Vol. 38 ( 2018 )
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# 非线性退化抛物变分不等式问题解的存在性和唯一性

李志广, 康淑瑰
(山西大同大学数学与计算机科学学院, 山西 大同 037009)

**摘 要**: 本文研究了一类基于非线性抛物算子的变分不等式问题. 利用惩罚方法获得了一些关于该变分不等式解的存在性和唯一性方面的结论. 该结论是对变分不等式理论的推广.

**关 键 词**: 变分不等式; 退化抛物算子; 存在性; 唯一性; 惩罚方法
MR(2010) **主题分类号**: 35J50; 35K87 **中 图 分 类 号**: O175.29
**文 献 标 识 码**: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2018)02-0353-14

## 1 引言

期权定价是金融数学的重要研究内容 [1,2], 变分不等式则在美式期权定价理论中起着至关重要的作用, 美式期权定价问题最终都归结为一个抛物变分不等式问题 (见文献 [3–6]). 在美式期权定价和分期付款模型中构成变分不等式的抛物微分算子完全是线性的 (算子的系数是常数), 其解的存在性和唯一性都得到了广泛的研究. 后来, 人们在研究 Levy 模型下的美式期权定价时, 发现构成变分不等式的微分算子不可能是常系数的 (见文献 [7]). 近些年来, 已有文献在拟线性微分算子的基础上开展上述工作. 文献 [8, 9] 利用有限元逼近方法研究了拟线性算子情形下抛物变分不等式解的存在性和唯一性和范数下的误差估计. 文献 [10] 研究了一类混合边界条件下的变分不等式问题, 提出了一种新的离散格式, 得到了解的存在性和唯一性.

到目前有关退化抛物算子情形下的变分不等式问题还未见文献, 本文在推广的 $L^{p(x)}(\Omega)$ 空间和 Sobolev 空间 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 上研究了一类基于退化抛物算子的变分不等式问题. 采用惩罚方法给出了其弱解的存在性和唯一性. 为了克服退化抛物算子带来的困难, 本文提供了一种新的构造方法.

本文在柱体 $\Omega_T$ 考虑如下退化抛物变分不等式的初边值问题

$$\min\{Lu, u-u_0\}=0,\ \ (x,t)\in\Omega_T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)=0,\ \ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

其中 $\Omega$ 是 $\mathrm{R}^N$ 上的有界集, $\Omega_T=\Omega\times[0,T]$, $T>0$, $L$ 是退化抛物算子满足

$$Lu=u_t-u^\sigma\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)-\gamma u^{\sigma-1}|\nabla u|^{p(x)},$$

*收稿日期: 2016-04-30 接收日期: 2017-01-13
基金项目: 山西省自然科学基金 (2008011002-1); 山西省高等教育发展基金 (20101109; 20111020).
作者简介: 李志广 (1979–), 男, 山西大同, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程及其在金融中的应用.

$p(x)$ 为 $\Omega$ 上的可测函数, $\gamma \in (0,1)$, $\sigma \in [1, 1+\gamma)$, 初值条件满足

$$0 \le u_0 \in L^{\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

令 $p^+ = \operatorname*{esssup}_{\Omega} p(x)$, $p^- = \operatorname*{essinf}_{\Omega} p(x)$, 本文始终假设 $2+\gamma \le p^- \le p(x) \le p^+ < \infty$, $\forall x \in \Omega$.

## 2 预备知识

为证明主要结论, 需要用到如下有关推广 $L^{p(x)}(\Omega)$ 空间和 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 空间方面的理论, 见文献 [11, 12]. 设

$$\begin{aligned}
&L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u \,\middle|\, u\text{是}\Omega_T\text{上的可测函数}, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x < \infty \right\}, \\
&|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda \,\middle|\, \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \mathrm{d}x \le 1 \right\}, \\
&W^{1,p(x)}(\Omega) = \{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \,\big|\, \nabla u \in L^{p(x)}(\Omega) \}, \\
&|u|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = |u|_{L^{p(x)}(\Omega)} + |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \ \ u \in W^{1,p(x)}(\Omega),
\end{aligned}$$

$W_0^{1,p(x)}$ 表示 $W^{1.p(x)}$ 的支撑, 显然若 $u \in W^{1.p(x)}$ 并且 $u$ 在边界 $\partial\Omega$ 上取值为零, 则 $u \in W_0^{1,p(x)}$.

**引理 2.1** (1) $L^{p(x)}(\Omega)$ 和 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 是自反 Banach 空间.

(2) 假设 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 是 $\Omega$ 上的可测函数满足 $p_1(x)^{-1} + p_2(x)^{-1} = 1$, $p_1(x) > 1$, 则 $\forall u \in L^{p_1(x)}(\Omega)$, $v \in L^{p_2(x)}(\Omega)$, 有

$$\left| \int_\Omega uv \mathrm{d}x \right| \le 2 |u|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} |v|_{L^{p_2(x)}(\Omega)}.$$

(3) 若 $|u|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} = 1$, 则 $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x = 1$, 若 $|u|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} > 1$, 则

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-} \le \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x \le |u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+};$$

若 $|u|_{L^{p_1(x)}(\Omega)} \le 1$, 则

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^+} \le \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x \le |u|_{L^{p(x)}(\Omega)}^{p^-}.$$

(4) 如果 $p_1(x) \le p_2(x)$, 则 $L^{p_1(x)}(\Omega) \supset L^{p_2(x)}(\Omega)$.

