

奇异高阶积分边值问题正解的全局结构

沈文国

(兰州工业学院基础学科部, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 本文研究了带 Riemann-Stieltjes 积分边值条件的奇异高阶积分边值问题正解的全局分歧结构. 利用相关文献, 获得了此类问题的格林函数并推证其满足的性质, 同时可获得此类问题等价于一个全连续算子方程; 其次, 在满足所给的条件时, 利用 Krein-Rutmann 定理建立了此类问题对应的线性问题存在简单的主特征值; 最后, 当非线性项在零和无穷远处满足非渐进线性增长条件、参数满足不同范围的值时, 利用 Dancer 全局分歧定理、Zeidler 全局分歧定理和序列集取极限的方法, 建立了此类问题正解的全局结构, 进而获得了正解的存在性, 推广了文献 [8] 中的主要结果.

关键词: 奇异高阶积分边值问题; 全局分歧; 正解

MR(2010) 主题分类号: 34B15; 34K18

中图分类号: O175.8

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)05-1054-11

1 引言

利用锥上不动点理论, 文献 [1–6] 研究了边值问题正解的存在性; 文献 [7–8] 研究了带 Riemann-Stieltjes 积分边值条件的高阶问题, 其中 2012 年, 当 $ra(t)f(x) = \lambda f(t, x)$ 时, 文献 [8] 研究了下列奇异高阶问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + ra(t)f(x) = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t)d\alpha(t), & x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, & x(1) = \int_0^1 x(t)d\beta(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $f(t, x)$ 在 $t = 0, t = 1$ 处奇异, $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 分别是有界变差函数.

应用分歧方法, 文献 [9–11] 研究了二阶边值问题; 文献 [12–14] 研究了四阶边值问题; 文献 [15] 研究了高维问题; 文献 [16–17] 研究了带 Riemann-Stieltjes 积分边值条件问题.

受上述文献的启发, 本文研究奇异高阶含 Riemann-Stieltjes 积分边值条件的问题 (1.1) 正解的存在性问题. 本文做如下假设

(H1) 假设 $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 分别是非减函数且在 $[0, 1]$ 上不恒为常数. $g_\alpha(s) = \int_0^1 k(t, s)d\alpha(t)$, $g_\beta(s) = \int_0^1 k(t, s)d\beta(t)$ $g_\alpha(s) \geq 0$ 且 $g_\alpha(s) > 0, g_\beta(s) \geq 0, \forall s \in [0, 1]$;

(H2)

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 (1 - t^{n-1})d\alpha(t) < 1, & 0 < \int_0^1 t^{n-1}d\beta(t) < 1, \\ 0 < \int_0^1 (1 - t^{n-1})d\beta(t) < \infty, & 0 < \int_0^1 t^{n-1}d\alpha(t) < \infty, \end{aligned}$$

*收稿日期: 2016-01-04

接收日期: 2016-04-22

基金项目: 国家自然科学基金 (11561038); 甘肃省自然科学基金 (145RJZA087)

作者简介: 沈文国 (1963–), 男, 甘肃景泰, 教授, 主要研究方向: 分歧理论及非线性微分方程.

$$D = \int_0^1 t^{n-1} d\alpha(t) \left(1 - \int_0^1 d\beta(t)\right) + \left(1 - \int_0^1 d\alpha(t)\right) \left(1 - \int_0^1 t^{n-1} d\beta(t)\right) > 0;$$

(H3) $a(\cdot) \in C((0, 1), [0, \infty))$, 在 $(0, 1)$ 的任何子区间上 $a(t) \neq 0$, 且

$$0 < \int_0^1 k(\tau(s), s) a(s) ds < \infty, \quad 0 < \int_0^1 k_i(\tau_i(s), s) a(s) ds < \infty,$$

$k(\tau(s), s), k_i(\tau_i(s), s)$ 分别由引理 2.2 与引理 2.3 给出;

(H4) $f(\cdot) \in C([0, \infty), [0, \infty))$, 对任何 $s > 0$, 都有 $f(s) > 0$ 成立;

(H5) $f_0, f_\infty \in (0, +\infty)$;

(H6) $f_0 \in (0, +\infty)$ 且 $f_\infty = \infty$;

(H7) $f_0 = 0$ 且 $f_\infty = \infty$;

(H8) $f_0 = \infty$ 且 $f_\infty = \infty$,

其中

$$f_0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s}, f_\infty = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s}, f_0 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s}, f_\infty = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s}.$$

本章安排如下: 在第二部分给出格林函数及其性质; 第三部分给出预备知识; 第四部分给出问题 (1.1) 至少存在一个正解的主要定理及证明.

