Vol. 38 (2018)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

素超代数的广义超导子和局部广义超导子

袁 鹤
(吉林师范大学数学学院, 吉林 四平 136000)

摘 要: 本文研究了含有非平凡幂等元的素超代数 A 上广义超导子和局部广义超导子的问题. 利用引入幂等元的方法, 证明了 A 上的局部广义超导子均是广义超导子, 并给出了 A 上广义超导子的一个刻画, 推广了 Fošner 和王宇的结果.

关 键 词: 素超代数; 局部广义超导子; 广义超导子
MR(2010) **主题分类号**: 17A70; 16N60; 16W25 **中 图 分 类 号**: O153.3
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2018)03-0481-09

1 引言

设 A 是代数, 若 A 上的线性映射 d 满足对于任意 $a \in A$ 存在导子 $d_a : A \to A$ 使得 $d(a) = d_a(a)$, 则称 d 是 A 上的局部导子. Kadison [1] 与 Larson 和 Sourour [2] 最先开始研究局部导子, 他们得到一些特殊的代数上的局部导子是导子. Brešar [3] 证明了含有非平凡幂等元的素环上的局部导子是导子. Fošner [4] 将 Brešar [3] 的结果推广到了超代数上. 1991 年, Brešar [5] 给出了环上广义导子的定义: 若对于环 R 上的加法映射 g 存在 R 上导子 d 满足 $g(xy) = g(x)y + xd(y)$, $x, y \in R$, 则称 g 是 R 上的广义导子. 王宇 [6] 研究了含有非平凡幂等元的素环上的 Brešar 意义下的局部广义导子. 2015 年, 赵延霞等 [7] 研究了可换环上上三角矩阵李代数的局部自同构和局部导子.

Nakajima 在文献 [8] 中还引入了另一种广义导子. 设 A 是代数, $m \in A$, $g : A \to A$ 是线性映射, 如果

$$g(ab) = g(a)b + ag(b) + amb, \quad a, b \in A, \tag{1.1}$$

则称 (g, m) 是 A 上的广义导子. 特别地, 若 A 含有单位元 1, 则 $m = -g(1)$. Fošner [9] 研究了由幂等元生成的代数上的 Nakajima 意义下的局部广义 (α, β) - 导子.

根据 Nakajima 意义下的广义导子的定义, 我们给出了广义超导子和局部广义超导子的定义. 证明了具有非平凡幂等元的素超代数上的局部广义超导子均为广义超导子, 还给出了广义超导子的一个刻画.

下面给出一些本文将要用到的基础知识. 设 $Z_2 = \{0, 1\}$ 表示 2 元域. 设 Φ 是含有单位元的交换环. 设 $\frac{1}{2} \in \Phi$. 对于 Φ 上结合代数 A, 若存在 A 的 Φ - 子模 A_0 和 A_1 满足 $A = A_0 \oplus A_1$ 且 $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, $i, j \in Z_2$, 则称 A 为 Φ 上超代数, A_0 为 A 的偶部, A_1 为 A 的奇部. 若 $a \in A_k$, $k = 0, 1$, 则称 a 是齐次 k 阶元素, 记作 $|a| = k$. 用 $\mathcal{H}(A)$ 来表示 A 中所有齐次元素

*收稿日期: 2016-07-19 接收日期: 2017-02-20
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11171055); 吉林省科技发展计划项目资助 (20170520068JH); 吉林省教育厅“十三五”科学技术研究项目资助 (吉教科合字 [2016] 第 214 号).
作者简介: 袁鹤 (1983–), 女, 吉林四平, 助理研究员, 主要研究方向: 超代数.

构成的集合. 设 A 是超代数, 若对于 $a, b \in A_0 \cup A_1$, 当 $aAb = 0$ 时有 $a = 0$ 或者 $b = 0$, 则称 A 为素超代数. 事实上, 若 A 是素超代数, $a, b \in A$ 且其中有一个是齐次的, 则当 $aAb = 0$ 时也有 $a = 0$ 或者 $b = 0$. 设 $g : A \to A$ 是 Φ 线性映射, $i \in \{0, 1\}$, 如果对于任意的 $j \in Z_2$ 均有 $g(A_j) \subseteq A_{i+j}$, 则称 g 是 i 阶的.

