Vol. 37 (2017)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

线性空间中代数广义逆的最简表示

郭志荣 [1,2], 黄强联 [1], 张 莉 [1]
(1. 扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)
(2. 扬州职业大学数学学院, 江苏 扬州 225009)

摘 要: 本文主要在一般线性空间框架中从纯代数的角度研究代数广义逆的可加性与表示问题. 首先在线性空间中利用空间代数直和分解给出 $I+AT^+$ 可逆的充要条件, 进而 $\overline{T}^+=T^+(I+AT^+)^{-1}$, 给出了 $\overline{T}^+$ 具有最简表示的一系列充要条件. 其次讨论了在 Banach 空间广义逆和 Hilbert 空间 Moore-Penrose 逆扰动问题研究中的应用. 本文的主要结果推广和改进了相关文献中的一些近期成果.

关 键 词: 代数广义逆; 广义逆; Moore-Penrose 逆; 最简表示; 线性空间
MR(2010) 主题分类号: 47L05; 46A32 **中图分类号:** O177.2
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)05-1013-09

1 引言及预备知识

设 X,Y 为线性空间, $L(X,Y)$ 表示从 X 到 Y 中的线性算子的全体. 对 $T\in L(X,Y)$, $D(T)$, $N(T)$ 和 $R(T)$ 分别表示算子 T 的定义域, 核空间和值域. I 表示恒等算子. 设 M,N 为 X 的线性子空间, $M\dot{+}N$ 表示 M 与 N 的代数直和. 若 X,Y 为 Banach 空间, M 和 N 为 X 的闭子空间, $M\oplus N$ 表示 M 与 N 的拓扑直和. $B(X,Y)$, $C(X,Y)$ 分别表示从 X 到 Y 中的有界线性算子组成的 Banach 空间和稠定闭算子全体构成的齐次集.

定义 1.1 [1,2] 设 X,Y 为线性空间, $T\in L(X,Y)$. 若 $S\in L(Y,X)$ 满足 $R(T)\subseteq D(S)$, $R(ST)\subseteq D(T)$, 且 $TST=T$, 则称 S 为 T 的代数内逆; 若 S 满足 $R(S)\subseteq D(T)$, $R(TS)\subseteq D(S)$, 且 $STS=S$, 则称 S 为 T 的代数外逆. 若 S 既是 T 的代数内逆, 又是 T 的代数外逆, 则称 S 为 T 的代数广义逆, 记作 T^+.

代数广义逆与空间的代数直和分解是一一对应的 [3], 其不涉及空间的拓扑结构. 在 Banach 空间或 Hilbert 空间中, 对应于不同的拓扑结构, 可以引入相应的广义逆.

定义 1.2 [3] 设 X,Y 为 Banach 空间, $T\in B(X,Y)$. 若 $S\in B(Y,X)$ 满足 $TST=T$, 则称 S 为 T 的内逆; 若 S 满足 $STS=S$, 则称 S 为 T 的外逆. 若 S 既是 T 的内逆, 又是 T 的外逆, 则称 S 为 T 的广义逆, 仍记作 T^+.

Banach 空间的广义逆与空间的拓扑直和分解对应, 即

定理 1.3 [4] $T^+\in B(Y,X)$ 为算子 $T\in B(X,Y)$ 的广义逆当且仅当 X,Y 分别具有拓扑直和分解, $X=N(T)\oplus R(T^+)$, $Y=R(T)\oplus N(T^+)$.

*收稿日期: 2017-03-10 接收日期: 2017-06-02
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11771378; 11271316); 江苏省自然科学基金资助 (BK20141271); 扬州大学中青年学术带头人基金资助 (2016zqn03).

作者简介: 郭志荣 (1970–), 男, 江苏扬州, 副教授, 主要研究方向: 泛函分析.
通讯作者: 黄强联.

定义 1.4 [3] 若 X, Y 为 Hilbert 空间, 定理 1.3 中的分解为正交分解, 则称相应的广义逆为 T 的 Moore-Penrose 逆, 记为 $T^\dagger$.

定义 1.5 [5] 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in C(X,Y)$. 若算子 $S \in C(Y,X)$ 满足 $R(S) \subseteq D(T)$, $R(T) \subseteq D(S)$, 且在 $D(T)$ 上 $TST = T$; 在 $D(S)$ 上 $STS = S$, 则称 S 为 T 的 (无界) 广义逆, 仍记作 T^+.

