Vol. 38 (2018)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

分数阶二次非线性 Sprott 混沌系统的滑模同步控制

毛北行, 程春蕊
(郑州航空工业管理学院理学院, 河南 郑州 450015)

摘 要: 本文利用滑模控制方法研究了分数阶二次非线性 Sprott 混沌系统的同步控制问题. 根据分数阶微积分的相关理论, 得到了系统取得同步的充分性条件, 结果表明: 选取适当的控制律下, 分数阶 Sprott 主从系统取得滑模混沌同步.

关键词: 分数阶; Sprott 系统; 滑模
MR(2010) **主题分类号:** 34D06 **中图分类号:** O231.2
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2018)03-0490-07

1 引言

控制系统的混沌同步问题近年来备受关注 [1], 随着分数阶微积分的发展越来越多的学者开始研究关于分数阶混沌系统的控制与同步问题 [2−3], 文献 [4] 研究了一类不确定分数阶混沌系统的自适应滑模混沌同步问题, 能够使驱动系统与响应系统达到同步; 文献 [5] 基于主动滑模控制方法实现了分数阶混沌系统的同步控制; 文献 [6] 分别采用线性反馈和主动控制法研究了两个不同 Sprott 混沌系统的控制与同步问题; 文献 [7] 研究了一类简单二次非线性 Sprott 混沌系统的分析与控制, 得到了平衡点的稳定性与 Hopf 分岔; 文献 [8] 研究了一类不确定混沌系统的自适应滑模终端控制问题. 本文研究了分数阶二次非线性 Sprott 混沌系统的滑模同步控制及滑模终端控制问题, 得到了分数阶 Sprott 系统取得滑模混沌同步的充分条件.

定义 1 [9] Caputo 分数阶导数定义为

$$ {}_cD^{\alpha}_{t_0,t} = D^{-(n-\alpha)}_{t_0,t}\frac{d^n}{dt^n}x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}x^{(n)}(\tau)d\tau, n-1<\alpha<n\in Z^+. $$

2 分数阶滑模同步控制问题

二次非线性 Sprott 混沌系统 [8]

$$ \begin{cases} \dot{x_1} = -2x_2, \\ \dot{x_2} = x_1 + {x_3}^2, \\ \dot{x_3} = c + x_2 - bx_3, \end{cases} \tag{2.1} $$

*收稿日期: 2016-09-11 接收日期: 2017-01-04
基金项目: 国家自然科学基金资助 (NSFC11501525); 河南省科技厅软科学项目 (142400411192).
作者简介: 毛北行 (1976–), 男, 河南洛阳, 副教授, 硕士, 主要研究方向: 复杂网络与混沌同步.

其中 $x_1, x_2, x_3 \in R^3$ 为系统的状态变量, 当 $b=2, c=1$ 时出现混沌吸引子, 设计对应的分数阶系统为主系统

$$\begin{cases} D_t^\alpha x_1 = -2x_2, \\ D_t^\alpha x_2 = x_1 + {x_3}^2, \\ D_t^\alpha x_3 = c + x_2 - bx_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

当 $\alpha=0.95, b=2.1, c=1.2$ 时系统呈现混沌态, 对应的从系统设计为

$$\begin{cases} D_t^\alpha y_1 = -2y_2 + u_1, \\ D_t^\alpha y_2 = y_1 + {y_3}^2 + u_2, \\ D_t^\alpha y_3 = c + y_2 - by_3 + u_3. \end{cases} \tag{2.3}$$

定义系统误差

$$e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3.$$

上述两式相减得到误差系统为

$$\begin{cases} D_t^\alpha e_1 = -2e_2 + u_1, \\ D_t^\alpha e_2 = e_1 + {y_3}^2 - {x_3}^2 + u_2, \\ D_t^\alpha e_3 = e_2 - be_3 + u_3. \end{cases} \tag{2.4}$$

引理 1 [10] (Barbalat 引理) 若函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 并且广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 存在, 则有 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$.

定理 1 选取滑模面 $s(t) = D_t^{\alpha-1}(e_1+e_2+e_3)$, 控制器

$$u_1(t) = 2e_2 - e_1, u_2(t) = {x_3}^2 - {y_3}^2 - e_1 - e_2, u_3(t) = e_1 + be_3 - \eta\mathrm{sgn}(s(t)), \eta > 0,$$

则分数阶系统 (2.2), (2.3) 是滑模混沌同步的.

