Vol. 28 (2018)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于合数模上 Hardy 和的均值

王晓瑛, 岳霞霞, 刘华宁
(西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

摘 要: 本文研究了短区间上 Hardy 和的均值. 利用 Dirichlet L - 函数的均值定理, 给出合数模上 Hardy 和的均值的渐近公式, 从而推广了素数模上 Hardy 和的均值性质.

关 键 词: Hardy 和; Dirichlet L - 函数; 均值; 渐近公式
MR(2010) **主题分类号:** 11F20 **中图分类号:** O156.4
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2018)01-0155-12

1 引言

设整数 h, q 满足 $q>0$. 经典的 Dedekind 和的定义为

$$S(h,q)=\sum_{r=1}^{q}\left(\left(\frac{r}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{q}\right)\right),$$

其中

$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2}, & \text{当 } x \text{ 不是整数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 是整数}. \end{cases}$$

Dedekind 和 $S(h,q)$ 在 Dedekind η 函数的研究中起着重要作用, 详见文献 [1, 2] 或者 [3] 的第 3 部分.

Berndt [4] 引入了如下的 Hardy 和

$$H(h,q)=\sum_{j=1}^{q-1}(-1)^{j+1+\left[\frac{hj}{q}\right]},$$

并研究了其性质. Sitaramachandrarao [5] 将 Hardy 和表示成 Dedekind 和的如下形式

$$H(h,q)=-8S(h+q,2q)+4S(h,q).$$

在文献 [6] 中, 徐哲峰与张文鹏研究了短区间上的 Hardy 和的均值, 并得到了如下渐近公式.

命题 1.1 设 $p\geq 5$ 为素数, $\bar{b}$ 为 b 关于模 p 的乘法逆, 则有

$$\sum_{a\leq \frac{p}{4}}\sum_{b\leq \frac{p}{4}}H(2a\bar{b},p)=\frac{3}{16}p^2+O(p^{1+\epsilon}),$$

*收稿日期: 2016-04-14 接收日期: 2016-10-27
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11571277); 陕西省工业科技基金资助 (2016GY-077).
作者简介: 王晓瑛 (1964–), 女, 陕西长武, 教授, 主要研究方向: 解析数论.

其中 ϵ 为任意小的正数.

Liu [7] 也类似的研究了短区间上的 Hardy 和, 并得到如下命题.

命题 1.2 设 $p \geq 5$ 为素数, 则有

$$\sum_{a\leq\frac{p}{3}}\sum_{b\leq\frac{p}{3}} H(2a\bar{b},p)=\frac{1}{5}p^2+O(p^{1+\epsilon}),$$
$$\sum_{a\leq\frac{p}{3}}\sum_{b\leq\frac{p}{4}} H(2a\bar{b},p)=\frac{27}{320}p^2+O(p^{1+\epsilon}).$$

本文将进一步研究合数模上 Hardy 和的均值, 主要结果如下.

定理 1.1 设 $q \geq 5$ 为奇数, 则有

$$\sum_{a\leq\frac{q}{4}}\sum_{b\leq\frac{q}{4}} H(2a\bar{b},q)=\frac{3}{16}q^2\prod_{p^\alpha\|q}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^{3\alpha}}-\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}-\frac{1}{p^{3\alpha}}\right)\right)}{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)}+O\left(q^{1+\epsilon}\right),$$

其中 ϵ 为任意小的正数.

首先将在第 2 节中把 Hardy 和的均值表为 Dirichlet L - 函数的均值; 然后在第 3 节中计算相应的 Dirichlet L - 函数的均值; 最后在第 4 节中证明定理 1.1.

2 Hardy 和的均值表为 Dirichlet L - 函数的均值

引理 2.1 设整数 q,h 满足 $q\geq 3$ 与 $(h,q)=1$, 则有

$$S(h,q)=\frac{1}{\pi^2 q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)|L(1,\chi)|^2.$$

证 见文献 [8] 中的引理 2.

