Vol. 28 (2018)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

有限群亏零 p - 块的存在性

钱方生

(哈尔滨师范大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150025)

摘 要: 本文研究了有限群亏零 p - 块的存在性. 利用极大子群的性质, 给出了有限群存在亏零 p - 块的充要条件. 这些结论丰富了块论理论.

关键词: 幂零群; 亏零块; 亏群

MR(2010) **主题分类号**: 20C20 **中图分类号**: O152.6

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)01-0185-06

1 引言

模表示论中块论是其核心部分, 而亏群在块论中起到关键的作用. 它是联系群论性质和表示论性质最重要的对象. 因而, 下列问题一直是模表示论研究的核心问题.

一个 p - 子群 D 何时是有限群 G 的 p - 块的亏群? 如果 D 是亏群, 用群论性质来计算以 D 为亏群的 p - 块的个数.

这个问题在有限群表示论中具有重要意义, Brauer 在文献 [1] 中将它列为问题 19, 而在文献 [2] 中被 Feit 列为问题 5.

特别地, 对 $D=1$, 以 D 为亏群的 p - 块被称为亏零 p - 块. 关于这一问题现在已有许多结论见文献 [3–8], 在这里我们给出了一类存在极大子群是幂零群的有限群有亏零 p - 块的充要条件.

本文讨论的群均为有限群, 如无特别说明所使用的符号和术语均符合标准.

2 引理

定义 2.1 [9] 有限群 G 的一个子群 H 称为半正规的, 若对任意的子群 $K \leq G$, 只要 $(|K|,\ |H|)=1$, 就有 $KH=HK$.

由定义下面的引理是显然的.

引理 2.2 设 G 为有限群, H 为 G 的半正规的子群.

(1) 若 $H \leq K \leq G$, 则 H 为 K 的半正规的子群.

(2) 设 $N \lhd G$, 若 $(|N|,\ |H|)=1$, 则 HN/N 为 G/N 的半正规的子群.

引理 2.3 [10] 假设有限群 G 有一个极大幂零子群, 且 Sylow 2 子群是交换的, 则群 G 是可解的.

引理 2.4 [11] 假设 G 是有限可解群, P 是 G 的 Sylow p - 子群且是交换的, $O_{p'}(G)$ 是幂零的, 其中 p 是整除群 G 阶的素数. 则下列条件是等价的:

*收稿日期: 2016-10-03 接收日期: 2016-11-02

基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目 (A201412).

作者简介: 钱方生 (1965–), 男, 河北献县, 教授, 主要研究方向: 有限群及其表示.

(1) G 有亏零 p - 块.

(2) $P\bigcap P^x=1$, 对某个元素 $x\in G$.

(3) $O_p(G)=1$.

引理 2.5 [12] 设 N 是可解群 G 的一个正规子群, 且 N 的阶与 p 互素, 其中 p 是一个素数. 令 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 是 G 的亏零类, 并且它们都包含在 N 中. 则 G 至少有 r 个亏零特征标.

引理 2.6 设 G 是有限群, $G=PN$, 其中 P 是 G 的 Sylow 2 - 子群, N 是初等交换 q - 群, $q\neq 2$, $N\lhd G$. 若 G 的 2 阶群均是半正规的子群, 则 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 $O_2(G)=1$, 并且存在 $a\in N$, 使得 $C_G(a)$ 是 $2'$ 子群.

证 1) 对任意 $a\in N$, $a\neq 1$, $x\in G$, $x^2=1$, $x\neq 1$, 有 $x\in C_G(a)$ 或 $a^x=a^{-1}$.

由 $\langle x\rangle$ 是半正规的子群, 有 $\langle x\rangle\langle a\rangle\leq G$, 于是 $\langle a\rangle\lhd\langle x\rangle\langle a\rangle$, 若 $x\overline{\in}C_G(a)$, 则 $a^x=a^l=b$, 其中 $2\leq l\leq q-1$. 于是有 $b^x=(a^x)^x=a^{x^2}=a$. 进而有 $(ab)^x=a^xb^x=ba=ab$, 从而 $ab=1$, 即有 $a=b^{-1}$. 由 x, a 的任意性知对任意的 2 阶元 x 及 q - 阶元 a 有 $x\in C_G(a)$ 或 $a^x=a^{-1}$.