定理 1.6 [3] 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in C(X,Y)$, $N(T)$ 和 $R(T)$ 的闭包 $\overline{R(T)}$ 分别在 X, Y 中存在拓扑补 $N(T)^c$ 和 $\overline{R(T)}^c$, 即

$$X = N(T) \oplus N(T)^c, \quad Y = \overline{R(T)} \oplus \overline{R(T)}^c. \tag{1.1}$$

记 P, Q 分别为 X 沿 $N(T)^c$ 到 $N(T)$ 上和 Y 沿 $\overline{R(T)}^c$ 到 $\overline{R(T)}$ 上的投影算子, 则存在唯一的算子 $S \in C(Y,X)$ 满足: 1) 在 $D(T)$ 上 $TST = T$; 2) 在 $D(S)$ 上 $STS = S$; 3) 在 $D(T)$ 上 $ST = I - P$ 和 4) 在 $D(S)$ 上 $TS = Q$, 其中 $D(S) = R(T) + \overline{R(T)}^c$. 进一步, S 有界当且仅当 $R(T)$ 在 Y 中闭.

根据定理 1.6, 在空间具有拓扑直和分解 (1.1) 的条件下, T 存在无界广义逆. 又若 X, Y 为 Hilbert 空间, (1.1) 中的分解为正交分解, 则称相应的广义逆为 T 的 Moore-Penrose 逆, 记为 $T^\dagger$.

广义逆扰动理论是广义逆理论研究的核心内容之一, 在近代分析、计算、优化与控制论等学科中有着广泛而重要的应用 [3,4,6−8]. 广义逆扰动理论主要研究算子经过微小扰动后是否仍然存在广义逆, 若不存在, 什么条件可以保证存在; 若存在, 能否给出其表达式或广义逆是否 (在某种意义下) 收敛于原广义逆. 国内外很多学者研究了 Banach 空间中的各种线性算子广义逆和 Hilbert 空间中 Moore-Penrose 逆的表示与扰动问题 [3,6,7,9−18], 如

定理 1.7 [7] 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in B(X,Y)$ 存在广义逆 $T^+ \in B(Y,X)$, $\delta T \in B(X,Y)$ 满足 $\|\delta T T^+\| < 1$. 则下列命题等价

(1) $B = T^+(I + \delta T T^+)^{-1}$ 为 $\overline{T} = T + \delta T$ 的广义逆;

(2) $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{0\}$;

(3) $(I - T^+T)N(\overline{T}) = N(T)$;

(4) $X = N(\overline{T}) \oplus R(T^+)$ 或 $X = N(\overline{T}) + R(T^+)$;

(5) $Y = R(\overline{T}) \oplus N(T^+)$;

(6) $(I + \delta T T^+)^{-1}\overline{T}N(T) \subseteq R(T)$.

定理 1.8 [9] 设 X, Y 为 Hilbert 空间, $T \in B(X,Y)$ 存在 Moore-Penrose 逆 $T^\dagger \in B(Y,X)$. 若 $\delta T \in B(X,Y)$ 满足 $\|\delta T T^\dagger\| < 1$, 则 $B = T^\dagger(I + \delta T T^\dagger)^{-1}$ 为 $\overline{T} = T + \delta T$ 的 Moore-Penrose 逆当且仅当 $R(\overline{T}) = R(T)$, $N(\overline{T}) = N(T)$.

无论是在 Banach 空间或 Hilbert 空间, 讨论有界线性算子或稠定闭算子的广义逆或 Moore-Penrose 逆的扰动表示问题, 本质上都是讨论线性空间中代数广义逆的可加性问题. 因而, 在一般线性空间框架中从纯代数的角度讨论代数广义逆更具有一般性. 在 1974 年, Nashed 和 Votruba 就在其系列论文中从纯代数的角度研究了线性空间中代数内逆、代数外逆、代数广义逆及其性质 [1,2,3]. 代数广义逆与 Banach 空间中的广义逆不同, 最本质的区别在于代数广义逆不涉及空间的拓扑. 由于子空间在线性空间中总是代数可补, 因而代数广义逆总是存在的 [3]. 一个自然的问题是什么条件能保证代数广义逆唯一? 能否给出相应广义逆

的具体表达式? 本文拟从纯代数角度给出代数广义逆的最简形式的表示, 主要结果推广和改进了文 [6, 7, 9, 12–16, 18] 中的相关结果.

2 主要结果

引理 2.1 设 $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,X)$ 满足 $R(S) \subseteq D(T)$, $R(T) \subseteq D(S)$. 若 S 为 T 的代数外逆, 则下列命题等价

(1) S 为 T 的代数广义逆;

(2) $R(T) = R(TS)$;

(3) $D(S) = R(T) \dot{+} N(S)$;

(4) $R(T) \cap N(S) = \{0\}$;

(5) $N(ST) = N(T)$;

(6) $D(T) = R(S) \dot{+} N(T)$ 或 $D(T) = R(S) + N(T)$.