2 格林函数及其性质

考虑如下边值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + y(t) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \int_0^1 x(t) d\beta(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

引理 2.1 (见文献 [8, 引理 1]) 假设条件 (H1) 和 (H2) 成立. 对于任何 $y \in C[0, 1]$, 则问题 (2.1) 存在唯一解

$$x(t) = \int_0^1 K(t, s) y(s) ds, \quad (2.2)$$

其中

$$K(t, s) = k(t, s) + \frac{A(t)}{D} g_\alpha(s) + \frac{B(t)}{D} g_\beta(s), \quad (2.3)$$

$$k(t, s) = \frac{1}{(n-1)!} \begin{cases} t^{n-1}(1-s)^{n-1} - (t-s)^{n-1}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t^{n-1}(1-s)^{n-1}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$A(t) = \left(1 - \int_0^1 t^{n-1} d\beta(t)\right) - \left(1 - \int_0^1 d\beta(t)\right) t^{n-1},$$

$$B(t) = \int_0^1 t^{n-1} d\alpha(t) + \left(1 - \int_0^1 d\alpha(t)\right) t^{n-1},$$

$$D = \int_0^1 t^{n-1} d\alpha(t) \left(1 - \int_0^1 d\beta(t)\right) + \left(1 - \int_0^1 d\alpha(t)\right) \left(1 - \int_0^1 t^{n-1} d\beta(t)\right),$$

$$g_\alpha(s) = \int_0^1 k(t, s) d\alpha(t), \quad g_\beta(s) = \int_0^1 k(t, s) d\beta(t).$$

引理 2.2 (见文献 [8, 引理 2]) 由 (2.4) 式定义的 $k(t, s)$ 满足下列性质

$$c(t)k(\tau(s), s) \leq k(t, s) \leq k(\tau(s), s), \quad \forall t, s \in [0, 1], \quad (2.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \frac{s}{1 - (1-s)^{\frac{n-1}{n-2}}}, \quad k(\tau(s), s) = \frac{\tau(s)^{n-2}s(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ c(t) &= \min \left\{ \frac{(n-1)^{n-1}t^{n-2}(1-t)}{(n-2)^{n-2}}, t^{n-1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

引理 2.3 $k(t, s)$ 由 (2.4) 式定义, $i = 2, \dots, n$, 下式成立

$$\frac{\partial^{(i-1)}}{\partial t^{(i-1)}} k(t, s) = k_i(t, s) = \frac{1}{(n-i)!} \begin{cases} t^{n-i}(1-s)^{n-1} - (t-s)^{n-i}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ t^{n-i}(1-s)^{n-i}, & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

并且 $k_i(t, s)$ 满足

$$c_i(t)k_i(\tau_i(s), s) \leq k_i(t, s) \leq k_i(\tau_i(s), s), \quad \forall t, s \in [0, 1], \quad (2.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_i(s) &= \frac{s}{1 - (1-s)^{\frac{n-1}{n-i-2}}}, \quad k_i(\tau_i(s), s) = \frac{\tau_i(s)^{n-i-2}s(1-s)^{n-1}}{(n-i-1)!}, \\ c_i(t) &= \min \left\{ \frac{(n-i-1)^{n-i-1}t^{n-i-2}(1-t)}{(n-i-2)^{n-i-2}}, t^{n-i-1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

证 相似于文献 [7] 第 1937–1938 页中定理 3.1 的证明方法, 易得引理 2.3, 故证明略.

