Vol. 37 (2017)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

两类二元函数芽的一个共同性质及其应用

熊宗洪[1], 石昌梅[2], 甘文良[3]

(1. 贵州民族大学理学院, 贵州 贵阳 550025)
(2. 贵州师范学院数学与计算机科学学院, 贵州 贵阳 550018)
(3. 东北师范大学数学与统计学院, 吉林 长春 130024)

摘 要: 本文主要研究二元 C^∞ 函数芽环中函数芽的性质问题. 利用 Mather 有限决定性定理和 C^∞ 函数的右等价关系, 获得了带有任意 4 次至 k 次齐次多项式 $p_i(x,y), q_i(x,y)$ $(i=4,5,\cdots,k)$ 的两类函数芽 $f_1 = x^2y+\sum\limits_{i=4}^{k}p_i(x,y)$, $f_2 = xy^2+\sum\limits_{i=4}^{k}q_i(x,y)$ $(k\geq 5)$ 的一个共同性质: 若 $M_2^k\subset M_2J(f_j)$ $(j=1,2)$ 且 f_1,f_2 的轨道切空间的余维分布均为 $c_i=1$ $(i=4,5,\cdots,k-1)$, 则对这里的 i, $p_i(x,y)$ 中 xy^{i-1},y^i 的系数和 $q_i(x,y)$ 中 $x^{i-1}y,x^i$ 的系数均为零. 最后, 利用该性质, 给出了 f_1,f_2 和一类余维数为 7 的二元函数芽的标准形式.

关 键 词: 二元函数芽; 有限决定性; 共同性质; 标准形式; 余维 7
MR(2010) **主题分类号:** 57R45 **中图分类号:** O186.16
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)05-1087-06

1 引言及准备

设 $f\in M_2^3\subset E_2$, 则 f 的轨道切空间 $M_2J(f)\subset M_2^3$, 并考虑理想的序列套

$$E_2\supset M_2\supset M_2^2\supset M_2^3\supset M_2^4+M_2J(f)\supset\cdots\supset M_2^k+M_2J(f)\supset\cdots. \tag{I}$$

设 $c_k(k\geq 0)$ 为 $M_2^{k+1}+M_2J(f)$ 在 $M_2^k+M_2J(f)$ 中的余维数, 易见 c_0,c_1,c_2 分别为 1, 2, 3. 由文献 [1], $c_3=1$ 意味着 j^3f 右等价于标准型函数芽 x^2y.

文 [2] 研究了一类二元函数芽的特殊性质: 设芽 $A(x,y)=x^2y+p(x,y)$, 其中 $p(x,y)\in P_2^4$, 则 $M_2^4\subset M_2J(A)$ 等价于 $p(x,y)$ 中 y^4 项的系数不为零. 若将 A 放入序列套 (I) 中考虑, A 的轨道切空间 $M_2J(A)$ 有余维分布 $c_3=1,c_4=0$, 且这与 A 的性质有着紧密的联系. 受这一事实的启迪, 今考虑两类二元函数芽 $f_1=x^2y+\sum\limits_{i=4}^{k}p_i(x,y), f_2=xy^2+\sum\limits_{i=4}^{k}q_i(x,y)$ $(k\geq 5)$, 其中 $p_i(x,y),q_i(x,y)\in P_2^i, i=4,5,\cdots,k$. 若 $M_2^k\subset M_2J(f_j)$ $(j=1,2)$ 且 f_1,f_2 的轨道切空间与 A 的轨道切空间有类似的余维分布, 阐述了 f_1,f_2 的共同性质, 进一步, 给出了 f_1,f_2 的应用.

E_n 表示在 $O\in\mathbb{R}^n$ 处的 C^∞ 函数芽环; M_n 是 E_n 中的唯一极大理想; M_n^k 是 M_n 的 k 次幂; P_n^k 是 k 次齐次多项式全体构成的实向量空间; j^kf 是 f 的 k 阶 Taylor 多项式.