定义 1.1 设 A 是超代数且 $i \in \{0, 1\}$. 若 $m \in A_i$ 与 i 阶线性映射 $g : A \to A$ 满足

$$g(ab) = g(a)b + (-1)^{i|a|}ag(b) + (-1)^{i|a|}amb, \quad a, b \in A_0 \cup A_1, \tag{1.2}$$

则称 (g, m) 是 A 上 i 阶的广义超导子. 一个 0 阶广义超导子与一个 1 阶广义超导子之和称为 A 上的广义超导子.

若 A 含有单位元 1, 则上述定义中的 $m = -g(1)$. 显然, $g(xy) = g(x_0y_0) + g(x_0y_1) + g(x_1y_0) + g(x_1y_1)$, 其中 $x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1$. 根据环上 Brešar 意义下的广义导子的定义, 本文作者 [10] 给出了超代数上 Brešar 意义下的广义超导子的定义.

定义 1.2 设 A 是超代数, $g : A \to A$ 是 i 阶线性映射, 若存在 A 上 i 阶的超导子 d 满足

$$g(xy) = g(x)y + (-1)^{i|x|}xd(y), \quad x, y \in A_0 \cup A_1,$$

则称 g 是 A 上 i 阶的 Brešar 型广义超导子. 若 $g = g_0 + g_1$, 其中 g_i 是 A 上 i 阶的 Brešar 型广义超导子, 则称 g 是 A 上的 Brešar 型广义超导子, 称 $d = d_0 + d_1$ 是 g 的相伴超导子.

实际上, Nakajima 型广义超导子均为 Brešar 型广义超导子. 定义映射 $d = g + \lambda_a$, 其中 $\lambda_a(x) = mx$, 所以 $d(s) = g(s) + ms$, $s \in \mathcal{H}(A)$. 因此对于任意 $s, t \in \mathcal{H}(A)$,

$$g(st) + mst = g(s)t + (-1)^{i|s|}sg(t) + (-1)^{i|s|}smt + mst = g(s)t + (-1)^{i|s|}sd(t) + mst,$$

所以 $g(st) = g(s)t + (-1)^{i|s|}sd(t)$. 又因为

$$d(s)t + (-1)^{i|s|}sd(t) = g(s)t + mst + (-1)^{i|s|}sg(t) + (-1)^{i|s|}smt = g(st) + mst = d(st),$$

所以 d 是 A 上 i 阶的超导子.

定义 1.3 设 A 是超代数且 $i \in \{0, 1\}$. 若 i 阶线性映射 $g : A \to A$ 满足对于任意 $x \in A$ 存在 i 阶的广义超导子 $(g_x, m) : A \to A$ 使得 $g(x) = g_x(x)$, 则称 g 是 A 上 i 阶的局部广义超导子. 一个 0 阶局部广义超导子与一个 1 阶局部广义超导子之和称为 A 上的局部广义超导子.

设 $A = A_0 \oplus A_1$ 是超代数, 定义集合 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1$, 其中 $\mathcal{E}_0 = \{e \in A_0 | e^2 = e\}$ ($\mathcal{E}_0$ 是 A_0 中所有幂等元构成的集合), $\mathcal{E}_1 = \{e \in A_1 |$ 存在 $e' \in \mathcal{E}_0$ 满足 $(e' + e)^2 = e' + e\}$. 因为 $(e' + e)^2 = e' + e$, $e' \in \mathcal{E}_0$, $e \in \mathcal{E}_1$, 所以 $e^2 = 0$, $e'e + ee' = e$. 用 $R = R_0 \oplus R_1$ 来表示由 $\mathcal{E}$ 生成的 A 的子超代数, 用 $I = I_0 \oplus I_1$ 来表示由 $[\mathcal{E}_0, A]$ 生成的 A 的分次理想, 其中 $[\cdot, \cdot]$ 表示换位子. 由文献 [4, 引理 1.2], $I \subseteq R$. 如无特殊说明, 本文中的 A 是指含有单位元和非平凡幂等元的素超代数. 显然, $I \neq 0$. 对于 A 的元素, 我们将用带下标的同一字母表示该元素的齐次分量, 例如若 $x \in A$, 则其 0 次和 1 次齐次分量分别记作 x_0 和 x_1.

2 局部广义超导子

本节将证明 A 上的局部广义超导子是广义超导子.