引理 2.4 (见文献 [8, 引理 3]) 假设条件 (H1) 和 (H2) 成立. 由 (2.3) 式定义的 $K(t, s)$ 满足下列性质

- (i) $K(t, s)$ 在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上连续且 $K(t, s) \geq 0$;
- (ii) 对于任意 $t, s \in [0, 1]$ 都有 $K(t, s) \leq K(s)$ 成立, 对于任意 $t, s \in [0, 1]$, 下式成立

$$\min_{t \in [0, 1]} K(t, s) \geq q(t)K(s), \quad \forall s \in [0, 1], \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{aligned} K(s) &= k(\tau(s), s) + \frac{M_1}{D}g_\alpha(s) + \frac{M_2}{D}g_\beta(s), \\ q(t) &= \min \left\{ c(t), \frac{A(t)}{M_1}, \frac{B(t)}{M_2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \max \left\{ 1 - \int_0^1 t^{n-1} d\beta(t), \int_0^1 (1 - t^{n-1}) d\beta(t) \right\}, \\ M_2 &= \max \left\{ \int_0^1 t^{n-1} d\alpha(t), 1 - \int_0^1 (1 - t^{n-1}) d\alpha(t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

引理 2.5 (见文献 [8, 引理 4]) 假设条件 (H1) 和 (H2) 成立. 则对于 $y \in C[0, 1]$ 且 $y \geq 0$, (2.1) 式的唯一解满足

- (i) $x(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$;
- (ii) $\min_{t \in [0, 1]} x(t) \geq q(t)\|x\|$,

其中 $q(t)$ 由引理 2.3 (ii) 给出.

3 预备知识

记 $Y = C[0, 1]$, 其上范数为 $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$.

记 $E = \{x \in C^{n-1}[0, 1] | x(0) = \alpha[x], x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \beta[x]\}$, 其上范数为

$$\|x\|_E = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty, \cdots, \|x^{(n-1)}\|_\infty\}.$$

定义算子 $L: D(L) \subset E \rightarrow E, Lx = x^{(n)}, x \in D(L)$, 其中

$$D(L) = \{x \in C^n[0, 1] | x(0) = \alpha[x], x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \beta[x]\}.$$

容易验证 L 为闭算子且 $L^{-1}: Y \rightarrow D(L)$ 是全连续算子.

令 Σ 为 (1.1) 在 $[0, \infty) \times E$ 上正解集合的闭包.

定义锥

$$P = \{x \in C[0, 1] | x(t) \geq 0, t \in [0, 1], \min_{t \in [\delta, 1-\delta]} x(t) \geq q(t)\|x\|_\infty\},$$

其中 $q(t)$ 由引理 2.3 (ii) 给出, 且对于 $r > 0$, 令 $\Omega_r = \{x \in P | \|x\|_E < r\}$.

首先考虑线性问题

$$\begin{aligned} x^{(n)} &= \lambda a(t)x(t), \quad t \in (0, 1), \\ x(0) &= \alpha[x], x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \beta[x]. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} L_\lambda x(t) &= \lambda \int_0^1 K(t, s)a(s)x(s)ds, \quad t \in [0, 1]. \\ T_\lambda x(t) &= \lambda \int_0^1 K(t, s)a(s)f(x(s))ds, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

由 Krein-Rutmann 定理 (见文献 [18, 定理 2.5], 亦可参考文献 [19] 或 [20]), 可得下列引理.

引理 3.1 设 (H1)–(H3) 成立, $r(L_\lambda)$ 是 L_λ 的谱半径. 则 $r(L_\lambda) \neq 0$ 且 L_λ 有一个对应于第一特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{r(L_\lambda)}$ 的正的特征函数 $\phi_1 \in \text{int}P$, 它是简单的并且再没有别的特征值对应正的特征函数.

引理 3.2 设 (H1)–(H4) 成立, 则问题 (1.1) 的解 $x(t)$ 满足

$$\|x(t)\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \alpha[1]} \|x'\|_\infty, \|x'\|_\infty \leq \|x''\|_\infty, \cdots, \|x^{(n-2)}\|_\infty \leq \|x^{(n-1)}\|_\infty.$$

证 由 $|\int_0^1 x(s)d\alpha(s)| \leq \max_{s \in [0,1]} |x(s)| \cdot \alpha[1]$ 和 $x(0) = \int_0^1 x(s)d\alpha(s)$, 可得

$$\max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \max_{t \in [0,1]} \left| x(0) + \int_0^t x'(s)ds \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)|\alpha[1] + \int_0^1 |x'(s)|ds,$$

即

$$\max_{t \in [0,1]} |x(t)| \leq \frac{1}{1 - \alpha[1]} \int_0^1 |x'(s)|ds.$$

进而 $\|x(t)\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \alpha[1]} \|x'\|_\infty$. 由 $x'(0) = 0$, 可得

$$|x'(t)| = \left| x'(0) + \int_0^t x''(s)ds \right| \leq \left| \int_0^1 x''(s)ds \right| \leq \int_0^1 |x''(s)|ds,$$

进而 $\|x'\|_\infty \leq \|x''\|_\infty$. 继续这样一个过程, 由条件 $x'(0) = x''(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0$, 可得

$$\|x''\|_\infty \leq \|x'''\|_\infty, \cdots \|x^{(n-2)}\|_\infty \leq \|x^{(n-1)}\|_\infty.$$

结论获证.