定义 1.1 设 $f,g\in E_n$, 若存在一个微分同胚 $\phi\in L_n$ (为点 $O\in\mathbb{R}_n$ 处的局部微分同胚群), 使得 $g=f\circ\phi$. 则称芽 f 与 g 是右等价的.

*收稿日期: 2016-01-04 接收日期: 2016-03-28

基金项目: 贵州省科技厅联合基金资助 (黔科合 LH 字 [2014]7378); 贵州省数学建模及应用创新人才团队项目基金资助 (黔教科研发 [2013]405 号).

作者简介: 熊宗洪 (1982–), 男, 苗族 , 贵州思南, 讲师, 主要研究方向: 奇点理论.

定义 1.2 [2] $f \in E_n$ 称为有限 k - 决定的是指每一个与 f 有相同 k 阶 Taylor 多项式的芽 g 是右等价于 f 的.

引理 1.3 [3] (Nakayama 引理) 设 I 是 E_n 中的有限生成理想, 则 $M_n^k \subset I$ 等价于 $M_n^k \subset I + M_n^{k+1}$.

引理 1.4 [2–5] (Mather 定理) 若 $M_n^k \subset M_n J(f)$, 则 f 是 k - 决定的, 其中 $J(f)$ 是由 f 关于各变元的偏导数在 E_n 中生成的 Jacobi 理想.

引理 1.5 [4] 设 $f(x) \in E_n$, 对于任意给定的局部微分同胚 ϕ, 则 $M_n^k \subset M_n^k J(f)$ 等价于 $M_n^k \subset M_n^k J(f \circ \phi)$ (证明思路见文 [4] p.76–77).

由引理 1.4, 1.5, 若 f 是 k - 决定的, 则凡是与 f 右等价的函数芽也是 k - 决定的.

2 两类函数芽的共同性质

若序列套 (I) 对某一自然数 k, 有 $c_k = 0$, 则 $M_2^k + M_2 J(f) = M_2^{k+1} + M_2 J(f)$. 由引理 1.3, 有 $M_2^k \subset M_2 J(f)$, 再由引理 1.4, f 是 k - 决定的.

定理 2.1 设两类二元函数芽 $f_1 = x^2 y + \sum\limits_{i=4}^{k} p_i(x,y), f_2 = xy^2 + \sum\limits_{i=4}^{k} q_i(x,y)$ $(k \geq 5)$, 并考虑序列套 (I). 若 $M_2^k \subset M_2 J(f_j)$ $(j = 1,2)$ 且 f_1, f_2 的轨道切空间的余维分布均为 $c_i = 1$ $(i = 4,5,\cdots,k-1)$, 则对这里的 i, $p_i(x,y)$ 中 xy^{i-1}, y^i 的系数和 $q_i(x,y)$ 中 $x^{i-1}y, x^i$ 的系数均为零, 其中 $p_i(x,y), q_i(x,y) \in P_2^i, i = 4,5,\cdots,k$.

证 现仅就 f_1 对 k 作归纳证明, f_2 类似可证.

(i) 当 $k=5$ 时, 有 $c_4 = 1$, $f_1 = x^2y + p_4(x,y) + p_5(x,y)$, 其中 $p_4(x,y) \in P_2^4$, $p_5(x,y) \in P_2^5$. 由条件 $M_2^5 \subset M_2 J(f_1)$ 及引理 1.4 知 f_1 是 5 - 决定的.

往证: 由 $c_4 = 1$ 可推出 $p_4(x,y)$ 中 xy^3, y^4 的系数为零. 事实上, 因为 $c_4 = 1$, 即

$$\dim_{\mathbb{R}}[(M_2^4 + M_2 J(f_1))/(M_2^5 + M_2 J(f_1))] = \dim_{\mathbb{R}}[P_2^4/(P_2^4 \cap j^4(M_2 J(f_1)))] = 1,$$

而

$$M_2 J(f_1) = [2x^2y + x\sum_{i=4}^{5}\frac{\partial p_i}{\partial x}, 2xy^2 + y\sum_{i=4}^{5}\frac{\partial p_i}{\partial x}, x^3 + x\sum_{i=4}^{5}\frac{\partial p_i}{\partial y}, x^2y + y\sum_{i=4}^{5}\frac{\partial p_i}{\partial y}]_{E_2}.$$