**引理 2.2** 如果 $p(x) \in C(\bar{\Omega})$, 则存在正常数 $C$ 使得

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} \le C \, |\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1.p(x)}(\Omega).$$

引理 2.2 表明 $|\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}$ 和 $|\nabla u|_{W_0^{1.p(x)}}$ 是 Banach 空间 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 上的两个等价范数.

**引理 2.3** 设常数 $\theta>0$, $A(\eta)=(\eta^2+\theta)^{\frac{p(x)-2}{2}}\eta$ , 则

$$(A(\eta)-A(\eta'))\cdot(\eta-\eta')\ge C|\eta-\eta'|^{p(x)},\ \forall\eta,\eta'\in \mathrm{R},$$

其中 $C$ 是仅依赖 $p(x)$ 的正常数.

**引理 2.4** 设 $u_1$ 和 $u_2$ 满足

$$Lu_1\le Lu_2,\ \ u_2\ge c>0,\ \ \forall(x,t)\in\Omega_T.$$

若 $\forall x\in\Omega$ 有 $u_2(x,0)\ge u_1(x,0)$; $\forall(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$ 有 $u_2(x,t)\ge u_1(x,t)$, 则

$$u_2(x,t)\ge u_1(x,t),\ \ \forall(x,t)\in\Omega_T.$$

**引理 2.5** 若 $Lu_1+f(x,t,u_1)\le Lu_2+f(x,t,u_2)$, $\forall(x,t)\in\Omega_T$, 则引理 2.4 中结论依然成立, 其中 $f(x,t,u)$ 关于 $u$ 单调非降.

定义单调极大算子

$$G(\lambda)=\begin{cases}0,\ \lambda>0,\\ 1,\ \lambda=0,\end{cases}$$

且令集合

$$B=\left\{u\in L^\infty(\Omega_T)\cap L^{p(x)}\left(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)\right\}.$$

**定义 2.1** 称 $(u,\xi)\in B\times L^\infty(\Omega_T)$ 为抛物变分不等式 (1)–(3) 的弱解, 若

(a) $u(x,t)\ge u_0(x)$, $\forall(x,t)\in\Omega_T$;

(b) $u(x,0)=u_0(x)$, $\forall x\in\Omega$;

(c) $\xi\in G(\xi)$;

(d) 对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_T)$,

$$\int\int_{\Omega_T}-u\varphi_t+u^\sigma|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi+(\sigma-\gamma)u^{\sigma-1}|\nabla u|^{p(x)}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int\int_{\Omega_T}\xi\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

(e) 存在常数 $\mu>0$ , $\lim\limits_{t\to\infty}\int_\Omega|u^\mu(x,t)-u_0^\mu(x)|\,\mathrm{d}x=0.$

## 3 主要结论

考虑如下惩罚问题

$$Lu_\varepsilon+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)=0,\quad(x,t)\ \in\Omega_T,\tag{4}$$

$$u_\varepsilon(x,0)=u_{0\varepsilon}(x)=u_0(x)+\varepsilon,\quad x\in\Omega,\tag{5}$$

$$u_\varepsilon(x,t)=\varepsilon,\quad(x,t)\ \in\partial\Omega\times(0,T),\tag{6}$$

其中惩罚函数 $\beta_\varepsilon(\cdot)$ 满足 (见图 3.1)

$$\begin{gathered}0<\varepsilon\le1,\beta_\varepsilon(x)\in C^2(\mathrm{R}),\beta_\varepsilon(x)\le0,\beta'{}_\varepsilon(x)\ge0,\\ \beta''{}_\varepsilon(x)\le0,\beta_\varepsilon(x)=\begin{cases}0,\quad x\ge\varepsilon,\\-1,\quad x=0,\end{cases}\lim_{\varepsilon\to0}\beta_\varepsilon(x)=\begin{cases}0,\quad x>0,\\-\infty,\quad x<0.\end{cases}\end{gathered}\tag{7}$$

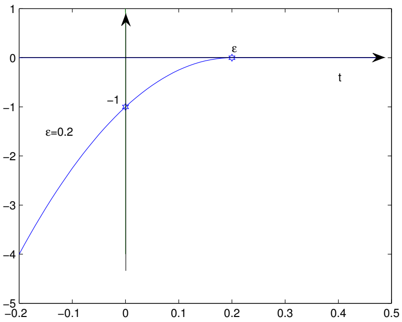


图 3.1: $\beta_{0.2}$

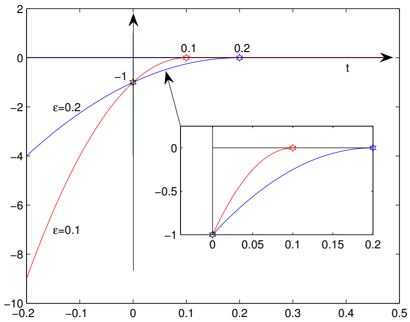


图 3.2: $\beta_{0.1}$ 和 $\beta_{0.2}$

此外由图 3.2, 可得当 $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2$ 时, 对任意的 $t \in [0, \varepsilon_2]$,

$$\beta_{\varepsilon_1}(t) - \beta_{\varepsilon_2}(t) \ge 0. \tag{8}$$

根据惩罚函数 $\beta_\varepsilon(\cdot)$ 的定义

$$Lu_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow u_\varepsilon \ge u_0 + \varepsilon,\ Lu_\varepsilon > 0 \Leftrightarrow u_\varepsilon < u_0 + \varepsilon. \tag{9}$$

因此当 $\varepsilon \to 0$ 时可以用 $\beta_\varepsilon(\cdot)$ 控制不等式. 下面给出非线性抛物问题 (4)–(6) 的弱解定义.