引理 3.3 设 (H1)–(H4) 成立. 假设 $\{(\mu_k, x_k)\} \subset (0, \infty) \times P$ 是问题 (1.1) 的一个正解序列, 存在常数 $c_0 > 0$, 使得 $\|\mu_k\| \leq c_0$, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_E = \infty, \quad (3.1)$$

则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_\infty = \infty$.

证 反设存在常数 $M_0 > 0$, 使得 $\|x_k\|_\infty \leq M_0$. 由于 (μ_k, x_k) 是问题 (1.1) 的正解, 则

$$x_k(t) = \mu_k \int_0^1 K(t, s)a(s)f(x_k(s))ds, t \in [0, 1].$$

进而

$$x_k^{(n-1)}(t) = \mu_k \int_0^1 \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} K(t, s) \cdot a(s)f(x_k(s))ds. \quad (3.2)$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} K(t, s) &= \left| \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} k(t, s) + \frac{g_\alpha(s)}{D} \frac{d^{(n-1)} A(t)}{d^{(n-1)} t} + \frac{g_\beta(s)}{D} \frac{d^{(n-1)} B(t)}{d^{(n-1)} t} \right| \\ &\leq \Phi_1(s) + \Phi_2(s), \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &:= \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} k(t, s) = (1-s)^{n-1}, \\ \Phi_2(s) &:= \frac{(n-1)![(1-\alpha[1])\alpha[1] + (1-\beta[1])\beta[1]]}{D} k(\tau(s), s). \end{aligned}$$

由 (H3) 可得

$$0 < \int_0^1 \Phi_1 a(s) ds < \infty, 0 < \int_0^1 \Phi_2 a(s) ds < \infty. \quad (3.4)$$

假设 $b = \max_{s \in [0, M_0]} \{f(s)\}$, 结合 (3.2), (3.3) 和 (3.4) 式, 可得

$$\|x_k^{(n-1)}(t)\|_\infty \leq b \cdot \left[\int_0^1 \Phi_1(s) a(s) ds + \int_0^1 \Phi_1(s) a(s) ds \right].$$

即由 $\|x_k(t)\|_\infty$ 有界可推出 $\|x_k^{(n-1)}(t)\|_\infty$ 有界.

结合引理 3.2, 存在常数 $M_2 > 0$ 满足 $\|x_k(t)\|_E \leq M_2$. 与已知条件矛盾, 结论获证.

引理 3.4 (见文献 [17]) 设 X 是一个 Banach 空间且令 $\{C_n | n = 1, 2, \dots\}$ 是 X 中的闭连通分支序列. 假设

(i) 存在 $z_n \in C_n$, $n = 1, 2, \dots$ 和 $z^* \in X$, 使得 $z_n \rightarrow z^*$;

(ii) $r_n = \sup\{\|x\| | x \in C_n\} = \infty$;

(iii) 对所有 $R > 0$, $(\cup_{n=1}^\infty C_n) \cap B_R$ 是 X 中的相对紧子集, 其中 $B_R = \{x \in X | \|x\| \leq R\}$. 则在 $\mathbb{D}$ 中存在一个无界连通分支 C 使得 $z^* \in C$, 其中 $\mathbb{D} := \limsup_{n \rightarrow \infty} C_n = \{x \in X | \exists \{n_i\} \subset \mathbb{N} \text{ 和 } x_{n_i} \in C_{n_i}, \text{ 使得 } x_{n_i} \rightarrow x\}$ (见文献 [21]).

4 主要结果

首先考虑下列特征值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + \lambda r a(t) f(x) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \int_0^1 x(t) d\beta(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个参数.

设 $\zeta \in C(\mathbb{R})$ 使得 $f(x) = f_0 x + \zeta(x)$ 且满足 $\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\zeta(s)}{s} = 0$.