容易计算得到 $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3 \in M_2 J(f_1) + M_2^5$, 从而实向量空间

$$\mathbb{R}\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3\} \subset P_2^4 \cap M_2 J(f_1) \subset P_2^4 \cap j^4(M_2 J(f_1)).$$

又因为 $P_2^4 = \mathbb{R}\{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$ 及 $\dim_{\mathbb{R}}[P_2^4/(P_2^4 \cap j^4(M_2 J(f_1)))] = 1$, 故 $P_2^4/(P_2^4 \cap j^4(M_2 J(f_1))) = \mathbb{R}\{y^4\}$. 因此 P_2^4 中的基元 $y^4 \notin P_2^4 \cap j^4(M_2 J(f_1))$.

注意到理想 $M_2 J(f_1)$ 的元素 $x^2y + y\sum\limits_{i=4}^{5}\frac{\partial p_i}{\partial y}$ 的四次齐次部分 $y\frac{\partial p_4}{\partial y}$ 在 $P_2^4 \cap j^4(M_2 J(f_1))$ 中. 现用反证法证明 $p_4(x,y)$ 中 y^4 项的系数为 0, 今假设任意四次齐次多项式 $p_4(x,y) = a_1x^4 + a_2x^3y + a_3x^2y^2 + a_4xy^3 + a_5y^4$ 中系数 $a_5 \neq 0$, 从而

$$y\frac{\partial p_4}{\partial y} = a_2x^3y + 2a_3x^2y^2 + 3a_4xy^3 + 4a_5y^4,\ a_5 \neq 0,$$

于是

$$y^4=\frac{1}{4a_5}\{y\frac{\partial p_4}{\partial y}-(a_2x^3y+2a_3x^2y^2+3a_4xy^3)\}. \tag{2.1}$$

因为 $y\frac{\partial p_4}{\partial y}\in P_2^4\cap j^4(M_2J(f_1))$ 及 $a_2x^3y+2a_3x^2y^2+3a_4xy^3\in\mathbb{R}\{x^4,x^3y,x^2y^2,xy^3\}\subset P_2^4\cap j^4(M_2J(f_1))$, 而 $P_2^4\cap j^4(M_2J(f_1))$ 是一实个向量空间. 于是由 (2.1) 式得 $y^4\in P_2^4\cap j^4(M_2J(f_1))$, 这与前面的事实不符. 故 $p_4(x,y)$ 中不含有 y^4 项, 即 $p_4(x,y)$ 中 y^4 项的系数为 0.

同理, 对元素 $2xy^2+y\sum\limits_{i=4}^{5}\frac{\partial p_i}{\partial x}$ 作类似讨论, 得 $p_4(x,y)$ 中 xy^3 项的系数为 0.

目前已证得: 由 $c_4=1$ 推出了 $p_4(x,y)$ 中 xy^3 和 y^4 项的系数为 0, 从而 f_1 简化为下列形式的芽: $f_1=x^2y+x^2p_4'(x,y)+p_5(x,y)$, 其中 $p_4'(x,y)\in P_2^2$, $p_5(x,y)\in P_2^5$.

(ii) 假设 f_1 对一切小于或等于 m $(\le k-1)$ 的情况成立, 此时 $c_4=\cdots=c_{m-1}=1$ 且 f_1 是 m - 决定的, 于是 f_1 简化为下列形式的芽 $f_1=x^2y+x^2\sum\limits_{i=4}^{m-1}p_i'(x,y)+p_m(x,y)$, 其中 $p_i'(x,y)\in P_2^{i-2}, i=4,5,\cdots,m-1, p_m(x,y)\in P_2^m$.