**定义 3.1** 称非负函数 $u_\varepsilon$ 为非线性抛物问题 (4)–(6) 的弱解, 如果

(a) $u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega_T) \cap L^{p(x)}\left(0, T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\right)$;

(b) 对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$,

$$\int\int_{\Omega_T} \left(-u_\varepsilon \varphi_t + u_\varepsilon^\sigma |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2} \nabla u_\varepsilon \nabla \varphi + (\sigma - \gamma) u_\varepsilon^{\sigma-1} |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} \varphi + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)\varphi\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0;$$

(c) 存在常数 $\mu > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \int_\Omega |u^\mu(x,t) - u_0^\mu(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

文献 [12] 利用半离散差分格式证明了非线性抛物方程 (4)–(6) 存在定义 3.1 意义下的弱解. 本节将在非线性抛物方程 (4)–(6) 的基础之上, 考察变分不等式的弱解问题. 在此之前, 先给出几个有用的引理.

**引理 3.1** 设 $\varepsilon$, $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 为正常数满足 $\varepsilon \in (0,1)$, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2 < 1$, 则

$$u_0 \le u_\varepsilon \le |u_0|_\infty + \varepsilon, \tag{10}$$

$$u_{\varepsilon_1} \le u_{\varepsilon_2}, \forall (x,t) \in \Omega_T. \tag{11}$$

**证** 首先证明 $u_\varepsilon \ge u_0$. 考虑公式 (4), 即

$$Lu_\varepsilon = -\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0). \tag{12}$$

令 $t = 0$ 可得

$$Lu_{0\varepsilon} = -\beta_\varepsilon(u_{0\varepsilon} - u_0) = -\beta_\varepsilon(\varepsilon) = 0,\ \ (x,t) \in \Omega_T. \tag{13}$$

易见 $u_{0\varepsilon}$ 和 $u_\varepsilon$ 在抛物边界上相等, 因此联立公式 (12) 和 (13) 并利用引理 2.4, 有

$$u_\varepsilon \geq u_{0\varepsilon} \geq u_0, \ \ \forall (x,t) \in \Omega_T.$$

其次证明 $u_\varepsilon \leq |u_0|_\infty + \varepsilon$. 注意到 $|u_0|_\infty + \varepsilon$ 为常数, 并且

$$u_\varepsilon \leq |u_0|_\infty + \varepsilon, \ \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \ u_\varepsilon(x,0) \leq |u_0|_\infty + \varepsilon, \ \forall x \in \Omega.$$

又因为

$$L\left(|u_0|_\infty + \varepsilon\right) + \beta_\varepsilon(|u_0|_\infty + \varepsilon - u_0) \geq \beta_\varepsilon(\varepsilon) = 0,$$

所以利用引理 2.5 可知 $u_\varepsilon \leq |u_0|_\infty + \varepsilon, \ \ \forall (x,t) \in \Omega_T$.

最后证明公式 (11) 成立. 因为

$$Lu_{\varepsilon_1} + \beta_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_1} - u_0) = 0, \ Lu_{\varepsilon_2} + \beta_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2} - u_0) = 0,$$

进一步利用公式 (8) 可得

$$Lu_{\varepsilon_2} + \beta_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2} - u_0) = \beta_{\varepsilon_1}(u_{\varepsilon_2} - u_0) - \beta_{\varepsilon_2}(u_{\varepsilon_2} - u_0) \geq 0.$$

联立初边值条件, 并利用引理 2.5 可得结论成立.

**引理 3.2** 对任意的 $\alpha \in [0, 1-\gamma)$, 非线性抛物方程 (4)–(6) 的解满足

$$|\partial_t u_\varepsilon^\mu|_{L^2(\Omega_T)} + |\partial_t u_\varepsilon|_{L^2(\Omega_T)} \leq C, \tag{14}$$

$$\left| |\nabla u_\varepsilon|^{p(x)} u_\varepsilon^{-\alpha} \right|_{L^1(\Omega_T)} + |\nabla u_\varepsilon|_{L^{p(x)}(\Omega_T)} \leq C, \tag{15}$$

其中 $C$ 为不依赖 $\varepsilon$ 的非负常数.

**证** 注意 $2(\mu-1) = \gamma - \sigma$, 在公式 (4) 边乘以 $u_\varepsilon^{\gamma-\sigma}\partial_t u_\varepsilon$ 并在 $\Omega_T$ 上的积分, 有

$$\begin{aligned}
&\mu^{-2}\int\int_{\Omega_T} (\partial_t u_\varepsilon^\mu)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\int_{\Omega_T} \partial_t u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon^{\gamma-\sigma}\partial_t u_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
= \ & -\int\int_{\Omega_T} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{(p(x)-2)/2} \nabla u_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon^\gamma \partial_t u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&+\gamma\int\int_{\Omega_T} \left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{p(x)/2} u_\varepsilon^{\gamma-1}\partial_t u_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\int_{\Omega_T} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)u_\varepsilon^{\gamma-\sigma}\partial_t u_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\leq \ & -\int\int_{\Omega_T} u_\varepsilon^\gamma \left(|\nabla u_\varepsilon|^2\right)^{(p(x)-2)/2} \nabla u_\varepsilon \nabla(\partial_t u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\int_{\Omega_T} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)u_\varepsilon^{\gamma-\sigma}\partial_t u_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式, Holder 不等式以及公式 (10), 可得

$$\begin{aligned}
\left|\int\int_{\Omega_T} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)u_\varepsilon^{\gamma-\sigma}\partial_t u_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| &= \left|\int\int_{\Omega_T} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)u_\varepsilon^{\mu-1}\mu^{-1}\partial_t u_\varepsilon^\mu \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_\varepsilon^{\mu-1}\right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2}\mu^{-2}\int\int_{\Omega_T} (\partial_t u_\varepsilon^\mu)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_0^{\mu-1}\right\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2}\mu^{-2}\int\int_{\Omega_T} (\partial_t u_\varepsilon^\mu)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