2) 命题成立.

由 N 是初等交换 q - 群, 于是可设 $N=\langle a_1\rangle\bigoplus\langle a_2\rangle\bigoplus\cdots\bigoplus\langle a_n\rangle$, 其中 a_1, a_2, $\cdots a_n$ 是 q - 阶元. 由 $O_2(G)=1$ 知 $C_G(N)=N$. 否则, 令 Q 为 $C_G(N)$ 的 Sylow 2 - 子群, 则 $Q\neq 1$ 且 $C_G(N)=N\times Q$, 从而 Q 是 $C_G(N)$ 特征子群, 进而 $Q\lhd G$, 与 $O_2(G)=1$ 矛盾. 设 $a=a_1+a_2+\cdots+a_n$, x 是 2 阶元, 若 $x\in C_G(a)$, 则 $a=a^x=a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x$. 由 1) 及 $N=\langle a_1\rangle\bigoplus\langle a_2\rangle\bigoplus\cdots\bigoplus\langle a_n\rangle$, 知 $a_i^x=a_i$, 其中 $i=1,\ 2,\ \cdots,n$. 由于 a_1, $a_2,\cdots$, a_n 是 N 的生成元, 从而有 $x\in C_G(N)$, 与 $C_G(N)=N$ 矛盾. 从而 $C_G(a)$ 是 $2'$ 子群, 且有 $a\in O_{2'}(G)=N$. 由引理 2.5 知 G 有亏零 2 - 块, 于是命题成立.

引理 2.7 [13] 设 G 是奇阶群, p 是一个素数, $O_{p'}(G)$ 和 $G/O_{p'}(G)$ 是幂零的. 则 G 有亏零 p - 块的充要条件是 $O_p(G)=1$.

引理 2.8 [11] 设 G 是有限群, D 是 G 的正规 p - 子群, $PN\lhd G$, 其中 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, N 是 G 的正规 p' - 子群. 则下列条件是等价的:

1) G 有以 D 为亏群的 p - 块.

2) PN 有以 D 为亏群的 p - 块.

3) N 有以 D 为亏群的 G 的共轭类.

引理 2.9 设 G 是有限群, $G=PO_{p'}(G)$, 其中 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, p 是整除群 G 阶的一个素因子. 若 $G/O_p(G)$ 有亏零 p - 块, 则 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

证 设 $\overline{G}=G/O_p(G)$, 则 $\overline{G}=\overline{PO_{p'}(G)}$ 是 p - 幂零的. 由 $\overline{G}$ 有亏零 p - 块, 知存在 $\overline{x}\in\overline{O_{p'}(G)}$, 使得 $C_{\overline{G}}(\overline{x})$ 是 p' - 群, 并且可设 $x\in O_{p'}(G)$. 因为 $O_p(G)\unlhd G$, $O_{p'}(G)\unlhd G$, 所以 $O_p(G)\subseteq C_G(O_{p'}(G))\subseteq C_G(x)$. 显然有 $C_G(x)/O_p(G)\subseteq C_{\overline{G}}(\overline{x})$, 而 $C_{\overline{G}}(\overline{x})$ 是 p' - 群, 于是 $C_G(x)/O_p(G)$ 是 p' - 群, 从而 $O_p(G)\in\mathrm{Syl}_p(C_G(x))$. 由引理 2.8 知 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

3 主要定理及其证明

关于亏零 p - 块问题, 人们希望给出存在亏零 p - 块的各种群论条件. 这一问题现在已有一些重要结果, 在这里又给出了一类存在极大幂零子群的有限群有亏零 p - 块的充要条件. 首

先给出一些关于有限群有亏零 2 - 块的充要条件.

定理 3.1　设 G 是有限群, 且 G 有一个极大幂零子群. 若 G 的 Sylow 2 - 子群是交换的, 则 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 $O_2(G)=1$.

证　必要性是显然的, 下面只需证充分性.

