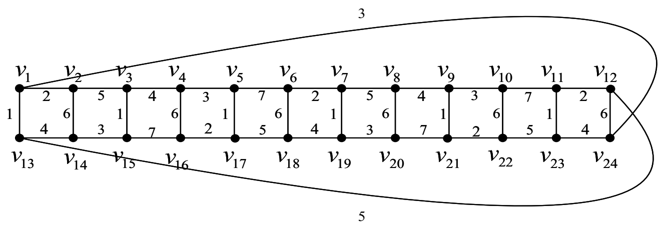

图 2: 当 $n=12$ 时, $\chi_s'(C(2n,n))=7$

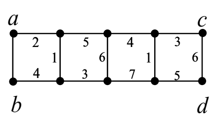

图 3: 嵌入部分

当 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 由引理 2.1 与 2.2 知 $\chi_s'(C(2n,n))\geqslant 7$. 下面证明 $\chi_s'(C(2n,n))\leqslant 7$, 为此先给出 $C(18,9)$ 的一个有 7 种颜色的强边染色. 如图 4 所示. 而当 $n>9$ 时, 只需将图 4 中的边 v_7v_8 与 $v_{n+7}v_{n+8}$ $(n=4k+1,k\geqslant 2)$ 删除, 并将点 v_7, v_{n+7} 分别与图 5 中的点 a, b 粘合, 并分别将点 v_8, v_{n+8} 与 c, d 之间连一条边, 然后令 $f(c\,v_8)=3$, $f(d\,v_{n+8})=5$, 即可得到 $C(2n,n)$ $(n=4k+1,k>2)$ 的强边色数.

当 $n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时, 由引理 2.1 与 2.2 知 $\chi_s'(C(2n,n))\geqslant 7$. 下面证明 $\chi_s'(C(2n,n))\leqslant 7$, 为此先给出 $C(14,7)$ 的一个有 7 种颜色的强边染色. 如图 6 所示. 而当 $n>7$ 时, 只需将图 6 中的边 v_6v_7 与 $v_{n+6}v_{n+7}$ $(n=4k+3,k\geqslant 1)$ 删除, 并将点 v_6, v_{n+6} 分别与图 7 中的点 a, b 粘合, 并分别将点 v_7, v_{n+7} 与 c, d 之间连一条边, 然后令 $f(c\,v_7)=2$, $f(d\,v_{n+7})=4$, 即可得到 $C(2n,n)$ $(n=4k+3,k>1)$ 的强边色数.

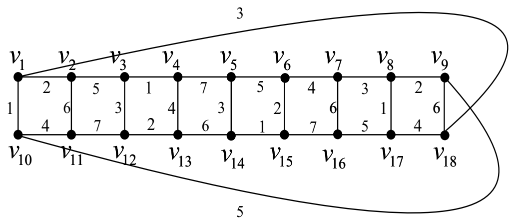

图 4: 当 $n=9$ 时, $\chi_s^{'}(C(2n,n))=7$

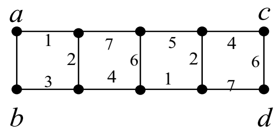

图 5: 嵌入部分

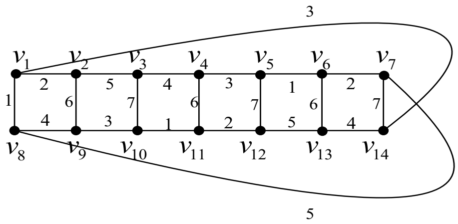

图 6: 当 $n=7$ 时, $\chi_s^{'}(C(2n,n))=7$

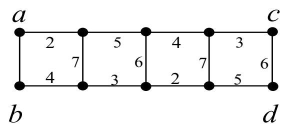

图 7: 嵌入部分

参 考 文 献

[1] Erdös P. Problems and results in combinatorial analysis and graph theory [J]. Ann. Disc. Math., 1988, 38: 81–92.

[2] Molloy M, Reed B. A bound on the strong chromatic index of a graph [J]. J. Comb. The., Ser. B, 1997, 69(2): 103–109.

[3] Bruhn H, Joos F. A stronger bound for the strong chromatic index [J]. Elec. Notes Disc. Math., 2015, 49: 277–284.

[4] Andersen L D. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10 [J]. Disc. Math., 1992, 108(1-3): 231–252.

THE STRONG CHROMATIC INDEX OF MÖBIUS LADDER $C(2n,n)$

YAO Shun-yu, MA Deng-ju

(*School of Sciences, Nantong University, Nantong 226019, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of the strong edge-coloring of Möbius ladder $C(2n,n)$. By using the combinatorial method, we obtain the following results: $\chi_s^{'}(C(2n,n))=9$ if $n=3$; $\chi_s^{'}(C(2n,n))=10$ if $n=4$; $\chi_s^{'}(C(2n,n))=8$ if $n=5,8$; $\chi_s^{'}(C(2n,n))=6$ if $n\geqslant 3$ and $n\equiv 2(\bmod 4)$; $\chi_s^{'}(C(2n,n))=7$ if $n\geqslant 7$ and $n\equiv 0,1$ or 3 (mod 4).

Keywords: strong edge-colouring; strong chromatic index; Möbius ladder

2010 MR Subject Classification: 05C15