证 当状态轨迹位于滑模面上时, $s(t)=0, \dot{s}(t)=0$.

由 $s(t) = D_t^{\alpha-1}(e_1+e_2+e_3) = 0 \Rightarrow D_t^{1-\alpha}D_t^{\alpha-1}(e_1+e_2+e_3) = 0 \Rightarrow (e_1+e_2+e_3)=0$. 由 $D_t^\alpha e_1 = -2e_2 + u_1, u_1(t) = 2e_2 - e_1$, 得到 $D_t^\alpha e_1 = -e_1$, 从而根据分数阶微积分理论得 $e_1(t) \to 0$. 同理, 由 $D_t^\alpha e_2 = e_1 + {y_3}^2 - {x_3}^2 + u_2, u_2(t) = {x_3}^2 - {y_3}^2 - e_1 - e_2 \Rightarrow D_t^\alpha e_2 = -e_2$, 所以得 $e_2(t) \to 0$. 又 $D_t^\alpha e_3 = e_2 - be_3 + u_3, u_3(t) = e_1 + be_3 - \eta\mathrm{sgn}(s(t))$, 由滑模面上 $s(t)=0$, 所以 $\eta\mathrm{sgn}(s(t))=0$, 又由于 $e_1+e_2+e_3=0 \Rightarrow D_t^\alpha e_3 = -e_3 \Rightarrow e_3(t) \to 0$.

当状态轨迹不位于滑模面上时, 选取 Lyapunov 函数 $V(t) = \dfrac{1}{2}s^2(t) \Rightarrow \dot{V}(t) = s(t)\dot{s}(t)$,

$$\begin{aligned} s(t) &= D_t^{\alpha-1}(e_1+e_2+e_3) \Rightarrow \dot{s}(t) = D_t^\alpha(e_1+e_2+e_3), \\ \dot{V}(t) &= s(t)\dot{s}(t) = s(t)[D_t^\alpha e_1 + D_t^\alpha e_2 + D_t^\alpha e_3] \\ &= s(t)[-e_1 - e_2 + e_1 + e_2 - \eta\mathrm{sgn}(s(t))] = -\eta|s(t)| < 0. \end{aligned}$$

由于 $\dot{V}(t) \le -\eta|s(t)|$, 积分可以得到

$$\int_0^t |s(\tau)|d\tau \le \frac{\int_0^t \dot{V}(\tau)d\tau}{-\eta} \le \frac{V(0)-V(\infty)}{-\eta} \le V(0) < \infty,$$

所以 $s(t)$ 是可积的且有界, 根据引理 1 (Barbalat 引理) 可知 $s(t)\to 0 \Rightarrow e_i(t)\to 0$.

由以上分析可知, 误差系统将收敛于零.

3 分数阶滑模终端控制问题

以系统 (2.2) 为驱动系统, 如下系统为响应系统

$$\begin{cases} D_t^\alpha y_1 = -2y_2 + \triangle f_1(y) + d_1(t) + u_1(t), \\ D_t^\alpha y_2 = y_1 + {y_3}^2 + \triangle f_2(y) + d_2(t) + u_2(t), \\ D_t^\alpha y_3 = c + y_2 - by_3 + \triangle f_3(y) + d_3(t) + u_3(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

假设 1 设不确定项 $\triangle f_i(y)$ 和外部扰动 $d_i(t)$ 有界, 即存在 $m_i, n_i > 0$ 使得

$$|\triangle f_i(y)| < m_i, |d_i(t)| < n_i.$$

假设 2 $m_i, n_i (i = 1, 2, 3)$ 未知.