1) 若 $M \lhd G$. 设 P 是 M 的 Sylow 2 - 子群, 由 M 是幂零的, 知 P Char M, 从而 $P \lhd G$. 由 $O_2(G)=1$, 知 $P=1$. 再由 M 是 G 的极大子群, 知 $\mid G:M \mid=2$, 从而 G 的 Sylow 2 - 子群的阶是 2, 进而是交换的. 由 $O_{2'}(G)=M$ 是幂零的及引理 2.4 知 G 有亏零 2 - 块.

2) 假设 M 不是 G 的正规子群. 若 $\Phi(G) \neq 1$. 由 $\Phi(G)$ 是幂零的和 $O_2(G)=1$, 知 $\Phi(G)$ 是 $2'$ - 子群. 若 $O_2(G/\Phi(G)) \neq 1$, 则令 $K/\Phi(G)=O_2(G/\Phi(G))$. 于是 K 是幂零的, 进而 K 的 Sylow 2 - 子群是 K 的不为 1 的特征子群, 从而是 G 的不为 1 的正规 2 - 子群与 $O_2(G)=1$ 矛盾, 因而 $O_2(G/\Phi(G))=1$. 再由 $\Phi(G) \leq M$ 和归纳假设知 $G/\Phi(G)$ 有亏零 2 - 块, 从而 G 有亏零 2 - 块.

于是可假设 $\Phi(G)=1$. 设 M_G 是 M 中的 G 的极大正规子群, 若 $M_G \neq 1$. 由 M 是幂零的, 知 M_G 是幂零的且是 p' - 子群. 若 $O_2(G/M_G)=1$, 则由归纳假设知 G/M_G 亏零 2 - 块. 从而 G 有亏零 2 - 块. 现设 $O_2(G/M_G)=N/M_G \neq 1$. 易知 N/M_G 不是 M/M_G 的子群, 再由 M 是 G 的极大子群, 知 $G=NM$, 从而 G/N 同构于 M 的子群是幂零的. 设 L/N 是 G/N 的 Sylow 2 - 子群, 由 G/N 幂零性知 L 是 G 的正规子群且 G/L 是 p' - 子群. 从而 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 L 有亏零 2 - 块. 由 G 的 Sylow 2 - 子群是交换的, 知 L 的 Sylow 2 - 子群是交换的, 而 $O_{2'}(L)=M_G$ 是幂零的, 由引理 2.4 知 L 有亏零 2 - 块, 从而 G 有亏零 2 - 块.

设 $M_G=1$. 令 K 是 G 的极小正规子群, 由引理 2.3 知 G 是可解的, 再由 $\Phi(G)=1$ 知 K 是初等交换 q - 群, 其中 q 是不同于 2 的素数. 由 $M_G=1$ 和 M 是 G 的极大子群知 $G=KM$, 于是 G/K 同构于 M 的子群是幂零的, 从而 G/K 的 Sylow 2 - 子群 W/K 是 G/K 的正规子群. 于是 G/W 是 $2'$ - 子群, 从而 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 W 有亏零 2 - 块. 设 $W=P_0K$, 其中 P_0 是 G 的 Sylow 2 - 子群. 而 $O_{2'}(W)=K$ 是幂零的, 由 G 的 Sylow 2 - 子群是交换的, 知 W 的 Sylow 2 - 子群是交换的, 由引理 2.4 知 W 有亏零 2 - 块, 从而 G 有亏零 2 - 块.

关于奇阶幂零群被幂零群扩张的群有亏零 p - 块已有很多很好的结果, 例如引理 2.7. 而对于偶阶群结果还不是很多, 下面给出一类偶阶群有亏零 2- 块的充要条件.

定理 3.2　设 G 是有限群, $G=PN$, 其中 P 是 G 的 Sylow 2 - 子群, $N \lhd G$ 且 N 是幂零的. 若 G 的 2 阶子群均是半正规的子群, 则 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 $O_2(G)=1$, 并且存在 $a \in N$, 使得 $C_G(a)$ 是 $2'$ - 子群.

证　必要性是显然的, 下面只需证充分性.