引理 2.2 设 $q\geq 3$ 为奇数, h 为任意整数, 满足 $(h,q)=1$. 则有

$$H(h,q)=\begin{cases} -\dfrac{16}{\pi^2 q}\displaystyle\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m|d}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2, & 2|h,\\ 0, & 2\nmid h,\end{cases}$$

其中 $\displaystyle\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}$ 表示对模 m 的奇原特征求和.

证 由引理 2.1 有

$$\begin{aligned}
H(h,q) &= -8S(h+q,2q)+4S(h,q)\\
&= -\frac{4}{\pi^2 q}\sum_{d\mid 2q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h+q)|L(1,\chi)|^2+\frac{4}{\pi^2 q}\sum_{d\mid q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)|L(1,\chi)|^2\\
&= -\frac{16}{\pi^2 q}\sum_{d\mid q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h+q)\chi_2^0(h+q)|L(1,\chi\chi_2^0)|^2\\
&= \begin{cases} -\dfrac{16}{\pi^2 q}\displaystyle\sum_{d\mid q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{\substack{\chi \bmod d\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)|L(1,\chi\chi_2^0)|^2, & 2\mid h,\\ 0, & 2\nmid h,\end{cases}\\
&= \begin{cases} -\dfrac{16}{\pi^2 q}\displaystyle\sum_{d\mid q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m\mid d}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(h)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2, & 2\mid h,\\ 0, & 2\nmid h.\end{cases}
\end{aligned}$$

定理 2.1 设 $q\geq 5$ 为奇数, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\leq \frac{q}{4}}\sum_{b\leq \frac{q}{4}}H(2a\bar{b},q)\\
=\ &\frac{16}{\pi^4 q}\sum_{d\mid q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m\mid d}m\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\left(1+2\chi(2)+\chi(4)\right)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2.
\end{aligned}$$

证 由引理 2.2 可得

$$\sum_{a\leq \frac{q}{4}}\sum_{b\leq \frac{q}{4}}H(2a\bar{b},q) = -\frac{16}{\pi^2 q}\sum_{d\mid q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m\mid d}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2\sum_{a\leq \frac{q}{4}}\chi(a)\sum_{b\leq \frac{q}{4}}\overline{\chi}(b).$$

另一方面, 设 χ 为模 m 的原特征, 整数 $r\geq 1$, $\lambda\in[0,1)$ 且 $\lambda\neq \frac{r}{m}$. 由文献 [9] 可得特征和的 Fourier 展式如下

$$\sum_{a\leq \lambda m}\chi(a)=\begin{cases}\dfrac{\tau(\chi)}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{\chi}(n)\sin(2\pi n\lambda)}{n}, & \text{如果}\quad \chi(-1)=1;\\ \dfrac{\tau(\chi)}{\pi i}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{\chi}(n)(1-\cos(2\pi n\lambda))}{n}, & \text{如果}\quad \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

其中

$$\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{m}\chi(a)\mathrm{e}\left(\frac{a}{m}\right)$$

是 Gauss 和, $\mathrm{e}(y)=\mathrm{e}^{2\pi iy}$. 由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\le\frac{q}{4}}\chi(a) &= \sum_{a\le m\cdot\frac{q}{m4}}\chi(a)=\sum_{a\le m\cdot\left\{\frac{q}{4m}\right\}}\chi(a)=\frac{\tau(\chi)}{\pi i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{\chi}(n)\left(1-\cos(2\pi n\frac{q}{4m})\right)}{n}\\ &= \frac{\tau(\chi)}{\pi i}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv1(\bmod 2)}}^{+\infty}\frac{\overline{\chi}(n)}{n}+\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv2(\bmod 4)}}^{+\infty}\frac{2\overline{\chi}(n)}{n}\right)\\ &= \frac{\tau(\chi)}{\pi i}\left((1+\overline{\chi}(2))\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n)}{n}\right)=\frac{\tau(\chi)}{\pi i}\left(1+\overline{\chi}(2)\right)L(1,\overline{\chi}\chi_2^0),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{a\le\frac{q}{4}}\sum_{b\le\frac{q}{4}}H(2a\bar{b},q)\\ =\;&\frac{16}{\pi^4q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m|d}m\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi\bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\left(1+2\chi(2)+\chi(4)\right)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2.\end{aligned}$$