引理 2.1　设 g 是 A 上 i 阶的局部广义超导子, 则

$$g(eaf)=g(ea)f+(-1)^{i|e|}eg(af)-(-1)^{i|e|}eg(a)f, \quad e,f\in\mathcal{H}(\mathcal{E}),a\in A.$$

证　因为 g 是 A 上 i 阶的局部广义超导子, $i\in\{0,1\}$, 所以对于任意 $y\in A,x\in\mathcal{H}(A),z\in A$, 存在 i 阶的广义超导子 (g_y,m) 满足

$$\begin{aligned}&(-1)^{i|x|}xg(y)z=(-1)^{i|x|}xg_y(y)z\\=&g_y(xyz)-g_y(x)yz-(-1)^{i|x|}xy_0g_y(z)-(-1)^{i(|x|+1)}xy_1g_y(z)-(-1)^{i|x|}xmyz\\&-(-1)^{i|x|}xy_0mz-(-1)^{i(|x|+1)}xy_1mz.\end{aligned}$$

现在断言, 对于任意 $x,y\in A$, 若 $xy=yz=0$, 则必有 $(x_0+(-1)^ix_1)g(y)z=0$. 实际上, 由 $A_0\bigcap A_1=0$, 可得 $x_0y_0+x_1y_1=x_0y_1+x_1y_0=0$, 从而

$$\begin{aligned}&(x_0+(-1)^ix_1)g(y)z=x_0g(y)z+(-1)^ix_1g(y)z\\=&g_y(x_0yz)-g_y(x_0)yz-x_0y_0g_y(z)-(-1)^ix_0y_1g_y(z)-x_0myz-x_0y_0mz\\&-(-1)^ix_0y_1mz+g_y(x_1yz)-g_y(x_1)yz-(-1)^ix_1y_0g_y(z)\\&-x_1y_1g_y(z)-(-1)^ix_1myz-(-1)^ix_1y_0mz-x_1y_1mz=0.\end{aligned}$$

设 e,f 是 A 中的幂等元, 则对于任意 $a\in A$ 均有

$$\begin{aligned}&(1-e)\cdot eaf=eaf\cdot(1-f)=0,\\&e\cdot(1-e)af=(1-e)af\cdot(1-f)=0,\\&(1-e)\cdot ea(1-f)=ea(1-f)\cdot f=0,\\&e\cdot(1-e)a(1-f)=(1-e)a(1-f)\cdot f=0.\end{aligned}$$

因此, 对于 $e_0\in\mathcal{E}_0,f_0\in\mathcal{E}_0$, 根据上面的断言可得

$$\begin{aligned}&(1-e_0)g(e_0af_0)(1-f_0)=0,\\&e_0g((1-e_0)af_0)(1-f_0)=0,\\&(1-e_0)g(e_0a(1-f_0))f_0=0,\\&e_0g((1-e_0)a(1-f_0))f_0=0.\end{aligned}$$

因此

$$g(e_0af_0)+e_0g(a)f_0=g(e_0a)f_0+e_0g(af_0), \quad e_0,f_0\in\mathcal{E}_0,a\in A. \tag{2.1}$$

对于 $e_0\in\mathcal{E}_0,f=f_0+f_1\in\mathcal{E},f_0\in\mathcal{E}_0,f_1\in\mathcal{E}_1$, 再由上面的断言可得

$$\begin{aligned}&(1-e_0)g(e_0af)(1-f)=0,\\&e_0g((1-e_0)af)(1-f)=0,\\&(1-e_0)g(e_0a(1-f))f=0,\\&e_0g((1-e_0)a(1-f))f=0.\end{aligned}$$

因此

$$g(e_0af)+e_0g(a)f=g(e_0a)f+e_0g(af),\quad e_0\in\mathcal{E}_0,f\in\mathcal{E},a\in A.$$

再由 (2.1) 式有

$$g(e_0af_1)+e_0g(a)f_1=g(e_0a)f_1+e_0g(af_1),\quad e_0\in\mathcal{E}_0,f_1\in\mathcal{E}_1,a\in A.$$

类似地, 对于任意 $f_0\in\mathcal{E}_0,e_1,f_1\in\mathcal{E}_1,a\in A$, 有

$$\begin{aligned}g(e_1af_0)+(-1)^ie_1g(a)f_0=g(e_1a)f_0+(-1)^ie_1g(af_0),\\ g(e_1af_1)+(-1)^ie_1g(a)f_1=g(e_1a)f_1+(-1)^ie_1g(af_1).\end{aligned}$$

因此 g 满足

$$g(eaf)=g(ea)f+(-1)^{i|e|}eg(af)-(-1)^{i|e|}eg(a)f,\quad e,f\in\mathcal{H}(\mathcal{E}),a\in A.$$