假设 $\Phi(G) \neq 1$. 则 $\Phi(G)$ 是 G 的 $2'$ - 子群. 否则由 $\Phi(G) \neq 1$ 的幂零性知 $1 \neq \mathrm{Syl}_2(\Phi(G)) \lhd \Phi(G)$ char G. 则 $1 \neq \mathrm{Syl}_2(\Phi(G)) \lhd G$, 则与 $O_2(G)=1$ 矛盾.

设 $\overline{G}=G/\Phi(G)$ 及 $O_2(\overline{G})=D_0\Phi(G)/\Phi(G)$. 显然有 $D_0\Phi(G) \lhd G$. 对任意 $g \in G$, 有 $D_0^g \subseteq D_0\Phi(G)$, 于是存在 $g_1 \in \Phi(G)$, 使得 $D_0^g=D_0^{g_1}$. 进而有 $gg_1^{-1} \in N_G(D_0)$, 从而有 $g \in N_G(D_0)\Phi(G)$, 即 $G=N_G(D_0)\Phi(G)=N_G(D_0)$. 因此有 $D_0 \lhd G$. 由 $O_2(G)=1$, 知 $D_0=1$. 于是 $O_2(\overline{G})=1$. 由 $\Phi(G)$ 是 $2'$ - 子群及引理 2.2, 知 $\overline{G}$ 满足定理条件, 进而由归纳假设知 $\overline{G}$ 有亏零 2 - 块, 从而 G 有亏零 2 - 块.

于是可以假设 $\Phi(G)=1$. 由 $O_{2'}(G)=N$, N 是幂零的, 及 $\Phi(G)=1$ 知 $N=O_{2'}(G)=F(G)=N_1\times N_2\times\cdots\times N_e$, 其中 N_i 是 G 的极小正规子群且是初等交换 q_i - 子群, $1\le i\le e$. 显然有 $O_{2'}(G)\subseteq C_G(O_{2'}(G))=C_G(F(G))\subseteq O_{2'}(G)$. 进而 P 作用在 $O_{2'}(G)$ 上是忠实的.

对每个 N_i 可看作是不可约 $F_{q_i}[G]$ - 模, 其中 F_{q_i} 是 q_i 个元素的域. 由 $G=PO_{2'}(G)$ 及 $O_{2'}(G)$ 是交换的, 有 N_i 可看作是不可约 $F_{q_i}[P]$ - 模. 设 K_i 是 P 作用在 N_i 上的核, 由于 P 作用在 $O_{2'}(G)$ 上是忠实的, 因而有 $\bigcap\limits_{i=1}^{e}K_i=1$, 且 N_i 可看作是不可约 $F_{q_i}[P/K_i]$ - 模. 由引理 2.6, 存在 $n_i\in N_i\setminus\{1\}$, 对任意 $x\in P\setminus K_i$ 有 $n_i^x\ne n_i$. 令 $n=n_1n_2\cdots n_e\in O_{2'}(G)$. 若存在 $1\ne y\in P$, $y^2=1$, 使得 $n^y=n_1^yn_2^y\cdots n_e^y=n$, 则有 $n_i^y=n_i$, $1\le i\le e$. 因为 $n_i\ne 1$, 所以 $y\in K_i$, 即有 $y\in\bigcap\limits_{i=1}^{e}K_i=1$. 由 $G=PO_{2'}(G)$ 及 $O_{2'}(G)$ 是交换的, 则对于 n 有 $2\dagger\mid C_G(n)\mid$, 于是有 $C_G(n)$ 是 $2'$ - 子群. 再由引理 2.5, G 有亏零 2 - 块.

注 有例子说明定理 3.2 的条件群 G 的 2 阶子群均是半正规的是必要的. 设 $q=1+2^m$ 是 Fermat 素数, 令 $G=Z_2\wr(Z_q:Z_{q-1})$, 是 $Z_q:Z_{q-1}$ 与 Z_2 的圈积, 则 G 是幂零群被幂零群扩张的群, 且 $O_2(G)=1$, 但 G 没有亏零 2 - 块.

定理 3.3 设 G 是有限群, 且 G 有一个极大幂零子群. 若 G 的 2 阶群均是半正规的子群, 则 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 $O_2(G)=1$.