定义系统误差 $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 - x_2, e_3 = y_3 - x_3$, 很容易得到误差方程

$$\begin{cases} D_t^\alpha e_1 = -2e_2 + \triangle f_1(y) + d_1(t) + u_1(t), \\ D_t^\alpha e_2 = e_1 + {y_3}^2 - {x_3}^2 + \triangle f_2(y) + d_2(t) + u_2(t), \\ D_t^\alpha e_3 = e_2 - be_3 + \triangle f_3(y) + d_3(t) + u_3(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

引理 2 [11] 假设存在连续正定函数 $V(t)$ 满足微分不等式

$$\dot{V}(t) \le -pV^\eta(t), \forall t \ge t_0, V(t_0) \ge 0,$$

式中 $p > 0, 0 < \eta < 1$ 是两个正常数, 则对于任意给定的 t_0, $V(t)$ 满足如下不等式

$$V^{1-\eta}(t) \le V^{1-\eta}(t_0) - p(1-\eta)(t-t_0), t_0 < t < T,$$

并且 $V(t) \equiv 0, t \ge 0$, 其中 $T = t_0 + \dfrac{V^{1-\eta}(t_0)}{p(1-\eta)}$.

引理 3 [12] 设有实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, 0 < q < 2$, 则有下列不等式成立

$$|a_1|^q + |a_2|^q + \cdots + |a_n|^q \ge ({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2)^{q/2}.$$

针对误差系统 (3.2) 设计非奇异终端滑模面

$$s_i(t) = D_t^{\alpha-1} e_i(t) + \lambda_i \int_0^t |D_t^{\alpha-1} e_i(\tau)|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_i(\tau)) d\tau, \lambda_i > 0, 0 < \alpha < 1. \tag{3.3}$$

定理 2 误差系统 (3.2) 在非奇异滑模面 (3.3) 上, 系统的轨迹在有限时间 t_s 内到达平衡点, 其中

$$t_s \le \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} (D_t^{\alpha-1} e_i(0))^2\right)^{(1-r)/2}}{(1-r)\mu}, \mu = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}. \tag{3.4}$$

证 误差系统满足滑模面方程 $s_i(t)=0, \dot{s}_i(t)=0$, 于是有

$$D_t^{\alpha} e_i(t) = -\lambda_i |D_t^{\alpha-1} e_i(t)|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_i(t)).$$

选取 Lyapunov 函数 $V(t) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}(D_t^{\alpha-1} e_i(t))^2$, 则

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{3} D_t^{\alpha-1} e_i \cdot D_t^{\alpha} e_i = -\sum_{i=1}^{3} \lambda_i |D_t^{\alpha-1} e_i(t)|^{r+1} \leq -\mu - \sum_{i=1}^{3} |D_t^{\alpha-1} e_i(t)|^{r+1},$$

由引理 3 得

$$\dot{V} \leq -2^{\frac{1+r}{2}} \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(D_t^{\alpha-1} e_i(t))^2 \right)^{\frac{1+r}{2}} = -2^{\frac{1+r}{2}} \mu V^{\frac{1+r}{2}},$$

又由引理 2 易得误差轨迹会在有限时间 t_s 内达到平衡点且

$$t_s \leq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{3}(D_t^{\alpha-1} e_i(0))^2 \right)^{(1-r)/2}}{(1-r)\mu}, \mu = \min\left\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right\}.$$

定理 3 在控制器 (3.5) 和自适应律 (3.6) 的作用下, 误差系统 (3.2) 的状态轨迹能达到滑模面.

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2e_2 - \lambda_1 |D_t^{\alpha-1} e_1|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_1) - (\hat{m}_1 + \hat{n}_1)\operatorname{sgn}(s_1) - k_1 \operatorname{sgn}(s_1), \\
u_2 &= -e_1 + {x_3}^2 - {y_3}^2 - \lambda_2 |D_t^{\alpha-1} e_2|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_2) - (\hat{m}_2 + \hat{n}_2)\operatorname{sgn}(s_2) - k_2 \operatorname{sgn}(s_2), \\
u_3 &= -e_2 + be_3 - \lambda_3 |D_t^{\alpha-1} e_3|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_3) - (\hat{m}_3 + \hat{n}_3)\operatorname{sgn}(s_3) - k_3 \operatorname{sgn}(s_3),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

控制器选取趋近律控制, $k_i > 0$ 为增益系数, 表示趋近速度, 式中 $\hat{m}_i, \hat{n}_i$ 分别为 m_i, n_i 的估计值, 设计如下自适应律

$$\begin{cases} \dot{\hat{m}}_i = |s_i|, \hat{m}_i(0) = \hat{m}_{i0}, \\ \dot{\hat{n}}_i = |s_i|, \hat{n}_i(0) = \hat{n}_{i0}, \end{cases} i = 1, 2, 3. \tag{3.6}$$