3 Dirichlet L - 函数的均值

引理 3.1 设整数 m, r 满足 $m\ge2$ 与 $(r,m)=1$, χ 为模 m 的 Dirichlet 特征. 则有恒等式

$$\sideset{}{^*}\sum_{\chi\bmod m}\chi(r)=\sum_{d|(m,r-1)}\mu\left(\frac{m}{d}\right)\phi(d)$$

和 $J(m)=\sum\limits_{d|m}\mu(d)\phi\left(\dfrac{m}{d}\right)$, 这里 $\sideset{}{^*}\sum\limits_{\chi\bmod m}$ 表示对模 m 的所有原特征求和, $J(m)$ 表示模 m 的原特征的个数.

证 见文献 [10] 中的引理 3.

引理 3.2 设 d 为奇数, $m|d$, $r(n)=\sum\limits_{t|n}\chi_d^0(t)$, 则有

$$\sum_{\substack{n=1\\ (n,2m)=1}}^{+\infty}\frac{r^2(n)}{n^2}=\frac{3\pi^4}{128}\prod_{p|d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right).$$

证 利用 Euler 乘积公式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\ (n,2m)=1}}^{+\infty}\frac{r^2(n)}{n^2} &= \prod_{p\nmid 2m}\left(1+\frac{r^2(p)}{p^2}+\frac{r^2(p^2)}{p^4}+\cdots\right)=\frac{27}{80}\prod_{p\nmid m}\left(1+\frac{r^2(p)}{p^2}+\frac{r^2(p^2)}{p^4}+\cdots\right)\\ &= \frac{27}{80}\prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{r^2(p)}{p^2}+\frac{r^2(p^2)}{p^4}+\cdots\right)\prod_{\substack{p|d\\ p\nmid m}}\left(1+\frac{r^2(p)}{p^2}+\frac{r^2(p^2)}{p^4}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{27}{80}\prod_{p\nmid d}\left(1+\frac{2^2}{p^2}+\frac{3^2}{p^4}+\cdots\right)\prod_{\substack{p\mid d\\ p\nmid m}}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)\\
&= \frac{27}{80}\prod_{p\nmid d}\frac{1+\frac{1}{p^2}}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^3}\prod_{\substack{p\mid d\\ p\nmid m}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{27\zeta^4(2)}{80\zeta(4)}\prod_{p\mid d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\\
&= \frac{3\pi^4}{128}\prod_{p\mid d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta 函数, 满足 $\zeta(2)=\frac{1}{6}\pi^2$, $\zeta(4)=\frac{1}{90}\pi^4$.

定理 3.1 设 d 为奇数, $m|d$, k 为给定的正整数, 则有

$$
\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2=\frac{3\pi^4}{256}J(m)\prod_{p\mid d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(m^{\epsilon}\right),
$$

$$
\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2^k)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2\ll m^{\epsilon}.
$$

证 考虑非负整数 k. 令 $A(y,\chi)=\sum\limits_{N<n\le y}\chi(n)r(n)$, 其中 N 为满足 $m\le N\le m^4$ 的参数, 且 $r(n)=\sum\limits_{t\mid n}\chi_d^0(t)$. 由 Abel 恒等式可得

$$
L(1,\chi\chi_{2d}^0)L(1,\chi\chi_2^0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi\chi_2^0(n)r(n)}{n}=\sum_{1\le n\le N}\frac{\chi\chi_2^0(n)r(n)}{n}+\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi\chi_2^0)}{y^2}dy.
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2^k)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2\\
=&\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}+\int_N^{\infty}\frac{A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\\
&\times\left(\sum_{1\le n_2\le N}\frac{\chi\chi_2^0(n_2)r(n_2)}{n_2}+\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\\
&=\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}\right)\left(\sum_{1\le n_2\le N}\frac{\chi\chi_2^0(n_2)r(n_2)}{n_2}\right)\\
&+\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}\right)\left(\int_N^{\infty}\frac{A(y,\chi\chi_2^0)}{y^2}dy\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&+\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_2\le N}\frac{\chi\chi_2^0(n_2)r(n_2)}{n_2}\right)\left(\int_N^\infty \frac{A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\\
&+\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)\left(\int_N^\infty \frac{A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\left(\int_N^\infty \frac{A(y,\chi\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\\
:=\ & M_1+M_2+M_3+M_4. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