从而利用引理 2.1 (3) 以及引理 3.1 可得

$$\frac{1}{2}\mu^{-2}\int\int_{\Omega_T}(\partial_t u_\varepsilon^\mu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \frac{1}{p^-}(|u_0|_\infty+1)^\gamma\left(1+|\nabla u_0|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{p^+/p^-}\right)+\frac{1}{2}\left\|u_0^{\mu-1}\right\|_{L^2(\Omega_T)}^2. \quad (16)$$

又因为 $2(\mu-1)=\gamma-\sigma$, 利用引理 3.1 可得

$$\int\int_{\Omega_T}(\partial_t u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int\int_{\Omega_T}(\partial_t u_\varepsilon^\mu)^2 u_\varepsilon^{\frac{1}{\gamma-\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le (|u_0|_\infty+1)^{\frac{1}{\gamma-\sigma}}\int\int_{\Omega_T}(\partial_t u_\varepsilon^\mu)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (17)$$

联立公式 (16) 和公式 (17) 可得公式 (14) 成立.

其次证明公式 (15) 成立. 在等式 (4) 两端乘以 $u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}$ 并积分可得

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{1-\alpha}\mathrm{div}\left\{|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\right\}+\gamma u_\varepsilon^{-\alpha}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}+u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{u_\varepsilon^{1-\alpha}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&-(1-\alpha-\gamma)\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{-\alpha}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\nu$ 表示曲面 $\partial\Omega$ 的外侧法向量. 进一步联立公式 (7) 和公式 (10) 有

$$\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0. \quad (19)$$

又因为 $u_\varepsilon\ge\varepsilon$, 所以 $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\le 0,\forall(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, 这意味着

$$\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left\{u_\varepsilon^{1-\alpha}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0. \quad (20)$$

将公式 (19) 和公式 (20) 代入公式 (18) 可得

$$\int\int_{\Omega_T}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le-(1-\alpha-\gamma)\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{-\alpha}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (21)$$

进一步利用分步积分, 有

$$\int\int_{\Omega_T}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon^{1-\alpha-\sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2-\alpha-\sigma}\int_\Omega u_\varepsilon^{2-\alpha-\sigma}(x,T)-u_\varepsilon^{2-\alpha-\sigma}(x,0)\mathrm{d}x.$$

注意 $1-\alpha-\gamma>0$, $1-\alpha>0$. 将上式代入公式 (21) 即可得到

$$\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}u_\varepsilon^{-\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\frac{1}{(1-\alpha-\gamma)(2-\alpha-\sigma)}\int_\Omega u_\varepsilon^{2-\alpha-\sigma}(x,0)\mathrm{d}x\le C,$$

其中 $C$ 是仅依赖 $\alpha$、$\gamma$ 、$\Omega$ 和 $|u_0|_\infty$ 的常数.

引理 3.1 和引理 3.2 意味着, 对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 存在子列 $\{u_\varepsilon\}$ (仍记为 $\{u_\varepsilon\}$ ) 以及函数 $u\in L^\infty(\Omega_T)$, 使得

$$u_\varepsilon\to u,\ \varepsilon\to 0, \tag{22}$$

$$\nabla u_\varepsilon\xrightarrow{w}\nabla u\in L^{p(x)}(\Omega_T),\ \ \varepsilon\to 0, \tag{23}$$

$$\partial_t u_\varepsilon\xrightarrow{w}\partial_t u\in L^2(\Omega_T),\ \ \varepsilon\to 0, \tag{24}$$

其中 $\xrightarrow{w}$ 表示弱收敛, 此外还有

$$u_0\le u\le|u_0|\,,\ \ u\le u_\varepsilon,\forall(x,t)\in\Omega_T. \tag{25}$$

通过下面的引理 (引理 3.3), 还可以得到

$$|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}\to 0,\ \ \varepsilon\to 0. \tag{26}$$

**引理 3.3** 设 $Q_c^\varepsilon=\{(x,t)\in\Omega_T;u_\varepsilon\ge c,c>0\}$, $Q_c=\{(x,t)\in\Omega_T;u\ge c,c>0\}$, 则

$$|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|_{L^{p(x)}(Q_c^\varepsilon)}\to 0,\ \ \varepsilon\to 0, \tag{27}$$

$$|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|_{L^{p(x)}(Q_c)}\to 0,\ \ \varepsilon\to 0. \tag{28}$$

**证**　在公式 (4) 中选择 $\varphi=u_\varepsilon^{p^--2}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)$ 可得

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon^{p^--\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&-\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\nabla\{u_\varepsilon^{p^--1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\gamma\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--2}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\\
=&(\gamma-p^-+1)\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--2}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&-\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--1}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon\nabla(u_\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{29}$$

利用公式 (24) 以及罚函数 $\beta_\varepsilon\,(\cdot)$ 的定义,

$$\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--1}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=O(\varepsilon^2), \tag{30}$$

$$\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p^--\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=O(\varepsilon^2). \tag{31}$$