证 选择 Lyapunov 函数 $V(t) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}\left({s_i}^2 + (\hat{m}_i - m_i)^2 + (\hat{n}_i - n_i)^2\right)$, 求导得

$$\begin{aligned}
\dot{V} = &\sum_{i=1}^{3} \left\{ s_i [D_t^{\alpha} e_i(t) + \lambda_i |D_t^{\alpha-1} e_i(t)|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_i(t))] + [(\hat{m}_i - m_i)|s_i| + (\hat{n}_i - n_i)|s_i|] \right\} \\
= &s_1[-2e_2 + \triangle f_1(y) + d_1(t) + u_1(t) + \lambda_1 |D_t^{\alpha-1} e_1|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_1)] \\
&+ s_2[e_1 + {y_3}^2 - {x_3}^2 + \triangle f_2(y) + d_2(t) + u_2(t) + \lambda_2 |D_t^{\alpha-1} e_2|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_2)] \\
&+ s_3[e_2 - be_3 + \triangle f_3(y) + d_3(t) + u_3(t) + \lambda_3 |D_t^{\alpha-1} e_3|^r \operatorname{sgn}(D_t^{\alpha-1} e_3)] \\
&+ \sum_{i=1}^{3}[(\hat{m}_i - m_i + \hat{n}_i - n_i)|s_i|].
\end{aligned}$$

由于 $s_i \cdot \mathrm{sgn}(s_i)=|s_i|$, 再根据假设条件 1, 2, 很容易得到

$$\begin{aligned}\dot V \le & |s_1|(m_1+n_1)-|s_1|[(\hat m_1+\hat n_1)+k_1]+|s_2|(m_2+n_2)-|s_2|[(\hat m_2+\hat n_2)+k_2]\\ &+|s_3|(m_3+n_3)-|s_3|[(\hat m_3+\hat n_3)+k_3]+\sum_{i=1}^{3}[(\hat m_i-m_i)|s_i|+(\hat n_i-n_i)|s_i|]\\ =&\sum_{i=1}^{3}[(m_i+n_i)-(\hat m_i+\hat n_i)-k_i]|s_i|+\sum_{i=1}^{3}[(\hat m_i-m_i)|s_i|+(\hat n_i-n_i)|s_i|]\\ =&\sum_{i=1}^{3}[(m_i-\hat m_i)+(n_i-\hat n_i)-k_i]|s_i|+\sum_{i=1}^{3}[(\hat m_i-m_i)|s_i|+(\hat n_i-n_i)|s_i|]\\ =&-\sum_{i=1}^{3}k_i|s_i|<0,\end{aligned}$$

由

$$\dot V \le -\sum_{i=1}^{3}k_i|s_i| \le -k\sum_{i=1}^{3}|s_i|<0,$$

其中 $k=\min\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$. 不难得到

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{3}|s_i(\tau)|d\tau \le \frac{-1}{k}\int_0^t \dot V(\tau)d\tau \le \frac{V(0)-V(\infty)}{k} \le \frac{V(0)}{k}<\infty,$$

所以 $s_i(t)$ 是可积的且有界, 根据引理 1 (Barbalat 引理) 可知 $s(t)\to 0 \Rightarrow e_i(t)\to 0$.

4 数值仿真

为了说明方法的正确性, 利用四阶龙格 - 库塔法对系统进行仿真研究.