证 必要性是显然的, 下面只需证充分性.

1) 若 $M\lhd G$. 设 P 是 M 的 Sylow 2 - 子群, 由 M 是幂零的, 知 P Char M, 从而 $P\lhd G$. 由 $O_2(G)=1$, 知 $P=1$. 再由 M 是 G 的极大子群, 知 $\mid G:M\mid=2$, 从而 G 的 Sylow 2 - 子群的阶是 2, 进而是交换的. 由 $O_{2'}(G)=M$ 是幂零的及引理 2.4 知 G 有亏零 2 - 块.

2) 若 M 不是 G 的正规子群. 设 M_G 是 M 中的 G 的极大正规子群, 若 $M_G\ne 1$. 由 M 是幂零的, 知 M_G 是幂零的且是 $2'$ - 子群. 若 $O_2(G/M_G)=1$, 则由引理 2.2 及归纳假设知 G/M_G 有亏零 2 - 块. 从而 G 有亏零 2 - 块. 现设 $O_2(G/M_G)=N/M_G\ne 1$. 易知 N/M_G 不是 M/M_G 的子群, 再由 M 是 G 的极大子群, 知 $G=NM$. 从而 G/N 同构于 M 的子群, 于是 G/N 幂零的. 设 L/N 是 G/N 的 Sylow 2 - 子群, 由 G/N 幂零性知 L 是 G 的正规子群且 G/L 是 $2'$ - 子群. 从而 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 L 有亏零 2 - 块. 而 $O_{2'}(L)=M_G$ 是幂零的, $L/O_{p'}(L)=L/M_G$ 是 2 - 群, 因而也是幂零的, 由定理 3.2 知 L 有亏零 2 - 块, 从而 G 有亏零 2 - 块.

于是可假设 $M_G=1$. 设 K 是 G 的极小正规子群, 由引理 2.3 知 G 是可解的, 于是 K 是初等交换 q - 群, 其中 q 是不同于 2 的素数. 由 $M_G=1$ 和 M 是 G 的极大子群知 $G=KM$, 于是 G/K 同构于 M 的子群, 进而 G/K 幂零的. 从而 G/K 的 Sylow 2 - 子群 W/K 是 G/K 的正规子群. 于是 G/W 是 $2'$ - 子群, 从而 G 有亏零 2 - 块的充要条件是 W 有亏零 2 - 块. 设 $W=P_0K$, 其中 P_0 是 G 的 Sylow 2 - 子群. 而 $O_{2'}(W)=K$ 是幂零的, $W/O_{2'}(W)=W/K$ 是 2 - 群, 因而也是幂零的, 由定理 3.2 知 W 有亏零 p - 块, 从而 G 有亏零 p - 块.

接下来给出一类奇阶群有亏零 p - 块的充要条件.

定理 3.4 设 G 是奇阶群, M 是 G 的极大子群且是幂零的, p 是整除群 G 阶的一个素因子. 则 G 有亏零 p - 块的充要条件是 $O_p(G)=1$.

证 必要性是显然的, 下面只需证充分性.

1) 若 $M\lhd G$. 设 P 是 M 的 Sylow p - 子群, 由 M 是幂零的, 知 P char M, 从而 $P\lhd G$. 由 $O_p(G)=1$, 知 $P=1$. 再由 M 是 G 的极大子群, 知 $\mid G:M\mid=p$, 从而 G 的 Sylow p - 子

群的阶是 p, 进而是交换的. 由 $O_{p'}(G)=M$ 是幂零的及引理 2.4 知 G 有亏零 p - 块.