今要证 f_1 对 $m+1(\le k-1)$ 的情形也成立, 此时 $c_4=\cdots=c_m=1$ 且 f_1 是 $m+1$ 决定的, 并由假设 f_1 可以简化为 $f_1=x^2y+x^2\sum\limits_{i=4}^{m-1}p_i'(x,y)+p_m(x,y)+p_{m+1}(x,y)$, 其中 $p_i'(x,y)\in P_2^{i-2}, i=4,5,\cdots,m-1$, $p_j(x,y)\in P_2^j, j=m,m+1$.

往证: 由 $c_m=1$ 推出 $p_m(x,y)$ 中 xy^{m-1} 和 y^m 的系数为 0. 因为 $c_m=1$, 即

$$\dim_{\mathbb{R}}[(M_2^m+M_2J(f_1))/(M_2^{m+1}+M_2J(f_1))]=\dim_{\mathbb{R}}[P_2^m/(P_2^m\cap j^m(M_2J(f_1)))]=1,$$

而

$$M_2J(f_1)=[2x^2y+xg_1,2xy^2+yg_1,x^3+xg_2,x^2y+yg_2]_{E_2},$$

其中 $g_1=\sum\limits_{i=4}^{m-1}(2xp_i'+x^2\frac{\partial p_i'}{\partial x})+\sum\limits_{j=m}^{m+1}\frac{\partial p_j}{\partial x}, g_2=x^2\sum\limits_{i=4}^{m-1}\frac{\partial p_i'}{\partial y}+\sum\limits_{j=m}^{m+1}\frac{\partial p_j}{\partial y}$.

容易计算得 $x^m,x^{m-1}y,\cdots,xy^{m-1}\in M_2J(f_1)+M_2^{m+1}$, 从而实向量空间

$$\mathbb{R}\{x^m,x^{m-1}y,\cdots,xy^{m-1}\}\subset P_2^m\cap M_2J(f_1)\subset P_2^m\cap j^m(M_2J(f_1)).$$

又因为 $P_2^m=\mathbb{R}\{x^m,x^{m-1},\cdots,y^m\}$ 及 $\dim_{\mathbb{R}}[P_2^m/(P_2^m\cap j^m(M_2J(f_1)))]=1$, 所以 $P_2^m/(P_2^m\cap j^m(M_2J(f_1)))=\mathbb{R}\{y^m\}$. 因此, $y^m\notin P_2^m\cap j^m(M_2J(f_1))$.

因为元素 $2xy^2+yg_1\in M_2J(f_1)$ 的 m 次齐次部分 $y\frac{\partial p_m}{\partial x}$ 在 $P_2^m\cap j^m(M_2J(f_1))$ 中. 若 $p_m(x,y)$ 中含有 xy^{m-1}, 即 $p_m(x,y)=a_1x^m+a_2x^{m-1}y+\cdots+a_{m+1}y^m$ 中 $a_m\ne 0$, 则

$$y\frac{\partial p_m}{\partial x}=ma_1x^{m-1}y+(m-1)a_2x^{m-2}y^2+\cdots+a_my^m, a_m\ne 0,$$

于是

$$y^m=\frac{1}{a_m}\{y\frac{\partial p_m}{\partial x}-(ma_1x^{m-1}y+(m-1)a_2x^{m-2}y^2+\cdots+2a_{m-1}xy^{m-1})\}. \tag{2.2}$$

因为 $y\frac{\partial p_m}{\partial x} \in P_2^m \cap j^m(M_2J(f_1))$ 及 $ma_1x^{m-1}y+(m-1)a_2x^{m-2}y^2+\cdots+2a_{m-1}xy^{m-1} \in \mathbb{R}\{x^m, x^{m-1}y, \cdots, xy^{m-1}\} \subset P_2^m \cap j^m(M_2J(f_1))$, 而 $P_2^m \cap j^m(M_2J(f_1))$ 是一个实向量空间. 于是, 由 (2.2) 式有 $y^m \in P_2^m \cap j^m(M_2J(f_1))$, 矛盾. 故 $p_m(x,y)$ 中不含有 xy^{m-1}, 即 $p_m(x,y)$ 中 xy^m 项的系数为 0.