考虑

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + \lambda r a(t) f_0 x + \lambda r a(t) \zeta(x) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \int_0^1 x(t) d\beta(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

作为从平凡解 $x \equiv 0$ 发出的一个分歧问题. 方程 (4.2) 等价于

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^1 G(t, s) [\lambda r a(s) f_0 x(s) + \lambda r a(s) \zeta(x(s))] ds \\ &:= \lambda L^{-1} [r a(\cdot) f_0 x(\cdot)](t) + \lambda L^{-1} [r a(\cdot) \zeta(x(\cdot))](t). \end{aligned}$$

进而可以证明

$$\|L^{-1} [a(\cdot) \zeta(x(\cdot))]\|_E = o(\|x\|_E), \quad \|x\|_E \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

事实上, 对所有 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, 由引理 2.1–2.3 可得

$$K_i(t, s) = k_i(t, s) + \frac{g_\alpha(s)}{D} A_i(t) + \frac{g_\beta(s)}{D} B_i(t),$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(i-1)}}{\partial t^{(i-1)}} K(t, s) &= K_i(t, s) \quad (K_i(t, s) \text{ 由 (2.7) 式给出}), \\ A_i(t) &= \frac{d^{(i-1)} A}{d^{(i-1)} t} = \begin{cases} A(t), & i = 1, \\ -(1 - \int_0^1 d\beta(t)) P_{n-1}^{i-1} t^{n-i}, & i = 2, \dots, n, \end{cases} \\ B_i(t) &= \frac{d^{(i-1)} B}{d^{(i-1)} t} = \begin{cases} B(t), & i = 1, \\ (1 - \int_0^1 d\alpha(t)) P_{n-1}^{i-1} t^{n-i}, & i = 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

则对于任意 $t, s \in [0, 1], i = 1, \dots, n$, 都有

$$\begin{aligned} |K_i(t, s)| &\leq k_i(t, s) + \frac{|A_i(t)|}{D} g_\alpha(s) + \frac{|B_i(t)|}{D} g_\beta(s), \\ &\leq k_i(t, s) + \frac{M_{i1}}{D} \int_0^1 k(t, s) d\alpha(t) + \frac{M_{i2}}{D} \int_0^1 k(t, s) d\beta(t) \\ &\leq k_i(\tau_i(s), s) + \frac{M_{i1} \int_0^1 d\alpha(t) + M_{i2} \int_0^1 d\beta(t)}{D} k(\tau(s), s), \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{i1} &= \begin{cases} M_1, & i = 1, \\ \left| 1 - \int_0^1 d\beta(t) \right| P_{n-1}^{i-1}, & i = 2, \dots, n, \end{cases} \\ M_{i2} &= \begin{cases} M_2, & i = 1, \\ \left| 1 - \int_0^1 d\alpha(t) \right| P_{n-1}^{i-1}, & i = 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned}$$

由 (4.4) 式, $i = 1, \dots, n$, 可得

$$\begin{aligned} \left| (L^{-1} [a(\cdot) \zeta(x(\cdot))])^{(i-1)}(t) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} K(t, s) a(s) \zeta(x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \left[k_i(\tau_i(s), s) a(s) + \frac{M_{i1} \int_0^1 \alpha(t) + M_{i2} \int_0^1 \beta(t)}{D} k(\tau(s), s) a(s) \right] \zeta(x(s)) ds. \end{aligned}$$

由 L^{-1} 的紧性结合 (H3), $i = 1, \dots, n$, 可得

$$\|(L^{-1} [a(\cdot) \zeta(x(\cdot))])^{(i-1)}\|_\infty = o(\|x\|_\infty),$$

进而 $i = 1, \dots, n$, $\|(L^{-1}[a(\cdot)\zeta(x(\cdot))])^{(i-1)}\|_\infty = o(\|x\|_E)$. 即 (4.3) 式得证.

由引理 3.1 和全局分歧定理 (可参考 Dancer^[22] 和 Zeidler^[23] 推论 15.12), 对于问题 (4.2), 可得如下结论.

引理 4.1 令 (H1)–(H5) 成立, $(\frac{\lambda_1}{rf_0}, 0)$ 是问题 (4.2) 的一个分岐点. 进而, 存在 (4.2) 式正解的一个连通分支 $\mathcal{C}$, 满足 $\mathcal{C} \subset [0, \infty) \times E$, 并且 $\mathcal{C}$ 在 $[0, \infty) \times P$ 中连接 $(\frac{\lambda_1}{rf_0}, 0)$ 和 $(\frac{\lambda_1}{rf_\infty}, \infty)$.