首先估计 M_2, M_3 与 M_4. 注意到分拆恒等式

$$\begin{aligned}
A(y,\chi\chi_2^0) =\ & \sum_{n\le\sqrt{y}}\chi\chi_2^0(n)\sum_{s\le y/n}\chi\chi_{2d}^0(s)+\sum_{s\le\sqrt{y}}\chi\chi_{2d}^0(s)\sum_{n\le y/s}\chi\chi_2^0(n)\\
&-\sum_{n\le\sqrt{N}}\chi\chi_2^0(n)\sum_{s\le N/n}\chi\chi_{2d}^0(s)-\sum_{s\le\sqrt{N}}\chi\chi_{2d}^0(s)\sum_{n\le N/s}\chi\chi_2^0(n)\\
&-\left(\sum_{n\le\sqrt{y}}\chi\chi_2^0(n)\right)\left(\sum_{n\le\sqrt{y}}\chi\chi_{2d}^0(n)\right)+\left(\sum_{n\le\sqrt{N}}\chi\chi_2^0(n)\right)\left(\sum_{n\le\sqrt{N}}\chi\chi_{2d}^0(n)\right),
\end{aligned}$$

则有

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}|A(y,\chi\chi_2^0)|\ll y^{\frac12}m^{\frac32+\epsilon},\qquad \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}|A(y,\chi\chi_2^0)|^2\ll ym^{2+\epsilon}.$$

因此

$$\begin{aligned}
M_2 =\ & \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}\right)\left(\int_N^\infty \frac{A(y,\chi\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\\
\ll\ & \sum_{1\le n_1\le N} n_1^{\epsilon-1}\int_N^\infty\frac{1}{y^2}\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}|A(y,\chi\chi_2^0)|\right)dy\\
\ll\ & N^\epsilon\int_N^\infty\frac{m^{\frac32+\epsilon}}{y^{\frac32}}dy\ll\frac{m^{\frac32+\epsilon}}{N^{\frac12}}. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

同理可得

$$M_3\ll\frac{m^{\frac32+\epsilon}}{N^{\frac12}}. \qquad (3.3)$$

此外利用 Cauchy 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)\left(\int_N^\infty \frac{A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\left(\int_N^\infty \frac{A(y,\chi\chi_2^0)}{y^2}dy\right)\\
&\le \int_N^\infty\int_N^\infty \frac{1}{y^2z^2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} |A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)||A(z,\chi\chi_2^0)|dydz\\
&\ll \int_N^\infty\int_N^\infty \frac{1}{y^2z^2}\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} |A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)|^2\right)^{\frac12}\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} |A(z,\chi\chi_2^0)|^2\right)^{\frac12}dydz\\
&\ll \left(\int_N^\infty \frac{1}{y^2}\left(\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} |A(y,\overline{\chi}\chi_2^0)|^2\right)^{\frac12}dy\right)^2\\
&\ll \left(\int_N^\infty \frac{m^{1+\epsilon}}{y^{\frac32}}dy\right)^2 \ll \frac{m^{2+\epsilon}}{N}.
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

因此结合 (3.1)–(3.4) 式可得

$$
\begin{aligned}
&\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2\\
=& \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}\right)\left(\sum_{1\le n_2\le N}\frac{\chi\chi_2^0(n_2)r(n_2)}{n_2}\right)\\
&+O\left(\frac{m^{\frac32+\epsilon}}{N^{\frac12}}\right)+O\left(\frac{m^{2+\epsilon}}{N}\right)\\
=& M_1+O\left(\frac{m^{\frac32+\epsilon}}{N^{\frac12}}\right)+O\left(\frac{m^{2+\epsilon}}{N}\right).
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