类似讨论 $M_2J(f_1)$ 中的元素 x^2y+yg_2 将得出 $p_m(x,y)$ 中 y^m 项的系数为 0.

因此由 $c_m=1$ 可以推出 $p_m(x,y)$ 中 xy^{m-1} 和 y^m 项的系数为 0. 由数学归纳法原理, 此定理成立. 证毕

3 两类函数芽的应用

定理 3.1 设 f_1, f_2 如定理 2.1 所假设且具有定理 2.1 的性质, 则 f_1, f_2 分别右等价于标准函数芽 $x^2y \pm y^k$ 和 $xy^2 \pm x^k$, 其中“$\pm$” 依赖于 f_1 中 y^k (f_2 中 x^k) 项的系数符号.

证 现仅就 f_1 求出标准形式, f_2 的标准形式类似可求.

由定理 2.1, 有限 k - 决定的芽 f_1 简化为 $h(x,y)=x^2y+x^2\sum\limits_{i=4}^{k-1}p'_i(x,y)+p_k(x,y)$, 其中 $p'_i(x,y) \in P_2^{i-2}(i=4,5,\cdots,k-1), p_k(x,y) \in P_2^k$, 且 $h(x,y)$ 是 k - 决定的. 对 $h(x,y)$ 作坐标变换 $\phi(x,y)=(x, y-\sum\limits_{i=4}^{k-1}p'_i)$, 得

$$
\begin{aligned}
h\circ\phi(x,y) &= x^2(y-\sum_{i=4}^{k-1}p'_i)+x^2\sum_{j=4}^{k-1}p'_j(x,y-\sum_{i=4}^{k-1}p'_i)+p_k(x,y-\sum_{i=4}^{k-1}p'_i) \\
&= x^2y-x^2\sum_{i=4}^{k-1}p'_i+x^2\sum_{i=4}^{k-1}[p'_i(x,y)+r'_i(x,y)]+p_k(x,y)+R_1(x,y) \\
&= x^2y+x^2\sum_{i=4}^{k-1}r'_i(x,y)+p_k(x,y)+R_1(x,y),
\end{aligned}
$$

其中 $r'_i(x,y) \in M_2^{i-1}(i=4,5,\cdots,k-1), R_1(x,y) \in M_2^{k+1}$.

对于 $\sum\limits_{i=4}^{k-1}r'_i \in M_2^3$, 存在 $\eta_{1i}(x,y) \in P_2^i(i=3,4,\cdots,k-3), s_1(x,y) \in M_2^{k-2}$, 使得 $\sum\limits_{i=4}^{k-1}r'_i = \sum\limits_{i=3}^{k-3}\eta_{1i}(x,y)+s_1(x,y)$. 于是

$$
\begin{aligned}
h\circ\phi(x,y) &= x^2y+x^2[\sum_{i=3}^{k-3}\eta_{1i}(x,y)+s_1(x,y)]+p_k(x,y)+R_1(x,y) \\
&= x^2y+x^2\sum_{i=3}^{k-3}\eta_{1i}(x,y)+\xi_1(x,y)+R_{11}(x,y),
\end{aligned}
$$

其中 $\xi_1(x,y)=j^k(x^2s(x,y))+p_k(x,y) \in P_2^k, R_{11}(x,y) \in M_2^{k+1}$.

由引理 1.4–1.5 知 $h\circ\phi$ 也是 k - 决定的, 故存在微分同胚 $\varphi(x,y)$, 使得

$$
(h\circ\phi)\circ\varphi = j^k[h\circ\phi(x,y)] = x^2y+x^2\sum_{i=3}^{k-3}\eta_{1i}+\xi_1(x,y)=h_1.
$$