注意 $\gamma-p^-+1<0$, 将公式 (30) 和公式 (31) 代入公式 (29), 有

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon^{p^--\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\le& O(\varepsilon^2)-2^{p^--1}\int\int_{\Omega_T}\left|\nabla u_\varepsilon^2\right|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon^2\nabla(u_\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ .
\end{aligned} \tag{32}$$

又因为 $\varepsilon \le u_\varepsilon \le |u_0|_\infty + 1$, 所以利用三角不等式可得

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} u_\varepsilon^{p^- -\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&+2^{p^- -1}\int\int_{\Omega_T}\left[\left|\nabla u_\varepsilon^2\right|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon^2-\left|\nabla u^2\right|^{p(x)-2}\nabla u^2\right]\nabla(u_\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\le{}& O(\varepsilon^2)-2^{p^- -1}\int\int_{\Omega_T}\left|\nabla u^2\right|^{p(x)-2}\nabla u^2\nabla(u_\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{33}$$

利用公式 (10) 和公式 (14), 并利用 Holder 不等式可得

$$\int\int_{\Omega_T}\left|\partial_t u_\varepsilon^{p^- -\sigma}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=(p^- -\sigma)^2(|u_0|_\infty+1)^{p^- -\sigma-1}\int\int_{\Omega_T}|\partial_t u_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty,$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&\left|\int\int_{\Omega_T}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}u_\varepsilon^{p^- -\sigma-1}(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| \\
\le{}& \tfrac{1}{p^- -\sigma}\sqrt{\int\int_{\Omega_T}\left|\partial_t u_\varepsilon^{p^- -\sigma}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\cdot\sqrt{\int\int_{\Omega_T}\left(u_\varepsilon^2-\varepsilon^2-u^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t}=O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{34}$$

此外由公式 (22) 和公式 (23) 有

$$\nabla u_\varepsilon^2 \xrightarrow{w} \nabla u^2 \in L^{p(x)}(\Omega_T), \tag{35}$$

将公式 (34) 和公式 (35) 代入公式 (33), 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int_{\Omega_T}\left[\left|\nabla u_\varepsilon^2\right|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon^2-\left|\nabla u^2\right|^{p(x)-2}\nabla u^2\right]\nabla(u_\varepsilon^2-u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0.$$

进一步利用引理 2.3 可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\int_{\Omega_T}\left|\nabla u_\varepsilon^2-\nabla u^2\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

因此利用公式

$$\begin{aligned}
\nabla u_\varepsilon^2-\nabla u^2 &= 2u_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon-\nabla u)+2\nabla u(u_\varepsilon-u), \\
\nabla u_\varepsilon^2-\nabla u^2 &= 2u(\nabla u_\varepsilon-\nabla u)+2\nabla u_\varepsilon(u_\varepsilon-u),
\end{aligned}$$

从而令 $\varepsilon\to 0$ 可得

$$\begin{aligned}
& 2^{p^-}\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p(x)}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\le\ & 2^{p^+}\int\int_{\Omega_T}\left|\nabla u_\varepsilon^2-\nabla u^2\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+4^{p^+}\int\int_{\Omega_T}|\nabla u|^{p(x)}|u_\varepsilon-u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0, \\
& 2^{p^-}\int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p(x)}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
\le\ & 2^{p^+}\int\int_{\Omega_T}\left|\nabla u_\varepsilon^2-\nabla u^2\right|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+4^{p^+}\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}|u_\varepsilon-u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0.
\end{aligned}$$

注意 $Q_c^\varepsilon \subset \Omega_T$, $Q_c \subset \Omega_T$ , 再令 $\varepsilon \to 0$, 有

$$c^{p^-}\int\int_{Q_c^\varepsilon}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int\int_{\Omega_T}u_\varepsilon^{p(x)}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0,$$
$$c^{p^-}\int\int_{Q_c}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int\int_{\Omega_T}u^{p(x)}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0.$$

因此公式 (27) 和公式 (28) 成立. 进一步利用公式 (27) 和公式 (28), 公式 (26) 亦是成立的.

**引理 3.4** 当 $\varepsilon \to 0$ 时有

$$\left|u_\varepsilon^{\sigma-1}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-u^{\sigma-1}|\nabla u|^{p(x)}\right|_{L^1(\Omega_T)} \to 0, \tag{36}$$

$$\left|u_\varepsilon^{\sigma}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon-u^{\sigma}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right|_{L^1(\Omega_T)} \to 0, \tag{37}$$

$$-\beta_\varepsilon(u_\varepsilon-u_0)\to\xi\in G(u-u_0). \tag{38}$$

**证** 设 $\chi_\eta$ 和 $\chi_\eta^{(\varepsilon)}$ 分别是集合 $\{(x,t)\in\Omega_T; u(x,t)<\eta\}$ 和 $\{(x,t)\in\Omega_T; u_\varepsilon(x,t)<\eta\}$ 的特征函数. 显然 $\chi_\eta \le \chi_\eta^{(\varepsilon)}$. 利用三角不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\le&\int\int_{\Omega_T}\left||\nabla u|^{p(x)}\chi_\eta-|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\chi_\eta^{(\varepsilon)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int\int_{\Omega_T}\left||\nabla u|^{p(x)}(1-\chi_\eta)-|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}(1-\chi_\eta^{(\varepsilon)})\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
\le&\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\chi_\eta^{(\varepsilon)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int\int_{\Omega_T}|\nabla u|^{p(x)}\chi_\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int\int_{\Omega_T}|\nabla u|^{p(x)}(\chi_\eta^{(\varepsilon)}-\chi_\eta)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int\int_{\Omega_T}\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}\right|(1-\chi_\eta^{(\varepsilon)})\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&H_1+H_2+H_3+H_4.
\end{aligned} \tag{39}$$