证 由于 S 为 T 的代数外逆, 则 TS, ST 均为幂等算子, 且 $R(S) = R(ST), N(TS) = N(S)$, $D(T) = R(ST) \dot{+} N(ST) = R(S) \dot{+} N(ST)$, $D(S) = R(TS) \dot{+} N(TS) = R(TS) \dot{+} N(S)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) 若 S 为 T 的代数广义逆, 则 $TST = T$, 从而 $R(T) = R(TST) \subseteq R(TS) \subseteq R(T)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 若 $R(T) = R(TS)$, 则 $D(S) = R(TS) \dot{+} N(S) = R(T) \dot{+} N(S)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 显然.

(4) $\Rightarrow$ (1) 对任意 $x \in D(T)$, $S(TSTx - Tx) = STSTx - STx = STx - STx = 0$, 从而 $TSTx - Tx \in N(S)$. 又 $TSTx - Tx \in R(T)$, 根据 (4), 则 $TSTx = Tx$. 故 $TST = T$. 因此, S 为 T 的代数广义逆.

(1) $\Rightarrow$ (5) 若 S 为 T 的代数广义逆, 则 $TST = T$. 如果 $STx = 0$, 那么 $Tx = TSTx = 0$, 即 $N(ST) \subseteq N(T)$, 又显然有 $N(T) \subseteq N(ST)$ 成立. 故 $N(ST) = N(T)$.

(5) $\Rightarrow$ (6) 若 $N(ST) = N(T)$, 则 $D(T) = R(S) \dot{+} N(ST) = R(S) \dot{+} N(T)$.

(6) $\Rightarrow$ (1) 对任意 $x \in D(T)$, 由 (6), 存在 $y \in D(S)$ 和 $x_1 \in N(T)$, 使得 $x = Sy + x_1$. 从而 $TSTx = TST(Sy + x_1) = TSTSy = TSy = T(Sy + x_1) = Tx$. 故 $TST = T$, 从而 S 为 T 的代数广义逆. 证毕.

引理 2.2 设 $T^+ \in L(Y,X)$ 为 $T \in L(X,Y)$ 的代数广义逆, $A \in L(X,Y)$ 满足 $D(T) \subseteq D(A)$, $R(T^+) \subseteq D(A)$, $R(A) \subseteq D(T^+)$. 若 $\overline{T} = T + A$, 则下列命题等价

(1) $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为双射;

(2) $I + T^+A : D(T) \to D(T)$ 为双射;

(3) $N(\overline{T}) \cap R(T^+) = \{0\}$ 和 $D(T^+) = \overline{T}R(T^+) \dot{+} N(T^+)$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 先证 $I + T^+A : D(T) \to D(T)$ 为单射. 若 $x \in D(T)$, $(I + T^+A)x = 0$, 则 $A(I + T^+A)x = 0$, 即 $(I + AT^+)Ax = 0$. 根据 (1), $Ax = 0$, 从而 $x = -T^+Ax = 0$. 次证 $I + T^+A : D(T) \to D(T)$ 为满射, 也就是需证对任意 $y \in D(T)$, 存在 $x \in D(T)$ 使得 $(I+T^+A)x = y$. 事实上, 由于 $Ay \in D(T^+)$, 由 (1), 存在 $h \in D(T^+)$, 满足 $(I+AT^+)h = Ay$. 令 $x = y - T^+h$, 则 $x \in D(T)$, 且

$$\begin{aligned}(I + T^+A)x &= (I + T^+A)(y - T^+h) = y + T^+Ay - (I + T^+A)T^+h \\ &= y + T^+Ay - T^+(I + AT^+)h = y + T^+Ay - T^+Ay = y.\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 若 $I+T^+A: D(T) \to D(T)$ 为双射. 设 $y \in N(\overline{T}) \cap R(T^+)$, 则存在 $x \in D(T^+)$, 满足 $y = T^+x$, $\overline{T}T^+x = \overline{T}y = 0$. 因此

$$(I+T^+A)T^+x = T^+x + T^+AT^+x = T^+TT^+x + T^+AT^+x = T^+\overline{T}T^+x = 0.$$

故 $T^+x = 0$, 即 $y = T^+x = 0$. 从而 $N(\overline{T}) \cap R(T^+) = \{0\}$. 下面证 $\overline{T}R(T^+) \cap N(T^+) = \{0\}$. 设 $v \in \overline{T}R(T^+) \cap N(T^+)$, 则存在 $u \in D(T^+)$, 满足 $v = \overline{T}T^+u$. 因此

$$\begin{aligned} 0 &= T^+v = T^+\overline{T}T^+u = T^+(T+A)T^+u \\ &= T^+TT^+u + T^+AT^+u = T^+u + T^+AT^+u \\ &= (I+T^+A)T^+u. \end{aligned}$$

那么 $T^+u = 0$, $v = \overline{T}T^+u = 0$.