2) 若 M 不是 G 的正规子群. 设 M_G 是 M 中的 G 的极大正规子群, 若 $M_G\neq 1$. 由 M 是幂零的, 知 M_G 是幂零的且是 p' - 子群. 若 $O_p(G/M_G)=1$, 则 M/M_G 是 G/M_G 的极大子群且是幂零的, 从而由归纳假设知 G/M_G 亏零 p - 块. 进而 G 有亏零 p - 块. 现设 $O_p(G/M_G)=N/M_G\neq 1$. 易知 N/M_G 不是 M/M_G 的子群, 再由 M 是 G 的极大子群, 知 $G=NM$, 从而 G/N 同构于 M 的子群, 进而是幂零的. 设 L/N 是 G/N 的 Sylow p - 子群, 由 G/N 幂零性知 L 是 G 的正规子群且 G/L 是 p' - 子群. 从而 G 有亏零 p - 块的充要条件是 L 有亏零 p - 块. 而 $O_{p'}(L)=M_G$ 是幂零的, $L/O_{p'}(L)=L/M_G$ 是 p - 群, 因而也是幂零的, 由引理 2.7 知 L 有亏零 p - 块, 从而 G 有亏零 p - 块.

于是可假设 $M_G=1$. 设 K 是 G 的极小正规子群, 由 G 的可解性知 K 是初等交换 q - 群, 其中 q 是不同于 p 的素数. 由 $M_G=1$ 和 M 是 G 的极大子群知 $G=KM$, 于是 G/K 同构于 M 的子群是幂零的, 从而 G/K 的 Sylow p - 子群 W/K 是 G/K 的正规子群. 于是 G/W 是 p' - 子群, 从而 G 有亏零 p - 块的充要条件是 W 有亏零 p - 块. 设 $W=P_0K$, 其中 P_0 是 G 的 Sylow p - 子群. 而 $O_{p'}(W)=K$ 是幂零的, $W/O_{p'}(W)=W/K$ 是 p - 群, 因而也是幂零的, 由引理 2.7 知 W 有亏零 p - 块, 从而 G 有亏零 p - 块.

定理 3.5 设 G 是奇阶群, M 是 G 的极大子群且是幂零的, p 是整除群 G 阶的一个素因子. 若 $O_p(M)\subseteq O_p(G)$, 则 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

证 1) 若 $O_p(M)<O_p(G)$, 则 $O_p(G)$ 不是 M 的子群, 由 M 是 G 的极大子群, 有 $G=MO_p(G)$, 于是 $G/O_p(G)$ 同构于 M 的子群是幂零的. 设 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, 则有 $P/O_p(G)\in\mathrm{Syl}_p(G/O_p(G))$ 且有 $P/O_p(G)\lhd G/O_p(G)$, 于是有 $P=O_p(G)\lhd G$. 由于 $1\in O_{p'}(G)$, $P\in\mathrm{Syl}_p(G)=\mathrm{Syl}_p(1)$. 由引理 2.8 知 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

2) 若 $O_p(G)=O_p(M)$. 由 M 是幂零的, 知 $O_p(G)=O_p(M)\in\mathrm{Syl}_p(M)$. 若 $M\lhd G$, 由 M 是 G 的极大子群, 有 $|G:M|=q$, 其中 q 是整除群 G 阶的一个素因子. 若 $q\neq p$, 则 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块的充要条件是 M 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块. 由 M 是幂零的, 则有 $M=O_p(M)\times O_{p'}(M)$. 于是对任意 $x\in O_{p'}(M)$, 有 $O_p(M)\in\mathrm{Syl}_p(C_G(x))$. 从而 M 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块. 于是 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

若 $q=p$. 令 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, 则有 $G=PM$. 易知 $P/O_p(G)\in\mathrm{Syl}_p(G/O_p(G))$, $M/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的极大子群且幂零的, 且有 $O_p(G/O_p(G))=1$. 于是由定理 3.4 知 $G/O_p(G)$ 有亏零 p - 块. 由 $O_{p'}(M)\mathrm{chra}M\lhd G$, 知 $O_{p'}(M)\leq O_{p'}(G)$. 由 $|G:M|=p$, 知 $O_{p'}(M)=O_{p'}(G)$. 于是 $M=O_p(M)\times O_{p'}(M)=O_p(G)\times O_{p'}(G)$. 于是由引理 2.9 及 $G/O_p(G)$ 有亏零 p - 块, 知 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