设 $(a,m)=1$. 由引理 3.1 有

$$
\begin{aligned}
\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(a) &= \frac12\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m}(1-\chi(-1))\chi(a) = \frac12\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m}\chi(a)-\frac12\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod m}\chi(-a)\\
&= \frac12\sum_{s|(m,a-1)}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)-\frac12\sum_{s|(m,a+1)}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s).
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}} \chi(2^k)\left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\overline{\chi}\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}\right)\left(\sum_{1\le n_2\le N}\frac{\chi\chi_2^0(n_2)r(n_2)}{n_2}\right)\\
&= \left(\sum_{1\le n_1\le N}\frac{\chi_2^0(n_1)r(n_1)}{n_1}\right)\left(\sum_{1\le n_2\le N}\frac{\chi_2^0(n_2)r(n_2)}{n_2}\right)\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod m\\ \chi(-1)=-1}}\chi(2^k n_2\overline{n}_1)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le n_1\le N\\ (n_1,2m)=1}}\sum_{\substack{1\le n_2\le N\\ (n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\sum_{s|(m,2^kn_2\overline{n}_1-1)}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{\substack{1\le n_1\le N\\ (n_1,2m)=1}}\sum_{\substack{1\le n_2\le N\\ (n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\sum_{s|(m,2^kn_2\overline{n}_1+1)}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le N\\ (n_1,2m)=1\\ 2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{1\le n_2\le N\\ (n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le N\\ (n_1,2m)=1\\ 2^kn_2\equiv -n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{1\le n_2\le N\\ (n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\\
&:= M_{11}-M_{12}.
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

注意到估计式 $r(n)\ll n^{\epsilon}$. 利用剩余系的性质可得

$$
\begin{aligned}
M_{12} &\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le N\\ (n_1,2m)=1\\ 2^kn_2\equiv -n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{1\le n_2\le N\\ (n_2,2m)=1}}\frac{1}{n_1\cdot 2^kn_2}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{0\le r_1\le \frac{N}{s}-1}\sum_{l_1=1}^{s-1}\sum_{\substack{0\le r_2\le \frac{2^kN}{s}-1\\ r_2s+l_2\equiv -(r_1s+l_1)(\bmod s)}}\sum_{l_2=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1s+l_1)(r_2s+l_2)}\\
&= N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{0\le r_1\le \frac{N}{s}-1}\sum_{0\le r_2\le \frac{2^kN}{s}-1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1s+l)(r_2s+s-l)}\\
&= N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{0\le r_1\le \frac{N}{s}-1}\sum_{1\le r_2\le \frac{2^kN}{s}}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1s+l)(r_2s-l)}\\
&= N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{0\le r_1\le \frac{N}{s}-1}\sum_{1\le r_2\le \frac{2^kN}{s}}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1+r_2)s}\left(\frac{1}{r_1s+l}+\frac{1}{r_2s-l}\right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{0\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}}\frac{1}{r_1+r_2}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{r_1s+l}\\
&\quad+N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{0\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}}\frac{1}{r_1+r_2}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{r_2s-l}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}}\frac{1}{r_2}\sum_{0\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{r_1s+l}\\
&\quad+N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{0\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\frac{1}{r_1+1}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{r_2s-l}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}}\frac{1}{r_2}\sum_{1\le n_1\le N}\frac{1}{n_1}+N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{0\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\frac{1}{r_1+1}\sum_{1\le n_2\le 2^kN}\frac{1}{n_2}\\
&\ll N^{\epsilon}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

现在考虑 M_{11}. 把对 n_1 和 n_2 的求和式分成下列四种情况讨论

(i) $s\le n_1\le N$, $\frac{s-1}{2^k}+1\le n_2\le N$;

(ii) $s\le n_1\le N$, $1\le n_2\le\frac{s-1}{2^k}$;

(iii) $1\le n_1\le s-1$, $\frac{s-1}{2^k}+1\le n_2\le N$;

(iv) $1\le n_1\le s-1$, $1\le n_2\le\frac{s-1}{2^k}$.