观察到 h 中和式的第一项 $p'_4 \in P_2^2$, 而 h_1 中和式的第一项 $\eta_{13} \in P_2^3$, 这相当于 h_1 是从 h 的和式中去掉了二次齐次多项式部分后而得到的, 这也是施行坐标变换 $\phi(x,y)=(x,y-\sum\limits_{i=4}^{k-1}p'_i)$ 的结果. 为了逐步从 h_1 的和式中去掉 3 次至 $k-3$ 次齐次多项式部分, 今对 h_1 依次施行坐标变换 $\phi_i(x,y)=(x,y-\sum\limits_{j=i+2}^{k-3}\eta_{ij}(x,y))$, 其中 $\eta_{ij}(x,y)\in P_2^j, j=i+2, i=1,2,\cdots,k-5$, 又 h_1 是 k - 决定的 (由引理 1.4–1.5, 凡是与 h 右等价的芽也是 k - 决定的), 从而依次得到与 h_1 右等价的芽 $h_i(x,y)=x^2y+x^2\sum\limits_{j=i+2}^{k-3}\eta_{ij}(x,y)+\xi_i(x,y), i=2,3,\cdots,k-4$. 注意到 $h_{k-4}=x^2y+\xi_{k-4}(x,y)$, 其中 $\xi_{k-4}(x,y)\in P_2^k$, 它是由 h 施行若干次坐标变换而得到的, 且它是 k - 决定的. 将 h_{k-4} 改写为 $h_{k-4}=x^2y+x^2Q(x,y)+axy^{k-1}+by^k$, 其中 $a,b\in\mathbb{R}, Q(x,y)\in P_2^{k-2}$. 继续对 h_{k-4} 施行坐标变换 $\phi_{k-4}(x,y)=(x-\frac{a}{2}y^{k-2}, y-Q)$, 得

$$\begin{aligned}h_{k-4}\circ\phi_{k-4}=&(x-\frac{a}{2}y^{k-2})^2(y-Q)+(x-\frac{a}{2}y^{k-2})^2\cdot Q(x-\frac{a}{2}y^{k-2},y-Q)\\&+a(x-\frac{a}{2}y^{k-2})(y-Q)^{k-1}+b(y-Q)^k\\=&(x^2-axy^{k-2}+\frac{a^2}{4}y^{2k-4})(y-Q)+(x^2-axy^{k-2}+\frac{a^2}{4}y^{2k-4})\\&\cdot[Q(x,y)+\varepsilon_1(x,y)]+axy^{k-1}+by^k+\varepsilon_2(x,y)\\=&x^2y+by^k+\varepsilon_3(x,y),\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1(x,y)\in M_2^{k-1}, \varepsilon_2(x,y), \varepsilon_3(x,y)\in M_2^{k+1}$.

因为 h_{k-4} 是 k - 决定的, 则 $x^2y+by^k+\varepsilon_3$ 也是 k - 决定的, 故有 $\phi_{k-3}\in L_2$, 使得

$$\{x^2y+by^k+\varepsilon_3\}\circ\phi_{k-3}=j^k\{x^2y+by^k+\varepsilon_3\}=x^2y+by^k.$$

综上所述, $h(x,y)$ 右等于 x^2y+by^k, 且 $b\neq 0$ (若否, 可得出 $h(x,y)$ 是余维无限的芽这一矛盾的结果), 并对 x^2y+by^k 做坐标变换 $\phi_{k-2}(x,y)=(|b|^{\frac{1}{2k}}x, |b|^{\frac{-1}{k}}y)$, 得

$$(x^2y+by^k)\circ\phi_{k-2}=\left(|b|^{\frac{1}{2k}}x\right)^2\cdot\left(|b|^{\frac{-1}{k}}y\right)+b\left(|b|^{\frac{-1}{k}}y\right)^k=x^2y\pm y^k.$$

由右等价关系的传递性知 $h(x,y)$ 右等价于标准函数芽 $x^2y\pm y^k$, 即 f_1 右等价于标准函数芽 $x^2y\pm y^k$, 其中"±" 依赖于 f_1 中 y^k 项的系数符号.

定理 3.2 函数芽 $xy^2\pm x^k$ 右等于 $x^2y\pm y^k$.

证 只需考虑线性同胚 $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\to(y,x)$ 即可.