若 M 不是 G 的正规子群. 由于 $M/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的极大子群且幂零的,

$$O_p(G/O_p(G))=1,$$

于是由定理 3.4 知 $G/O_p(G)$ 有亏零 p - 块. 设 M_G 是 M 中的 G 的极大正规子群. 若 $O_p(G/M_G)\neq 1$, 则由 M/M_G 是 p' - 子群, 知 $O_p(G/M_G)=H/M_G$ 不是 M/M_G 的子群. 由 $M/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的极大子群, 有 $G=HM$, 且有 $(H/M_G)\cap(M/M_G)=1$. 于是有 $|G/M_G|=|H/M_G||M/M_G|$, 即有 $|G:H|=|M/M_G|$, 从而 G/H 是 p' - 群. 设 $P\in\mathrm{Syl}_p(H)$, 则有 $H=PM_G=PO_{p'}(M_G)$, 且 $O_{p'}(M_G)\lhd H$ 和 $O_p(H)=O_p(G)$. 由 G/H 是 p' - 群及 $G/O_p(G)$ 有亏零 p - 块, 知 $H/O_p(G)$ 有亏零 p - 块, 再由引理 2.9 知 H 有以 $O_p(G)$ 为

亏群的 p - 块. 从而存在 $x\in O_{p'}(M_G)$, 使得 $O_p(G)\in\mathrm{Syl}_p(C_H(x))$. 由 $O_{p'}(M_G)\lhd G$, 有 $O_{p'}(M_G)\subseteq O_{p'}(G)$, 即有 $x\in O_{p'}(G)$. 于是由引理 2.8 知 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

若 $O_p(G/M_G)=1$. 由 G/M_G 的可解性知, $O_{p'}(G/M_G)\neq 1$. 易知 $O_{p'}(G/M_G)$ 不是 M/M_G 的子群, 于是有 $G/M_G=(O_{p'}(G/M_G))(M/M_G)$. 而 $O_{p'}(G/M_G)$, M/M_G 均是 p' - 群, 所以 G/M_G 也是 p' - 群. 进而有 $O_p(M_G)=O_p(G)=P\in\mathrm{Syl}_p(G)$, 于是 G 有以 $O_p(G)$ 为亏群的 p - 块.

参 考 文 献

[1] Brauer R. Representations of finite groups[A]. Saaty T L. Lectures on Modern Mathematics[C]. New York: John Wiley and Sons, Vol I, 1963: 133–175.

[2] Feit W. The representation theory of finite groups[M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[3] Fukushima H. On the existence of p-blocks of defect 0 in solvable groups[J]. J. Alg., 2000, 230:676–682.

[4] Lv Kewei. Some remarks on complexity, defect groups ang indecomposable modules[J]. J. Math., 2002, 22(3): 261–265.

[5] Robinson G R. The number of p-blocks with a given defect group[J]. J. Alg., 1983, 84: 493–502.

[6] Shi Shengming. The existence of p-blocks of a finite group[J]. Commun Alg., 2001, 29(11): 5233–5238.

[7] Tsushima Y. On the weakly regular p-blocks with respect to $O_{p'}(G)$[J]. Osaka J. Math., 1977, 14: 465–470.

[8] Zhang Jiping. Studies on defect group[J]. J. Alg., 1994, 166: 310–316.

[9] 陈重穆. Srinivassn 定理的一个推广 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 1987, 12(1): 1–4.

[10] Huppert B. Endliche gruppen I[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1979.

[11] Shi Shengming, Zhao Zhongping. The existence of p -blocks of supersolvable groups[J]. Alg. Collo., 2002, 9(1): 117–120.

[12] Itô N. On the characters of soluble groups[J]. Nagoya Math., 1951, 3: 31–48.

[13] Itô N. Some studies on group characters[J]. Nagoya Math., 1951, 2: 17–28.

THE EXISTENCE OF p-BLOCK OF DEFECT ZERO IN A FINITE GROUP

QIAN Fang-sheng

(*School of Mathematical Science, Harbin Normal University, Harbin 150025, China*)

Abstract: In this paper, existence of p -blocks of defect zero in a finite group is investigated. By using the properties of maximal subgroups, necessary and sufficient conditions of the existence of p-blocks of defect zero in a finite group are given, which enrich the block theory.

Keywords: nilpotent group; block of defect 0; defect group

2010 MR Subject Classification: 20C20