定理 1 中, 系统参数选取 $\alpha=0.95, b=2.1, c=1.2$, 选取滑模面 $s(t)=D_t^{\alpha-1}(e_1+e_2+e_3)$, 控制器

$$u_1(t)=2e_2-e_1, u_2(t)={x_3}^2-{y_3}^2-e_1-e_2, u_3(t)=e_1+be_3-\eta\mathrm{sgn}(s(t)),$$

驱动系统与响应系统的初始值分别设置为

$$(x_1,x_2,x_3)=(7.3,6.4,9.2),(y_1,y_2,y_3)=(8.5,5.7,3.6),\eta=3,$$

其系统的误差曲线如图 1 所示. 图 2, 3 分别对不加和加上控制器两种情况进行仿真, 误差系统 (2.3) 中的不确定项分别为

$$\triangle f_1(y)=\cos(2\pi y_2),\triangle f_2(y)=0.5\cos(2\pi y_3),\triangle f_3(y)=0.3\cos(2\pi y_2),$$

外部扰动取 $d_1(t)=0.2\cos t, d_2(t)=0.6\sin t, d_3(t)=\cos 3t$, 驱动系统与响应系统的初始值分别设置为 $(x_1,x_2,x_3)=(7.3,6.4,9.2),(y_1,y_2,y_3)=(8.5,5.7,3.6)$ 无控制器和有控制器系统状态的两个仿真结果分别如图 2,3 所示, 如果滑模面参数取 $\lambda_1=3,\lambda_2=4,\lambda_3=7,r=0.6$, 控制器中的参数选取为 $\mu=3,k_1=9,k_2=8,k_3=5,(\hat m_1,\hat m_2,\hat m_3)=(0.3,0.5,1),(\hat n_1,\hat n_2,\hat n_3)=(0.8,0.6,0.3)$, 此时的系统误差曲线和仿真结果如图 4 所示, 图 4 看出系统的误差很快趋近于零.