不难证明

$$\begin{aligned}
&\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{s\le n_1\le N\\(n_1,2m)=1}}\sum_{\substack{\frac{s-1}{2^k}+1\le n_2\le N\\(n_2,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{\substack{s\le n_1\le N\\(n_1,2m)=1}}\sum_{\substack{\frac{s-1}{2^k}+1\le n_2\le N\\(n_2,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\frac{1}{n_1\cdot 2^kn_2}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\sum_{l_1=1}^{s-1}\sum_{\substack{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}-1\\r_2s+l_2\equiv r_1s+l_1(\bmod s)}}\sum_{l_2=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1s+l_1)(r_2s+l_2)}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}-1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1s+l)(r_2s+l)}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\frac{1}{r_1s}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}-1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{r_2s+l}\\
&\ll N^{\epsilon}\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\frac{1}{r_1}\sum_{1\le n_2\le 2^kN}\frac{1}{n_2}\ll N^{\epsilon}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

此外还有

$$\begin{aligned}
&\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{s\le n_1\le N\\(n_1,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{1\le n_2\le\frac{s-1}{2^k}\\(n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\ll N^\epsilon\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{\substack{s\le n_1\le N\\(n_1,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{1\le n_2\le\frac{s-1}{2^k}\\(n_2,2m)=1}}\frac{1}{n_1\cdot 2^kn_2}\\
\ll\ & N^\epsilon\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{\substack{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1\\2^kn_2\equiv r_1s+l_1(\bmod s)}}\sum_{l_1=1}^{s-1}\sum_{1\le n_2\le\frac{s-1}{2^k}}\frac{1}{(r_1s+l_1)\cdot 2^kn_2}\\
\ll\ & N^\epsilon\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(r_1s+l)l}\ll N^\epsilon\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{1\le r_1\le\frac{N}{s}-1}\frac{1}{r_1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{l}\\
\ll\ & N^\epsilon,
\end{aligned}\tag{3.9}$$

以及

$$\begin{aligned}
&\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le s-1\\(n_1,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{\frac{s-1}{2^k}+1\le n_2\le N\\(n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}\\
\ll\ & N^\epsilon\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le s-1\\(n_1,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{\frac{s-1}{2^k}+1\le n_2\le N\\(n_2,2m)=1}}\frac{1}{n_1\cdot 2^kn_2}\\
\ll\ & N^\epsilon\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le s-1\\r_2s+l_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}-1}\sum_{l_2=1}^{s-1}\frac{1}{n_1(r_2s+l_2)}\\
\ll\ & N^\epsilon\sum_{s|m}\phi(s)\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}-1}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{l(r_2s+l)}\\
\ll\ & N^\epsilon\sum_{s|m}\frac{\phi(s)}{s}\sum_{1\le r_2\le\frac{2^kN}{s}-1}\frac{1}{r_2}\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{l}\ll N^\epsilon.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

结合 (3.5)–(3.10) 式可得

$$\begin{aligned}
&\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi\bmod m\\\chi(-1)=-1}}\chi(2^k)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2\\
=\ & \frac{1}{2}\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{1\le n_1\le s-1\\(n_1,2m)=1\\2^kn_2\equiv n_1(\bmod s)}}\sum_{\substack{1\le n_2\le\frac{s-1}{2^k}\\(n_2,2m)=1}}\frac{r(n_1)r(n_2)}{n_1n_2}+O\left(\frac{m^{\frac{3}{2}+\epsilon}}{N^{\frac{1}{2}}}\right)+O\left(\frac{m^{2+\epsilon}}{N}\right)+O\left(N^\epsilon\right).
\end{aligned}$$

当 $k \geq 1$ 时, 取 $N = m^3$, 有

$$\sum_{\substack{\chi \bmod m \\ \chi(-1)=-1}}^{*} \chi(2^k)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2 \ll m^{\epsilon}.$$