这样一来, 由定理 2.1 和定理 3.1 知 f_1 和 f_2 均右等价于标准函数芽 $x^2y\pm y^k$.

定理 3.3 设 $f(x,y)\in M_2^3$ 是余维数为 7 的二元函数芽且其轨道切空间的余维分布为 $c_3=c_4=c_5=1, c_6=0$, 则 $f(x,y)$ 的标准形式为 $x^2y\pm y^6$, 其中 "±" 依赖于 f 中 y^6 项的系数符号.

证 对 $f(x,y)\in M_2^3$ 考虑序列套 (I) 式及 $c_3=1$, 则 $f(x,y)$ 右等价于 $x^2y+r_1(x,y)$, 其中 $r_1(x,y)\in M_2^4$. 又由 $c_6=0$ 知, $f(x,y)$ 是 6 - 决定的, 从而 $x^2y+r(x,y)$ 也是 6 - 决定的, 于是它右等价于 $h(x,y)=x^2y+\sum\limits_{i=4}^{6}p_i(x,y), p_i(x,y)\in P_2^i, i=4,5,6$. 这样一来, $f(x,y)$ 右等

价于 $h(x,y)$. 又 $c_4=c_5=1$ 及定理 2.1, $h(x,y)$ 可以简化为下列形式的芽

$$x^2y+x^2p_4'(x,y)+x^2p_5'(x,y)+p_6(x,y), p_4'\in P_2^2, p_5'\in P_2^3, p_6\in P_2^6.$$

再依定理 3.1, $x^2y+x^2p_4'(x,y)+x^2p_5'(x,y)$ 右等价于标准函数芽 $x^2y\pm y^6$, 即 $h(x,y)$ 的标准形式为 $x^2y\pm y^6$, 于是 $f(x,y)$ 的标准形式为 $x^2y\pm y^6$, 其中"±"依赖于 f 中 y^6 项的系数符号.

参 考 文 献

[1] 石昌梅, 岑丽辉. 余秩是 2 余维数为 6 的光滑实函数芽的分类 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(8): 253–260.

[2] Martinet J N. Singularities of smooth function and maps[M]. London Math. Soc. Lec. Note Ser. 58, Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[3] Brocker T H. Differentiable germs and catastrophes[M]. London Math. Soc. Lec. Note Ser. 17, Cambridge: Cambridge Press, 1975.

[4] 李养成. 光滑映射的奇点理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[5] 岑燕明. 高阶 Morse 芽的存在性 [J]. 数学杂志, 2006, 26(3): 283–286.

A COMMON PROPERTY OF TWO TYPES OF FUNCTION GERMS WITH TWO VARIABLES AND THEIR APPLICATIONS

XIONG Zong-hong[1], SHI Chang-mei[2], GAN Wen-liang[3]

(*1.School of Science, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China*)

(*2.School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal College, Guiyan 550018, China*)

(*3.School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China*)

Abstract: In this paper, we mainly consider a property of function germs in the ring of C^∞ functions germs of two variables. Using the Mather's theorem of finite determinacy and right equivalence of functions, a common property of two types of function germs $f_1=x^2y+\sum\limits_{i=4}^{k}p_i(x,y)$ and $f_2=xy^2+\sum\limits_{i=4}^{k}q_i(x,y)(k\geq 5)$ with some arbitrary homogeneous polynomials $p_i(x,y)$ and $q_i(x,y)(i=4,5,\cdots,k)$ of degree from 4 to k is obtained. If $M_2^k\subset M_2J(f_j)(j=1,2)$ and the codimension distribution of tangent space of orbits for f_1,f_2 are both $c_i=1(i=4,5,\cdots,k-1)$, the coefficients of xy^{i-1} and y^i in $p_i(x,y)$ are both zero, so are the coefficients of $x^{i-1}y$ and x^i in $q_i(x,y)$. Finally, by this property, the normal forms of f_1,f_2 and a class of function germs of two variables with codimension 7 are given.

Keywords: function germs of two variables; finite determinacy; common property; normal form; codimension 7

2010 MR Subject Classification: 57R45