引理 2.2 设 g 是 A 上 i 阶的局部广义超导子, 则

$$g(paq)=g(pa)q+(-1)^{i|p|}pg(aq)-(-1)^{i|p|}pg(a)q,\quad p,q\in\mathcal{H}(R),a\in A.$$

证 只需证明对于任意 $e_1,\cdots,e_m,f_1,\cdots,f_n\in\mathcal{H}(\mathcal{E})$ 均有

$$\begin{aligned}g(e_1\cdots e_maf_1\cdots f_n)=&g(e_1\cdots e_ma)f_1\cdots f_n+(-1)^{i|e_1\cdots e_m|}e_1\cdots e_mg(af_1\cdots f_n)\\&-(-1)^{i|e_1\cdots e_m|}e_1\cdots e_mg(a)f_1\cdots f_n.\end{aligned}\tag{2.2}$$

先假设 $m=1$. 现在对 n 用数学归纳法. 显然当 $n=1$ 时, (2.2) 式成立. 假设 (2.2) 式对于 n 成立. 那么

$$\begin{aligned}g(eaf_1\cdots f_{n+1})=&g(eaf_1\cdots f_n)f_{n+1}+(-1)^{i|e|}eg(af_1\cdots f_nf_{n+1})-(-1)^{i|e|}eg(af_1\cdots f_n)f_{n+1}\\=&g(ea)f_1\cdots f_nf_{n+1}+(-1)^{i|e|}eg(af_1\cdots f_n)f_{n+1}-(-1)^{i|e|}eg(a)f_1\cdots f_nf_{n+1}\\&+(-1)^{i|e|}eg(af_1\cdots f_nf_{n+1})-(-1)^{i|e|}eg(af_1\cdots f_n)f_{n+1}\\=&g(ea)f_1\cdots f_nf_{n+1}-(-1)^{i|e|}eg(a)f_1\cdots f_nf_{n+1}+(-1)^{i|e|}eg(af_1\cdots f_nf_{n+1}).\end{aligned}$$

因此当 $m=1$ 时, (2.2) 式对于任意 n 都成立. 下面对 m 用数学归纳法. 已经证明当 $m=1$ 时, (2.2) 式成立. 现在假设 (2.2) 式对于 m 成立. 那么

$$\begin{aligned}&g(e_1\cdots e_{m+1}af_1\cdots f_n)\\=&g(e_1\cdots e_{m+1}a)f_1\cdots f_n+(-1)^{i|e_1|}e_1g(e_2\cdots e_{m+1}af_1\cdots f_n)\\&-(-1)^{i|e_1|}e_1g(e_2\cdots e_{m+1}a)f_1\cdots f_n\\=&g(e_1e_2\cdots e_{m+1}a)f_1\cdots f_n+(-1)^{i|e_1|}e_1g(e_2\cdots e_{m+1}a)f_1\cdots f_n\\&+(-1)^{i|e_1\cdots e_{m+1}|}e_1\cdots e_{m+1}g(af_1\cdots f_n)-(-1)^{i|e_1\cdots e_{m+1}|}e_1\cdots e_{m+1}g(a)f_1\cdots f_n\\&-(-1)^{i|e_1|}e_1g(e_2\cdots e_{m+1}a)f_1\cdots f_n\\=&g(e_1e_2\cdots e_{m+1}a)f_1\cdots f_n+(-1)^{i|e_1\cdots e_{m+1}|}e_1\cdots e_{m+1}g(af_1\cdots f_n)\\&-(-1)^{i|e_1\cdots e_{m+1}|}e_1\cdots e_{m+1}g(a)f_1\cdots f_n.\end{aligned}$$

因此 (2.2) 式对于任意 m,n 都成立.

引理 2.3 设 A 是含有单位元和非平凡幂等元的素超代数, 若 g 是 A 上 i 阶的局部广义超导子, 则 $(g,g(1))$ 是 A 上 i 阶的广义超导子.