取 $\alpha=(1-\gamma)/2$, 利用引理 3.2, 可得

$$H_1=\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}\frac{u_\varepsilon^\alpha}{u_\varepsilon^\alpha}\chi_\eta^{(\varepsilon)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\eta^\alpha\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}u_\varepsilon^{-\alpha}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\eta^\alpha\to 0\ \ (\eta\to 0). \tag{40}$$

利用引理 3.3 和公式 (40), 当 $\eta \to 0$ 时,

$$H_2\le\int\int_{\Omega_T}\chi_\eta^{(\varepsilon)}|\nabla u_\varepsilon|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int\int_{\Omega_T}\chi_\eta^{(\varepsilon)}|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0, \tag{41}$$

$$H_4\to 0, \tag{42}$$

先固定 $\eta>0$, 易得当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\chi_\eta^{(\varepsilon)}\to\chi_\eta$, 故

$$H_3\to 0\ \ (\eta\to 0). \tag{43}$$

从而将公式 (40)–(43) 代入公式 (39), 并令 $\eta\to 0$ 可得

$$\int\int_{\Omega_T}\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0.$$

因此再由公式 (22) 可得公式 (36) 成立.

下面证明公式 (37) 成立. 利用三角不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\int\int_{\Omega_T}\left|u_\varepsilon^\sigma|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\nabla u_\varepsilon-u^\sigma|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \le&\int\int_{\Omega_T}|u_\varepsilon^\sigma-u^\sigma|\,|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int\int_{\Omega_T}u^\sigma|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\,|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &+\int\int_{\Omega_T}u^\sigma\,|\nabla u|\cdot\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}-|\nabla u|^{p(x)-2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t=H_5+H_6+H_7.\end{aligned}\tag{44}$$

再由 Holder 不等式和引理 2.6, 当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$H_5\le C\,|u_\varepsilon^\sigma-u^\sigma|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{p^-}+C\,|u_\varepsilon^\sigma-u^\sigma|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{p^+}\to 0.\tag{45}$$

再次利用 Holder 不等式同样有

$$\begin{aligned}H_7=&\int\int_{\Omega_T}u^\sigma\,|\nabla u|\cdot\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}-|\nabla u|^{p(x)-2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \le& C\int\int_{\Omega_T}|\nabla u|\cdot\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}\right|^{\frac{p(x)-2}{p(x)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用引理 2.1 和公式 (26), 当 $\varepsilon$ 足够小时,

$$\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}\right|_{L^1(\Omega_T)}\le 1,$$

此时当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$H_7\le C\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)}-|\nabla u|^{p(x)}\right|_{L^1(\Omega_T)}^{(p^--2)/p^+}\left(|\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{p^+}+|\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{p^-}\right)\to 0.\tag{46}$$

下面估计 $H_6$. 再次利用三角不等式, 当 $\varepsilon$ 足够小时,

$$\begin{aligned}H_6=&\int\int_{\Omega_T}u^\sigma|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\cdot|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \le& C\int\int_{\Omega_T}|\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\cdot|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ \le& C\left(\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\right|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-2}}(\Omega_T)}^{\frac{p^+-2}{p^-}}+\left||\nabla u_\varepsilon|^{p(x)-2}\right|_{L^{\frac{p(x)}{p(x)-2}}(\Omega_T)}^{\frac{p^--2}{p^+}}\right)|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|_{L^{\frac{p(x)}{2}}(\Omega_T)}^{\frac{p^-}{2}}\\ \le& C\left(|\nabla u_\varepsilon|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{\frac{p^+(p^+-2)}{p^-}}+|\nabla u_\varepsilon|_{L^{p(x)}(\Omega_T)}^{\frac{p^-(p^--2)}{p^+}}\right)|\nabla u_\varepsilon-\nabla u|_{L^{\frac{p(x)}{2}}(\Omega_T)}^{\frac{p^-}{2}}.\end{aligned}\tag{47}$$

因此将公式 (14) 和 (25) 代入公式 (47), 可得

$$H_6\to 0\ (\varepsilon\to 0).\tag{48}$$

从而, 联立公式 (44), (45) 和 (48) 可得 (37) 成立.

最后证明公式 (38). 利用公式 (7) 和 (10), 可见

$$0 \leq -\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) \leq 1,\ -\beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) \to \xi,\ \ \varepsilon \to 0. \tag{49}$$

由极限的保号性, 易得

$$0 \leq \xi(x,t) \leq 1, \forall (x,t) \in \Omega_T. \tag{50}$$

根据 $G(\cdot)$ 的定义, 若证明公式 (38) 只需证明: 当 $u(x_0,t_0) > u_0(x_0)$ 时, $\xi(x_0,t_0) = 0$. 事实上, 当 $u(x_0,t_0) > u_0(x)$ 时, 存在常数 $\lambda > 0$ 和邻域 $B_\delta(x_0,t_0)$, 当 $\varepsilon$ 足够小时,

$$u_\varepsilon(x,t) \geq u_0(x) + \lambda,\ \forall (x,t) \in B_\delta(x_0,t_0).$$

当 $\varepsilon$ 足够小时, $\forall (x,t) \in B_\delta(x_0,t_0)$, $0 \geq \beta_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) \geq \beta_\varepsilon(\lambda) = 0$. 因此当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$\xi(x,t) = 0,\ \forall (x,t) \in B_\delta(x_0,t_0).$$

公式 (38) 得证.