注 4.1 问题 (4.1) 的形如 $(1, x)$ 的任何解将产生问题 (1.1) 的一个解 x . 为了获得结论, 仅仅证明 $\mathcal{C}$ 在 $[0, \infty) \times P$ 中穿过超平面 $\{1\} \times E$ 即可.

下面是本文主要结果.

定理 4.1 令 (H1)–(H5) 成立. 要么 $\lambda_1/f_\infty < r < \lambda_1/f_0$ 成立, 要么 $\lambda_1/f_0 < r < \lambda_1/f_\infty$ 成立. 则问题 (1.1) 至少有一个正解.

证 由引理 4.1 易得结论, 故证明略.

定理 4.2 令 (H1)–(H4) 和 (H6) 成立. 假设 $r \in (0, \frac{\lambda_1}{f_0})$. 则问题 (1.1) 至少有一个正解.

证 受文献 [24] 的启发, 可以定义截断函数 f 如下

$$f^{[n]}(s) := \begin{cases} f(s), & s \in [-n, n], \\ \frac{2n^2 - f(n)}{n}(s - n) + f(n), & s \in (n, 2n), \\ \frac{2n^2 + f(-n)}{n}(s + n) + f(-n), & s \in (-2n, -n), \\ ns, & s \in (-\infty, -2n] \cup [2n, +\infty). \end{cases}$$

考虑

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + \lambda r a(t) f^{[n]}(x) = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), & x'(0) = \dots = x^{(n-2)}(0) = 0, & x(1) = \int_0^1 x(t) d\beta(t). \end{cases} \quad (4.5)$$

显然, 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{[n]}(s) = f(s), \quad (f^{[n]})_0 = f_0, \quad (f^{[n]})_\infty = n.$$

相似于定理 4.1, 由引理 4.1 可知, 存在问题 (4.5) 从 $(\frac{\lambda_1}{rf_0}, 0)$ 发出的一个解的无界连通分支 $\mathcal{C}^{[n]}$, 满足 $\mathcal{C}^{[n]} \subset ([0, \infty) \times E)$, 并且 $\mathcal{C}^{[n]}$ 在 $[0, \infty) \times P$ 中连接 $(\frac{\lambda_1}{rf_0}, 0)$ 到 $(\frac{\lambda_1}{nr}, \infty)$.

令 $z_n = (\frac{\lambda_1}{nr}, \infty)$ 且 $z^* = (0, \infty)$, 则 $z_n \rightarrow z^*$. 因此引理 3.4 (i) 满足且 $z^* = (0, \infty)$. 显然

$$r_n = \sup \{ \lambda + \|x\| \mid (\lambda, x) \in \mathcal{C}^{[n]} \} = \infty,$$

相应的, 引理 3.4 (ii) 成立. 由 Arezela-Ascoli 定理和 $f^{[n]}$ 直接可得引理 3.4 (iii). 因此由引理 3.4 可知 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}^{[n]}$ 包括一个无界连通分支 $\mathcal{C}$ 满足 $(\infty, 0) \in \mathcal{C}$ 并且 $(\frac{\lambda_1}{rf_0}, 0) \in \mathcal{C}$.

定理 4.3 令 (H1)–(H4) 和 (H7) 成立. 假设 $r \in (0, +\infty)$. 则问题 (1.1) 至少有一个正解.

证 定义

$$f^{[n]}(s) := \begin{cases} f(s), & s \in [-\infty, -\frac{2}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \infty], \\ -[f(-\frac{2}{n}) + \frac{1}{n^2}](ns + 2) + f(-\frac{2}{n}), & s \in (-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}), \\ [f(\frac{2}{n}) - \frac{1}{n^2}](ns - 2) + f(\frac{2}{n}), & s \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ \frac{1}{n}s, & s \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

考虑问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + \lambda r a(t) f^{[n]}(x) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \int_0^1 x(t) d\beta(t). \end{cases} \quad (4.6)$$

显然, 可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{[n]}(s) = f(s), (f^{[n]})_0 = \frac{1}{n}, (f^{[n]})_\infty = f_\infty = \infty.$$

相似于定理 4.2 的证明方法, 由引理 4.1 可知, 问题 (4.6) 存在从 $(\frac{n\lambda_1}{r}, 0)$ 发出的一个解的无界连通分支 $\mathcal{C}^{[n]}$, 满足 $\mathcal{C}^{[n]} \subset ([0, \infty) \times E)$, 并且 $\mathcal{C}^{[n]}$ 在 $[0, \infty) \times P$ 中连接 $(\frac{n\lambda_1}{r}, 0)$ 到 $(0, \infty)$.