证 在引理 2.2 中, 取 $a=1$ 有

$$g(pq)=g(p)q+(-1)^{i|p|}pg(q)-(-1)^{i|p|}pg(1)q,\quad p,q\in\mathcal{H}(R).$$

因为 $I\subseteq R$, 所以

$$g(paq)=g((pa)q)=g(pa)q+(-1)^{i|pa|}pag(q)-(-1)^{i|pa|}pag(1)q,\quad p,q\in\mathcal{H}(I),a\in\mathcal{H}(A).$$

又因为

$$g(paq)=g(pa)q+(-1)^{i|p|}pg(aq)-(-1)^{i|p|}pg(a)q,\quad p,q\in\mathcal{H}(I),a\in\mathcal{H}(A),$$

所以上面两式相减有

$$pg(aq)=pg(a)q+(-1)^{i|a|}pag(q)-(-1)^{i|a|}pag(1)q,\quad p,q\in\mathcal{H}(I),a\in\mathcal{H}(A).$$

因为 $p\in\mathcal{H}(I)$, 所以

$$pA(g(aq)-g(a)q-(-1)^{i|a|}ag(q)+(-1)^{i|a|}ag(1)q)=0,\quad p,q\in\mathcal{H}(I),a\in\mathcal{H}(A).$$

因为 A 是素超代数, 所以

$$g(aq)=g(a)q+(-1)^{i|a|}ag(q)-(-1)^{i|a|}ag(1)q,\quad q\in\mathcal{H}(I),a\in\mathcal{H}(A).$$

用两种不同的方式展开 $g(abq)$, 对于任意 $q\in\mathcal{H}(I),a,b\in\mathcal{H}(A)$, 有

$$\begin{aligned}g(abq)&=g(a(bq))=g(a)bq+(-1)^{i|a|}ag(bq)-(-1)^{i|a|}ag(1)bq,\\ g(abq)&=g((ab)q)=g(ab)q+(-1)^{i|ab|}abg(q)-(-1)^{i|ab|}abg(1)q.\end{aligned}$$

两式相减有

$$\begin{aligned}g(ab)q=&g(a)bq+(-1)^{i|a|}ag(bq)-(-1)^{i|a|}ag(1)bq-(-1)^{i|ab|}abg(q)+(-1)^{i|ab|}abg(1)q\\ =&g(a)bq+(-1)^{i|a|}ag(b)q+(-1)^{i|ab|}abg(q)-(-1)^{i|ab|}abg(1)q-(-1)^{i|a|}ag(1)bq\\ &-(-1)^{i|ab|}abg(q)+(-1)^{i|ab|}abg(1)q,\end{aligned}$$

因此

$$g(ab)q=g(a)bq+(-1)^{i|a|}ag(b)q-(-1)^{i|a|}ag(1)bq,\quad q\in\mathcal{H}(I),a,b\in\mathcal{H}(A),$$

整理有

$$(g(ab)-g(a)b-(-1)^{i|a|}ag(b)+(-1)^{i|a|}ag(1)b)q=0,\quad q\in\mathcal{H}(I),a,b\in\mathcal{H}(A).$$

因为 $q\in\mathcal{H}(I)$, 所以

$$(g(ab)-g(a)b-(-1)^{i|a|}ag(b)+(-1)^{i|a|}ag(1)b)Aq=0,\quad q\in\mathcal{H}(I),a,b\in\mathcal{H}(A).$$

因为 A 是素超代数, 所以

$$g(ab)=g(a)b+(-1)^{i|a|}ag(b)-(-1)^{i|a|}ag(1)b,\quad a,b\in\mathcal{H}(A).$$

因此 $(g,g(1))$ 是 A 上 i 阶的广义超导子.

由上面这个引理有

定理 2.4 设 A 是含有单位元和非平凡幂等元的素超代数, A 上的局部广义超导子是广义超导子.

3 广义超导子

定理 3.1 设 A 是具有非平凡幂等元的素超代数, $g:A\to A$ 是 i 阶线性映射, $m\in A_i$, 则 (g,m) 是 i 阶的广义超导子的充分必要条件是对于任意的 $x,y\in A$, 当 $xy=0$ 时,

$$g(x)y+(x_0+(-1)^ix_1)g(y)+(x_0+(-1)^ix_1)my=0.\tag{3.1}$$

显然, A 上 i 阶的广义超导子满足上式. 本节主要是证明充分性. 为了方便, 设

$$G(x,y)=g(x)y+(-1)^{i|x|}xg(y)+(-1)^{i|x|}xmy,\quad x,y\in\mathcal{H}(A).$$

引理 3.2 $G(xr,z)=G(x,rz),\quad x,z\in\mathcal{H}(A),r\in\mathcal{H}(R).$

证 设 e 是 A 中的幂等元, 任取 $x,z\in\mathcal{H}(A)$, 因为

$$(x-xe)\cdot ez=0,\quad xe\cdot(z-ez)=0,$$

所以对于 $e_0\in\mathcal{E}_0$, 由 (3.1) 式可得

$$\begin{gathered}g(x-xe_0)e_0z+(-1)^{i|xe_0|}(x-xe_0)g(e_0z)+(-1)^{i|xe_0|}(x-xe_0)me_0z=0,\\ g(xe_0)(z-e_0z)+(-1)^{i|xe_0|}xe_0g(z-e_0z)+(-1)^{i|xe_0|}xe_0m(z-e_0z)=0.\end{gathered}$$