而当 $k = 0$ 时, 取 $N = m^3$, 并利用引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\chi \bmod m \\ \chi(-1)=-1}}^{*} |L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{1\leq n\leq s-1 \\ (n,2m)=1}}\frac{r^2(n)}{n^2} + O\left(m^{\epsilon}\right) \\
=\ & \frac{1}{2}\sum_{s|m}\mu\left(\frac{m}{s}\right)\phi(s)\sum_{\substack{n=1 \\ (n,2m)=1}}^{+\infty}\frac{r^2(n)}{n^2} + O\left(m^{\epsilon}\right) \\
=\ & \frac{1}{2}J(m)\cdot\frac{3\pi^4}{128}\prod_{p|d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + O\left(m^{\epsilon}\right) \\
=\ & \frac{3\pi^4}{256}J(m)\prod_{p|d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + O\left(m^{\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

4 定理 1.1 的证明

由定理 2.1 与定理 3.1 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\leq\frac{q}{4}}\sum_{b\leq\frac{q}{4}}H(2a\bar{b},q) \\
=\ & \frac{16}{\pi^4 q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m|d}m\sum_{\substack{\chi \bmod m \\ \chi(-1)=-1}}^{*}\left(1+2\chi(2)+\chi(4)\right)|L(1,\chi\chi_{2d}^0)|^2|L(1,\chi\chi_2^0)|^2 \\
=\ & \frac{16}{\pi^4 q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\sum_{m|d}m\left(\frac{3\pi^4}{256}J(m)\prod_{p|d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(m^{\epsilon}\right)\right) \\
=\ & \frac{3}{16q}\sum_{d|q}\frac{d^2}{\phi(d)}\prod_{p|d}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^2}{1+\frac{1}{p^2}}\sum_{m|d}mJ(m)\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O\left(q^{1+\epsilon}\right) \\
=\ & \frac{3}{16}q^2\prod_{p^\alpha\|q}\frac{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^{3\alpha}}-\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}-\frac{1}{p^{3\alpha}}\right)\right)}{\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)}+O\left(q^{1+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

这就证明了定理 1.1.

参 考 文 献

[1] 陈国慧, 刘宝利. 关于 Dedekind 和的一些恒等式 [J]. 数学杂志, 2014, 34(2): 198–204.

[2] Rademacher H. Dedekind sums [M]. Washington: Math. Assoc. Amer., 1972.

[3] Apostol T M. Modular function and Dirichlet series in number theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] Berndt B C. Analytic Eisenstein series, theta-functions, and series relations in the spirit of Ramanujan [J]. J. Reine Angew. Math., 1978, 303/304: 332–365.

[5] Sitaramachandrarao R. Dedekind and Hardy sums [J]. Acta Arith., 1987, 48(4): 325–340.

[6] Xu Z, Zhang W. The mean value of Hardy sums over short intervals [J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 2007, 137(4): 885–894.

[7] Liu W. Mean value of Hardy sums over short intervals [J]. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), 2012, 28(1): 1–11.

[8] Zhang W. On the mean values of Dedekind Sums [J]. J. Théor. Nombres Bordeaux, 1996, 8(2): 429–442.

[9] Pólya G. Über die verteilung der quadratischen reste and nicht-reste [J]. Göttingen Nachrichten, 1918: 21–29.

[10] Zhang W. On a Cochrane sum and its hybrid mean value formula [J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 267(1): 89–96.

ON THE MEAN VALUE OF HARDY SUM WITH COMPOSITE MODULI

WANG Xiao-ying, YUE Xia-xia, LIU Hua-ning

(*School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

Abstract: In this paper, the mean value of Hardy sum in short interval is studied. By using the mean value theorems of Dirichlet L-functions, we give some asymptotic formula for the mean value of Hardy sum with composite moduli, which generalizes the property of Hardy sum with prime moduli.

Keywords: Hardy sum; Dirichlet L-function; mean value; asymptotic formula

2010 MR Subject Classification: 11F20