令 $z_n = (\frac{n\lambda_1}{r}, 0)$ 且 $z^* = (\infty, 0)$, 则 $z_n \rightarrow z^*$. 因此引理 3.4 (i) 满足且 $z^* = (\infty, 0)$. 显然

$$r_n = \sup \{ \lambda + \|x\| | (\lambda, x) \in \mathcal{C}^{[n]} \} = \infty.$$

相应的, 引理 3.4 (ii) 成立. 由 Arezela-Ascoli 定理和 $f^{[n]}$ 直接可得引理 3.4 (iii). 因此由引理 3.4 可知 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}^{[n]}$ 包括一个无界连通分支 $\mathcal{C}$ 满足 $(\infty, 0) \in \mathcal{C}$ 并且 $(0, \infty) \in \mathcal{C}$.

定理 4.4 令 (H1)–(H4) 和 (H8) 成立. 存在一个 $\lambda^+ > 0$ 使得 $r \in (0, \lambda^+)$ 成立. 则问题 (1.1) 至少有一个正解.

证 定义

$$f^{[n]}(s) := \begin{cases} f(s), & s \in [-\infty, -\frac{2}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \infty], \\ -[f(-\frac{2}{n}) + 1](ns + 2) + f(-\frac{2}{n}), & s \in (-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}), \\ [f(\frac{2}{n}) - 1](ns - 2) + f(\frac{2}{n}), & s \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), \\ ns, & s \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

考虑问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + \lambda r a(t) f^{[n]}(x) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = \int_0^1 x(t) d\alpha(t), x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, x(1) = \int_0^1 x(t) d\beta(t). \end{cases} \quad (4.7)$$

显然,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{[n]}(s) = f(s), (f^{[n]})_0 = n, (f^{[n]})_\infty = f_\infty = \infty.$$

相似于定理 4.2 的证明方法, 由引理 4.1 可知, 问题 (4.7) 存在从 $(\frac{\lambda_1}{nr}, 0)$ 发出的一个解的无界连通分支 $\mathcal{C}^{[n]}$, 满足 $\mathcal{C}^{[n]} \subset ([0, \infty) \times E)$, 并且 $\mathcal{C}^{[n]}$ 在 $[0, \infty) \times P$ 中连接 $(\frac{\lambda_1}{nr}, 0)$ 到 (∞, ∞) .

令 $z_n = (\frac{\lambda_1}{nr}, 0)$ 且 $z^* = (0, 0)$, 则 $z_n \rightarrow z^*$. 因此引理 3.4 (i) 满足且 $z^* = (0, 0)$. 显然

$$r_n = \sup \{ \lambda + \|x\| | (\lambda, x) \in \mathcal{C}^{[n]} \} = \infty,$$

相应的, 引理 3.4 (ii) 成立. 由 Arezela-Ascoli 定理和 $f^{[n]}$ 直接可得引理 3.4 (iii). 因此由引理 3.4 可知 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}^{[n]}$ 包括一个无界连通分支 $\mathcal{C}$ 满足 $(0, 0) \in \mathcal{C}$ 并且 $(0, \infty) \in \mathcal{C}$.