引理 3.4 意味着 $\xi(x,t) = 0$ 和 $u(x,t) > u_0(x)$ 等价, $\xi(x,t) > 0$ 和 $u(x,t) = u_0(x)$ 等价. 据此, 我们给出本文的主要结果.

**定理 3.1** 设 $\gamma \in (0,1)$, 则抛物变分不等式 (1)–(3) 存在唯一的弱解满足

$$\partial_t u^\mu \in L^2(\Omega_T),\ \mu = \frac{\gamma - \sigma}{2} + 1 \in (0,1).$$

**证** 首先证明解的存在性. 由公式 (25) 和公式 (38) 可知定义 2.1 之条件 (a) 和条件 (c) 成立, 在公式 (5) 中令 $\varepsilon \to 0$ 易知定义 2.1 之条件 (b) 亦成立. 由引理 3.4 和公式 (22) 可知定义 2.1 中等式 (d) 也成立. 最后证明定义 2.1 中条件 (e) 成立. 定义

$$I = \int_\Omega |u_\varepsilon^\mu - u_{0\varepsilon}^\mu|\,\mathrm{d}x.$$

利用 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega |u_\varepsilon^\mu(x,t) - u_{0\varepsilon}^\mu(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\partial_s u_\varepsilon^\mu \mathrm{d}x|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \sqrt{t}\int_\Omega \left|\sqrt{\int_0^t (\partial_s u_\varepsilon^\mu)^2 \mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}x \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}\,|\partial_s u_\varepsilon^\mu|^2_{L^2(\Omega_T)}\sqrt{t}. \end{aligned}$$

故由公式 (14) 可得

$$\int_\Omega |u_\varepsilon^\mu(x,t) - u_{0\varepsilon}^\mu(x)|\,\mathrm{d}x \leq C\sqrt{t}, \tag{51}$$

其中 $C$ 是不依赖 $\varepsilon$ 的正常数. 进一步利用三角不等式又有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u^\mu(x,t) - u_0^\mu(x)|\,\mathrm{d}x \\ \leq &\int_\Omega |u^\mu(x,t) - u_\varepsilon^\mu(x,t)|\,\mathrm{d}x + |\int_\Omega |u_\varepsilon^\mu(x,t) - u_{0\varepsilon}^\mu(x)|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_{0\varepsilon}^\mu(x) - u_0^\mu(x)|\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

先令 $\varepsilon\to 0$, 可得

$$\int_\Omega |u^\mu(x,t)-u_0^\mu(x)|\,\mathrm{d}x \le |\int_\Omega |u_\varepsilon^\mu(x,t)-u_{0\varepsilon}^\mu(x)|\,\mathrm{d}x,$$

由公式 (51), 再令 $t\to 0$, 又有

$$\int_\Omega |u^\mu(x,t)-u_0^\mu(x)|\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{52}$$

因此, 解的存在性得证.

下面证明解的唯一性. 假设 $(u_1,\xi_1)$ 和 $(u_2,\xi_2)$ 是抛物变分不等式 (1)–(3) 的两个解, 令

$$\mathrm{sgn}_\delta(z)=\mathrm{sgn}(z)\inf\{|z|/\delta,1\},\ \delta>0,$$

并定义

$$\varphi_{u_1}=(u_1)^{\gamma-\sigma}\mathrm{sgn}_\delta\left((u_1-u_2)_+\right),\ \varphi_{u_2}=(u_2)^{\gamma-\sigma}\mathrm{sgn}_\delta\left((u_1-u_2)_+\right),$$

则由定义 2.1 可得

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}(\gamma+1-\sigma)^{-1}\partial_t u_1^{\gamma-\sigma+1}\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)+u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p(x)-2}\nabla u_1\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\int\int_{\Omega_T}\xi_1 u_1^{\gamma-\sigma}\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\\
&\int\int_{\Omega_T}(\gamma+1-\sigma)^{-1}\partial_t u_2^{\gamma-\sigma+1}\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)+u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\int\int_{\Omega_T}\xi_2 u_2^{\gamma-\sigma}\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

上述两个公式相减可得

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Omega_T}(\gamma+1-\sigma)^{-1}\partial_t(u_1^{\gamma-\sigma+1}-u_2^{\gamma-\sigma+1})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int\int_{\Omega_T}\left(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p(x)-2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2\right)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int\int_{\Omega_T}(\xi_1u_1^{\gamma-\sigma}-\xi_2u_2^{\gamma-\sigma})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}\tag{53}$$

下面证明

$$\int\int_{\Omega_T}(\xi_1u_1^{\gamma-\sigma}-\xi_2u_2^{\gamma-\sigma})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0. \tag{54}$$

当 $u_1(x,t)>u_2(x,t)$ 时, $u_1(x,t)>u_0(x)$, 并且此时 $\xi_1=0<\xi_2$. 故

$$(\xi_1u_1^{\gamma-\sigma}-\xi_2u_2^{\gamma-\sigma})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\le 0.$$

当 $u_1(x,t)\le u_2(x,t)$ 时, $u_1(x,t)\le u_2(x,t)$, 易得

$$(\xi_1u_1^{\gamma-\sigma}-\xi_2u_2^{\gamma-\sigma})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)=0.$$

因此对任意的 $(u_1,\xi_1)$ 和 $(u_2,\xi_2)$ 总有

$$(\xi_1 u_1^{\gamma-\sigma}-\xi_2 u_2^{\gamma-\sigma})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\le 0.$$

故公式 (54) 成立.