两式相减有

$$g(x)e_0z+(-1)^{i|x|}xg(e_0z)+(-1)^{i|x|}xme_0z=g(xe_0)z+(-1)^{i|xe_0|}xe_0g(z)+(-1)^{i|xe_0|}xe_0mz,$$

即 $G(x,e_0z)=G(xe_0,z)$. 再由 (3.1) 式, 对于任意 $x,z\in\mathcal{H}(A)$, 有

$$\begin{gathered}g(x-xe)ez+((-1)^{i|xe_0|}(x-xe_0)-(-1)^{i|xe_1|}xe_1)g(ez)+((-1)^{i|xe_0|}(x-xe_0)-(-1)^{i|xe_1|}xe_1)mez=0,\\ g(xe)(z-ez)+((-1)^{i|xe_0|}xe_0+(-1)^{i|xe_1|}xe_1)g(z-ez)+((-1)^{i|xe_0|}xe_0+(-1)^{i|xe_1|}xe_1)m(z-ez)=0,\end{gathered}$$

其中 $e=e_0+e_1$. 两式相减有

$$g(x)e_1z+(-1)^{i|x|}xg(e_1z)+(-1)^{i|x|}xme_1z=g(xe_1)z+(-1)^{i|xe_1|}xe_1g(z)+(-1)^{i|xe_1|}xe_1mz,$$

即 $G(x,e_1z)=G(xe_1,z)$. 因此对于任意 $e\in\mathcal{H}(\mathcal{E})$ 有 $G(x,ez)=G(xe,z)$. 设 $T=\{r\in\mathcal{H}(A)|G(xr,z)=G(x,rz),x,z\in\mathcal{H}(A)\}$. 因为对于任意 $r,r'\in T,x,z\in\mathcal{H}(A)$, 有

$$\begin{aligned}g(xrr')z=&g(xr)r'z+(-1)^{i|xr|}xrg(r'z)+(-1)^{i|xr|}xrmr'z-(-1)^{i|xrr'|}xrr'g(z)-(-1)^{i|xrr'|}xrr'mz\\=&g(x)rr'z+(-1)^{i|x|}xg(rr'z)+(-1)^{i|x|}xmrr'z-(-1)^{i|xr|}xrg(r'z)-(-1)^{i|xr|}xrmr'z\\&+(-1)^{i|xr|}xrg(r'z)+(-1)^{i|xr|}xrmr'z-(-1)^{i|xrr'|}xrr'g(z)-(-1)^{i|xrr'|}xrr'mz,\end{aligned}$$

所以 $rr'\in T$. 因为 $\mathcal{H}(\mathcal{E})\subseteq T$, 所以 $\mathcal{H}(R)\subseteq T$, 即对于任意 $r\in\mathcal{H}(R)$, 有 $G(xr,z)=G(x,rz)$.

引理 3.3 映射 g 满足对于任意 $t\in\mathcal{H}(A^2I),x,y,z,w\in\mathcal{H}(A)$, 有

$$\begin{aligned}&(-1)^{i|wtz|}wtz(g(xy)-g(x)y-(-1)^{i|x|}xg(y)-(-1)^{i|x|}xmy)\\=&(g(wt)-g(w)t-(-1)^{i|w|}wg(t)-(-1)^{i|w|}wmt)zxy.\end{aligned}$$