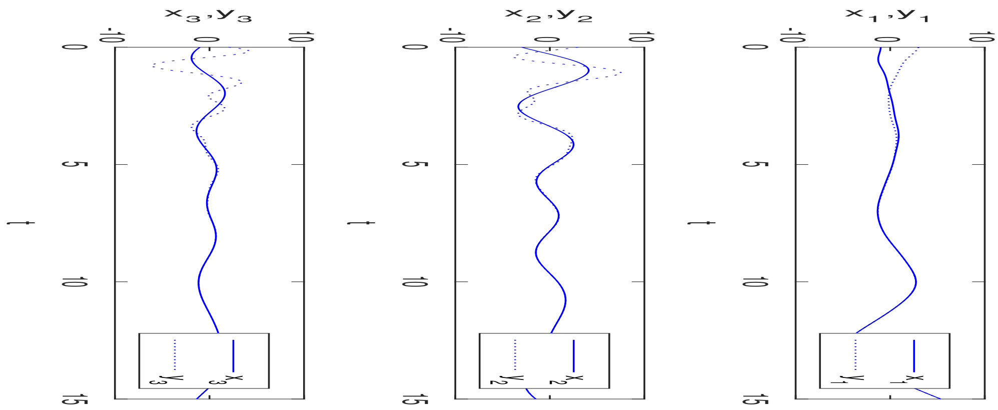

图 1: 定理 1 中的系统误差曲线

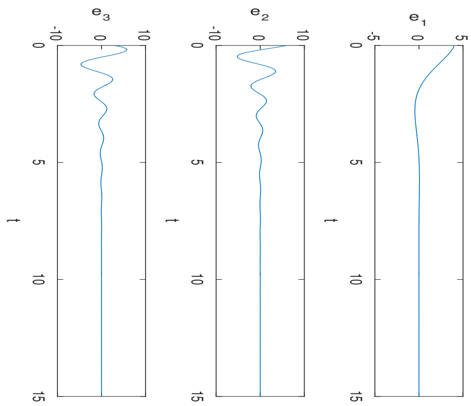

图 2: 无控制的主从系统状态

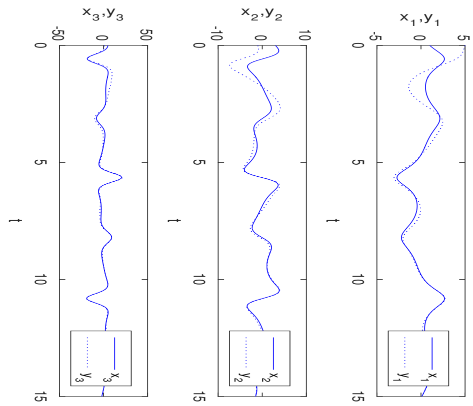

图 3: 有控制的主从系统状态

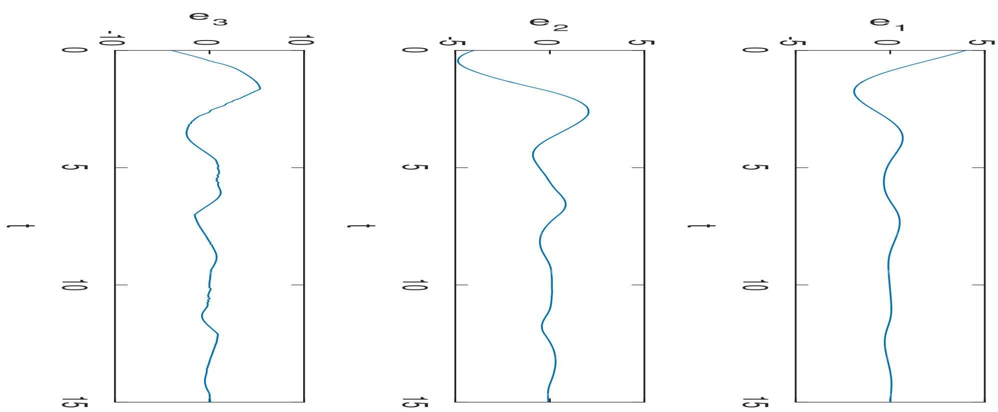

图 4: 定理 3 中系统误差曲线

5 结论

基于稳定性理论研究了分数阶二次非线性 Sprott 系统的滑模混沌同步控制及滑模终端同步控制问题, 并给出了严格的证明, 数值仿真表明了方法的有效性, 文中分数阶滑模面的设计可以用来解决一类分数阶混沌系统的滑模终端同步控制问题.

参 考 文 献

[1] 李德奎, 连玉平. 单时滞类 Lorenz 系统的 Hopf 分岔分析 [J]. 数学杂志, 2015, 35(3): 635–642.

[2] Mohammad P A. Robust finite-time stabilization of fractional-order chaotic susyems based on fractional Lyapunov stability theory[J]. J. Comp. Nonl. Dyn., 2012, 7: 1011–1015.

[3] 孙宁, 张化光, 王智良. 不确定分数阶混沌系统的滑模投影同步 [J]. 浙江大学学报 (工学版), 2010, 44(7): 1288–1291.

[4] 余明哲, 张友安. 一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步 [J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(9): 1276–1280.

[5] 仲启龙, 邵永辉, 郑永爱. 分数阶混沌系统的主动滑模同步 [J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(1): 18–22.

[6] 徐登国. 两个不同 Sprott 混沌系统的控制与同步研究 [J]. 动力学与控制学报, 2007, 5(4): 330–333.

[7] Grigoras V, Grigoras C. A novel chaotic systems for random pulse generation[J]. Adv. Elec. Comp. Engin., 2014, 14(2): 109–112.

[8] 付景超, 孙敬, 李鹏松. 一类简单二次非线性 Sprott 混沌系统的分析与控制 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2015, 53(3): 395–400.

[9] Podlubny. Fractional differential equation[M]. New York: Academic Press, 1999.

[10] 梅生伟, 申铁龙, 刘志康. 现代鲁棒控制理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

[11] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability[J]. Math. Control Sign. Sys., 2005, 17(2): 101–127.

[12] Mohammad P A, Sohrab K. Finite-time synchronization of two different chaotic systems with unknown parameters via sliding mode technique[J]. Appl. Math. Model., 2011, 35(6): 3080–3091.

SLIDING MODE SYNCHRONIZATION OF FRACTIONAL-ORDER QUADRATIC NONLINEARITY SPROTT CHAOTICS SYSTEMS

MAO Bei-Xing, CHENG Chun-Rui

(*College of Science, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China*)

Abstract: In the paper, by using sliding mode approach, the problem of synchronization control of fractional-order quadratic nonlinearity Sprott chaos systems is studied. The sufficient conditions are arrived for the fractional Sprott systems sliding chaos synchronization based on fractional order calculus theory. The conclusion illustrates that fractional-order Sprott systems is sliding mode chaos synchronization under proper controllers.

Keywords: fractional-order; Sprott systems; sliding mode; chaos Synchronization

2010 MR Subject Classification: 34D06