下面证明

$$\int\int_{\Omega_T}\left(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p(x)-2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2\right)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge 0. \tag{55}$$

注意当 $a$, $b$, $c_1$ 和 $c_2$ 为正常数时, $f(t)=c_1a^t-c_2b^t$ 在 $[0,\ \infty)$ 上是单调函数, 故

$$\left(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p(x)-2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p(x)-2}\nabla u_2\right)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\ge F(x,t), \tag{56}$$

其中

$$\begin{aligned}F(x,t)=\min\{&(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p^--2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p^--2}\nabla u_2)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+),\\&(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p^+-2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p^+-2}\nabla u_2)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\}.\end{aligned}$$

因此只需证明 $\int\int_{\Omega_T}F(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 非负. 由引理 2.3 易得

$$\begin{aligned}&\int\int_{\Omega_T}(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p^--2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p^--2}\nabla u_2)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\=&\int\int_{\Omega_T}(|\nabla g(u_1)|^{p^--2}\nabla g(u_1)-|\nabla g(u_2)|^{p^--2}\nabla g(u_2))\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge 0,\end{aligned}$$

其中 $g(s)=s^{1+\gamma/(p^--1)}(1+\gamma/(p^--1))^{-1}$. 类推上述证明, 还有

$$\int\int_{\Omega_T}(u_1^\gamma|\nabla u_1|^{p^+-2}\nabla u_1-u_2^\gamma|\nabla u_2|^{p^+-2}\nabla u_2)\nabla\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\ge 0.$$

从而 $\int\int_{\Omega_T}F(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ 非负, 再由公式 (56) 可知公式 (55) 成立. 进一步将公式 (54) 和公式 (55) 代入公式 (53), 有

$$\int\int_{\Omega_T}(\gamma+1-\sigma)^{-1}\partial_t(u_1^{\gamma-\sigma+1}-u_2^{\gamma-\sigma+1})\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0.$$

又因为 $\mathrm{sgn}_\delta((u_1-u_2)_+)=\mathrm{sgn}_\delta((u_1^{\gamma-\sigma+1}-u_2^{\gamma-\sigma+1})_+)$, 所以

$$\int_\Omega(u_1^{\gamma-\sigma+1}-u_2^{\gamma-\sigma+1})_+\mathrm{d}x\le 0.$$

故对任意的 $(x,t)\in\Omega_T$ 有 $u_1\le u_2$. 同理亦可证明任意的 $(x,t)\in\Omega_T$ 有 $u_1\ge u_2$. 故解的唯一性成立.

## 参 考 文 献

[1] 庄乾乾, 程希骏, 李静. 基于 Fourier 变换的裂解价差期权定价 [J]. 数学杂志, 2016, 36(4): 841–850.

[2] 李志广, 康淑瑰. 混合分数布朗运动环境下短期利率服从 vasicek 模型的欧式期权定价 [J]. 数学杂志, 2016, 36(3): 641–648.

[3] Chen X, Yi F, Wang L. American lookback option with fixed strike price 2-D parabolic variational inequality [J]. J. Diff. Equ., 2011, 251(1): 3063–3089.

[4] Zhou Y, Yi F. A free boundary problem arising from pricing convertible bond [J]. Appl. Anal., 2010, 89(1): 307–323.

[5] Chen X, Yi F. Parabolic variational inequality with parameter and gradient constraints [J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 385(1): 928–946.

[6] Zhou Y, Yi F. A variational inequality arising from American installment call options pricing [J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 357(1): 54–68.

[7] Maria C M, Indranil S. Solutions to an integro-differential parabolic problem arising in the pricing of financial options in a L é vy market [J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2011,12(6): 3103–3113.

[8] Boulaaras S, Haiour M. Overlapping domain decomposition methods for elliptic quasi-variational inequalities related to impulse control problem with mixed boundary conditions[J]. Proc. Indian Acad. Sci.-Math. Sci., 2011, 121(2): 481–493.

[9] Boulaaras S, Haiour M. $L^\infty$-asymptotic bhavior for a finite element approximation in parabolic quasi-variational inequalities related to impulse control problem [J]. Appl. Math. Comp., 2011, 217(1): 6443–6450.

[10] Boulaaras S, Haiour M. The finite element approximation in parabolic quasi-variational inequalities related to impulse control problem with mixed boundary conditions[J]. J. Taibah Univ. Sci., 2013, 7(1): 105–113.

[11] Dibenedetto E. Degenerate parabolic equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2010.

[12] Lian S, Gao W. Existence of solutions to an initial Dirichlet problem of evolutional-Laplace equations [J]. Ann. l'Institut Henri Poincare (C) Nonl. Anal., 2012, 29(2): 863–886.

# EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO A CLASS OF NONLINEAR DEGENERATE PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES

LI Zhi-guang, KANG Shu-gui

(*School of Mathematics and Computer Science, Shanxi Datong University, Datong 037009, China*)

**Abstract:** In this paper, the variational inequalities based on degenerate parabolic operators are studied. By penalty method, the existence and uniqueness of the solutions are proved, which generalize the theories of variational inequalities.

**Keywords:** variational inequality; degeneate parabolic inequality; existence; uniqueness; penalty method

**2010 MR Subject Classification:** 35J50; 35K87