证 设 $u\in\mathcal{H}(I),x,y,z,w,w',w''\in\mathcal{H}(A)$, 则 $uzx,w''uz,w'w''u\in\mathcal{H}(I)\subseteq\mathcal{H}(R)$. 由引理 3.2, 有

$$\begin{aligned}ww'w''g(uzxy)=&(-1)^{i|w''|}ww'g(w''uzx)y+(-1)^{i|uzx|}ww'w''uzxg(y)\\&-(-1)^{i|w''|}ww'g(w'')uzxy+(-1)^{i|uzx|}ww'w''uzxmy-ww'w''muzxy\\=&(-1)^{i|w''|}w((-1)^{i|w'|}g(w'w''uz)x+(-1)^{i|w''uz|}w'w''uzg(x)\\&-(-1)^{i|w'|}g(w')w''uzx+(-1)^{i|w''uz|}w'w''uzmx-w'mw''uzx)y\\&+(-1)^{i|uzx|}ww'w''uzxg(y)-(-1)^{i|w''|}ww'g(w'')uzxy\\&+(-1)^{i|uzx|}ww'w''uzxmy-ww'w''muzxy\\=&(-1)^{i|w'w''|}((-1)^{i|w|}g(ww'w''u)z+(-1)^{i|w'w''u|}ww'w''ug(z)\\&-(-1)^{i|w|}g(w)w'w''uz+(-1)^{i|w'w''u|}ww'w''umz-wmw'w''uz)xy\\&+(-1)^{i|uz|}ww'w''uzg(x)y-(-1)^{i|w'w''|}wg(w')w''uzxy\\&+(-1)^{i|uz|}ww'w''uzmxy-(-1)^{i|w''|}ww'mw''uzxy+(-1)^{i|uzx|}ww'w''uzxg(y)\\&-(-1)^{i|w''|}ww'g(w'')uzxy+(-1)^{i|uzx|}ww'w''uzxmy-ww'w''muzxy;\\ww'w''g(uzxy)=&(-1)^{i|w''|}ww'g(w''uz)xy+(-1)^{i|uz|}ww'w''uzg(xy)\\&+(-1)^{i|uz|}ww'w''uzmxy-(-1)^{i|w''|}ww'g(w'')uzxy-ww'w''muzxy\\=&(-1)^{i|w''|}w((-1)^{i|w'|}g(w'w''u)z+(-1)^{i|w''u|}w'w''ug(z)\\&+(-1)^{i|w''u|}w'w''umz-(-1)^{i|w'|}g(w')w''uz-w'mw''uz)xy\\&+(-1)^{i|uz|}ww'w''uzg(xy)+(-1)^{i|uz|}ww'w''uzmxy\\&-(-1)^{i|w''|}ww'g(w'')uzxy-ww'w''muzxy.\end{aligned}$$

设 $t=w'w''u$, 显然 $t\in\mathcal{H}(A^2I)$. 因此对于任意 $x,y,z,w\in\mathcal{H}(A)$ 有

$$\begin{aligned}&(-1)^{i|wtz|}wtz(g(xy)-g(x)y-(-1)^{i|x|}xg(y)-(-1)^{i|x|}xmy)\\=&(g(wt)-g(w)t-(-1)^{i|w|}wg(t)-(-1)^{i|w|}wmt)zxy.\end{aligned}$$

引理 3.4 设 g 是 A 上满足 (3.1) 式的 0 阶线性映射, 则 (g,m) 是 A 上 0 阶的广义超导子.

证 显然 $A^2I\neq 0$. 取 $w\in\mathcal{H}(A),t\in\mathcal{H}(A^2I)$ 满足 $wt\neq 0$. 由引理 3.3, 有

$$wtz(g(wt)-g(w)t-wg(t)-wm't)=(g(wt)-g(w)t-wg(t)-wm't)zwt,\quad z\in\mathcal{H}(A).$$

由文献 [11, 引理 3.2], 存在 $\mu\in C_0$ 满足 $\mu wt=g(wt)-g(w)t-wg(t)-wm't$. 由引理 3.3, 有

$$wtz(g(xy)-g(x)y-xg(y)-xm'y-\mu xy)=0,\quad x,y,z\in\mathcal{H}(A).$$

因为 A 是素超代数, 所以

$$g(xy)=g(x)y+xg(y)+xm'y+\mu xy=g(x)y+xg(y)+x(m'+\mu)y,\quad x,y\in\mathcal{H}(A).$$

显然, $m'+\mu\in A_0$. 令 $m=m'+\mu$, 则 (g,m) 是 A 上 0 阶的广义超导子.

引理 3.5 设 g 是 A 上满足 (3.1) 式的 1 阶线性映射, 则 (g,m) 是 A 上 1 阶的广义超导子.

证 取 $w\in\mathcal{H}(A),t\in\mathcal{H}(A^2I)$ 满足 $wt\neq 0$.