参 考 文 献

- [1] Jiang Heping, Jiang Wei. The existence of a positive solution for nonlinear fractional functional differential equations[J]. J. Math., 2011, 31 (3): 440–446.
- [2] 郝兆才, 孔盟. 一类奇异泛函微分方程边值问题的多重正解 [J]. 数学杂志, 2013, 33 (1): 75–82.
- [3] Ji Yuede, Guo Yanoing. The existence of countably many positive solutions for some nonlinear n th order m -point boundary value problems[J]. J. Comput. Appl. Math., 2009, 232 (2): 187–200.
- [4] Yang Jinbao, Wei Zhongli. Positive solutions of n th order m -point boundary value problem[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 202(2): 715–720.
- [5] Pang Changci, Wei Dong, Wei Zhongli. Green's function and positive solutions of n th order m -point boundary value problem[J]. Appl. Math. Comput., 2006, 182: 1231–1239.
- [6] Graef J R, Yang Bo. positive solutions to a multi-point or nonlinear higher order boundary value problem[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 316 (2): 409–421.
- [7] Webb J R L. Nonlocal conjugate type boundary value problem of higher order[J]. Nonl. Anal., 2009, 71(5-6): 1933–1940.
- [8] Shen Wenguo. Positive solutions to semipositone higher order singular nonlocal boundary value problems[J]. J. Lanzhou Univ. (Nat. Sci.), 2012, 48 (2): 97–100.
- [9] Dai Guowei, Ma Ruyun. Unilateral global bifurcation phenomena and nodal solutions for p -Laplacian[J]. J. Diff. Equ., 2012, 252: 2448–2468.
- [10] Dai Guowei. Bifurcation and nodal solutions for p -Laplacian problems with non-asymptotic nonlinearity at 0 or ∞ [J]. Appl. Math. Lett., 2013, 26: 46–50.
- [11] Dai Guowei, Ma Ruyun. Unilateral global bifurcation for p -Laplacian with non- $p - 1$ -linearization nonlinearity[J]. Disc. Contin. Dyn. Syst., 2015, 35(1): 99–116.
- [12] Rynne B P. Infinitely many solutions of superlinear fourth order boundary value problems[J]. Topol. Meth. Nonl. Anal., 2002, 19(2): 303–312.
- [13] Shen Wenguo. Global structure of nodal solutions for a fourth-order two-point boundary value problem[J]. Appl. Math. Comput., 2012, 219(1): 88–98.
- [14] Ma Ruyun. Nodal solutions for a fourth-order two-order boundary value problem[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 314 (1): 254–265.
- [15] Shi Junping, Wang Yuwen. On global bifurcation for quasilinear elliptic systems on bounded domains[J]. J. Diff. Equ., 2009, 246: 2788–2812.
- [16] Shen Wenguo, He Tao. Global structure of positive solutions for a singular fourth-order integral boundary value problem[J]. Disc. Dyn. Nat. Soc. Vol. 2014, Article ID 614376, 7 pages.
- [17] Ma Ruyun, An Yulian. Global structure of itive solutions for nonlocal boundary value problems involving integral conditions[J]. Nonl. Anal., 2009, 71(1): 4364–4376.
- [18] Krasnosel'ii M A. Positive solutions of operator equations[M]. The Netherlands: P. Noordhoff Ltd., 1964.
- [19] Zhang G, Sun J. Positive solutions of m -point boundary value problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 291: 406–418.
- [20] Guo D, Sun J. Nonlinear integral equations[M]. Ji'nan: Shandong Sci. Tech. Press, 1987 (in Chinese).
- [21] Whyburn G T. Topological analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1958.
- [22] Dancer E. Global solutions branches for positive maps[J]. Arch. Rat. Mech. Anal., 1974, 55: 207–213.
- [23] Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications[A]. Translated from the German by Peter R Wadsack. Fixed point theorems[C]. New York: Springer-Verlag, 1986.

- [24] Ambrosetti A, Calahorrano R M, Dobarro F R. Global branching for discontinuous problems[J]. Comment. Math. Univ. Carolin., 1990, 31: 213–222.

GLOBAL BIFURCATION OF POSITIVE SOLUTIONS FOR SINGULAR HIGH-ORDER PROBLEMS INVOLVING STIELTJES INTEGRAL CONDITIONS

SHEN Wen-guo

(*Department of Basic Courses, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China*)

Abstract: In this paper, we establish global bifurcation structure of positive solutions for a class of singular higher-order boundary value problems. First, according to the relevant literature, we obtain that the Green function and its property for the above problem. Meanwhile, we can obtain that the above problem is equivalent to the completely continuous operator equation. Second, we have that the above linear problem exists simple principal eigenvalue by the Krein-Rutman theorem. Finally, we establish the global bifurcation structure of positive solutions with non-asymptotic nonlinearity at or by Dancer and Zeidler global bifurcation theorems and the approximation of connected components which extends and improves the corresponding results of Shen [8].

Keywords: high-order singular boundary problems; global bifurcation; positive solutions

2010 MR Subject Classification: 34B15; 34K18