当 $C_1=0$ 时, 由引理 3.3 和文献 [11, 定理 3.5 (i)], 有

$$wtz(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)=0,\quad x,y,z\in\mathcal{H}(A).$$

因为 A 是素超代数, 所以

$$g(xy)=g(x)y+(-1)^{|x|}xg(y)+(-1)^{|x|}xmy,\quad x,y\in\mathcal{H}(A),$$

因此 (g,m) 是 A 上 1 阶的广义超导子.

当 $C_1\neq 0$ 时, 由引理 3.3, 对于任意 $x,y\in\mathcal{H}(A),z_0\in A_0$, 有

$$\begin{aligned}&(-1)^{|wt|}wtz_0(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)\\=&(g(wt)-g(w)t-(-1)^{|w|}wg(t)-(-1)^{|w|}wmt)z_0xy.\end{aligned}$$

由文献 [11, 定理 3.5 (ii)], 对于任意 $z_1\in A_1$ 上式也成立, 即

$$\begin{aligned}&(-1)^{|wt|}wtz_1(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)\\=&(g(wt)-g(w)t-(-1)^{|w|}wg(t)-(-1)^{|w|}wmt)z_1xy.\end{aligned}$$

再由引理 3.3, 对于任意 $x,y\in\mathcal{H}(A),z_1\in A_1$, 有

$$\begin{aligned}&-(-1)^{|wt|}wtz_1(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)\\=&(g(wt)-g(w)t-(-1)^{|w|}wg(t)-(-1)^{|w|}wmt)z_1xy.\end{aligned}$$

两式相减有

$$wtz_1(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)=0,\quad x,y\in\mathcal{H}(A),z_1\in A_1.$$

类似地, 对于任意 $z_0\in A_0$, 有

$$wtz_0(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)=0,\quad x,y\in\mathcal{H}(A),z_0\in A_0.$$

两式相加有

$$wtz(g(xy)-g(x)y-(-1)^{|x|}xg(y)-(-1)^{|x|}xmy)=0,\quad x,y\in\mathcal{H}(A),z\in A.$$

因为 A 是素超代数, 所以 $g(xy)=g(x)y+(-1)^{|x|}xg(y)+(-1)^{|x|}xmy$, $x,y\in\mathcal{H}(A)$. 因此 (g,m) 是 A 上 1 阶的广义超导子.

参 考 文 献

[1] Kadison R V. Local derivations [J]. J. Alg., 1990, 130(2): 494–509.

[2] Larson D, Sourour A R. Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ [J]. Proc. Symp. Pure. Math., 1990, 51: 187–194.

[3] Brešar M, Larson D, Sourour A R. Characterizing homomorphisms, derivations, and multipliers in rings with idempotents [J]. Proc. Royal. Soc. Edinburgh, 2007, 137A: 9–21.

[4] Fošner A, Fošner M. On superderivations and local superderivations [J]. Taiwanese J. Math., 2007, 11(5): 1383–1395.

[5] Brešar M. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations [J]. Glasg. Math. J., 1991, 33: 89–93.

[6] Wang Y. Local generalized derivations in prime rings with idempotents [J]. Alg. Coll., 2010, 17(2): 295–300.

[7] 赵延霞, 王丽. 可换环上上三角矩阵李代数的局部自同构和局部导子 [J]. 数学杂志, 2015, 35(5): 1042–1052.

[8] Nakajima A. On categorical properties of generalized derivations [J]. Sci. Math., 1999, 2(3): 345–352.

[9] Fošner A. Local generalized (α, β)-derivations [J]. Sci. World J., 2014, 2014: 1–5.

[10] Yuan H, Wang Y. The product of generalized superderivations on a prime superalgebra [J]. Hacet. J. Math. Stat., 2014, 43(6): 1009–1015.

[11] Fošner M. On the extended centroid of prime associative superalgebras with applications to superderivations [J]. Comm. Alg., 2004, 32(2): 689–705.

GENERALIZED SUPERDERIVATIONS AND LOCAL GENERALIZED SUPERDERIVATIONS IN A PRIME SUPERALGEBRA

YUAN He

(*College of Mathematics, Jilin Normal University, Siping 136000, China*)

Abstract: In this paper, we study generalized superderivations and local generalized superderivations in a prime superalgebra A with a nontrivial idempotent. By using the method of introducing idempotents, we prove that every local generalized superderivation is a generalized superderivation and give a characterization of generalized superderivations in A, which generalize the results of Fošner and Wang.

Keywords: prime superalgebra; local generalized superderivation; generalized superderivation

2010 MR Subject Classification: 17A70; 16N60; 16W25