最后证 $D(T^+) = \overline{T}R(T^+) + N(T^+)$. 一方面, 易见 $\overline{T}R(T^+) + N(T^+) \subseteq D(T^+)$. 另一方面, 任取 $x \in D(T^+)$, $T^+x \in D(T)$. 根据 (2), 存在 $y \in D(T)$, 使得 $T^+x = (I+T^+A)y$, 即 $T^+x = (I-T^+T)y + T^+\overline{T}y$. 从而

$$T^+(x - \overline{T}y) = (I - T^+T)y \in R(T^+) \cap N(T) = \{0\}.$$

因此 $y = T^+Ty \in R(T^+)$, $T^+x = T^+\overline{T}y$, 进而 $x - \overline{T}y \in N(T^+)$. 则

$$x = \overline{T}y + (x - \overline{T}y) = \overline{T}T^+Ty + (x - \overline{T}y) \in \overline{T}R(T^+) + N(T^+),$$

故 $D(T^+) = \overline{T}R(T^+) + N(T^+)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 首先证明 $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为单射. 事实上, 若 $x \in D(T^+)$ 满足 $(I+AT^+)x = 0$, 则 $\overline{T}T^+x = TT^+x - x \in \overline{T}R(T^+) \cap N(T^+) = \{0\}$, 从而 $x = TT^+x$, $\overline{T}T^+x = 0$. 故 $T^+x \in N(\overline{T}) \cap R(T^+)$, 根据 (3), $T^+x = 0$. 因此 $x = TT^+x = 0$. 为完成证明, 只需证 $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为满射. 对任何 $y \in D(T^+)$, 由于 $D(T^+) = \overline{T}R(T^+) + N(T^+)$, y 能表示为 $y = \overline{T}T^+y_1 + y_2$, 其中 $y_1 \in D(T^+)$, $y_2 \in N(T^+)$. 因此

$$\begin{aligned} (I+AT^+)(TT^+y_1 + y_2) &= (TT^+y_1 + y_2) + (\overline{T} - T)T^+TT^+y_1 \\ &= TT^+y_1 + y_2 + \overline{T}T^+y_1 - TT^+y_1 \\ &= y_2 + \overline{T}T^+y_1 = y. \end{aligned}$$

故 $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为双射. 证毕.

下面的定理说明如果 $\overline{T}$ 的代数广义逆 $\overline{T}^+$ 保持 T 的代数广义逆 T^+ 的定义域, 值域和核空间, 那么 $\overline{T}^+$ 是唯一确定的, 并且具有最简表示形式.

定理 2.3 设 $T^+ \in L(Y,X)$ 为 $T \in L(X,Y)$ 的代数广义逆, $A \in L(X,Y)$ 满足 $D(T) \subseteq D(A)$, $R(T^+) \subseteq D(A)$, $R(A) \subseteq D(T^+)$. 若 $\overline{T} = T + A$ 存在代数广义逆 $\overline{T}^+ \in L(Y,X)$, 满足

$$D(\overline{T}^+) = D(T^+),\ N(\overline{T}^+) = N(T^+),\ R(\overline{T}^+) = R(T^+),$$

则 $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为双射, 且 $\overline{T}^+ = T^+(I+AT^+)^{-1} = (I+T^+A)^{-1}T^+$.

证 由于 $\overline{T}^+$ 为 $\overline{T}$ 的代数广义逆, 则 $N(\overline{T})\cap R(\overline{T}^+)=\{0\}$ 和 $D(\overline{T}^+)=R(\overline{T}\,\overline{T}^+)\dot{+}N(\overline{T}\,\overline{T}^+)$ $=\overline{T}R(\overline{T}^+)\dot{+}N(\overline{T}^+)$. 因此根据假设, 得到 $N(\overline{T})\cap R(T^+)=\{0\}$, $D(T^+)=\overline{T}R(T^+)\dot{+}N(T^+)$. 由引理 2.2, $I+AT^+:D(T^+)\to D(T^+)$ 和 $I+T^+A:D(T)\to D(T)$ 均为双射. 进一步可验证 $T^+(I+AT^+)^{-1}$ 和 $(I+T^+A)^{-1}T^+$ 均是可定义的, 且

$$T^+(I+AT^+)^{-1}=(I+T^+A)^{-1}T^+.$$

又由 $N(\overline{T}^+)=N(T^+)$ 和 $\overline{T}^+(I-TT^+)=0$ 及 $R(\overline{T}^+)=R(T^+)$ 和 $(I-\overline{T}^+\overline{T})T^+=0$ 可知, $\overline{T}^+=\overline{T}^+TT^+$ 和 $\overline{T}^+\overline{T}T^+=T^+$. 故 $\overline{T}^++\overline{T}^+\overline{T}T^+-\overline{T}^+TT^+=T^+$, 从而 $\overline{T}^+(I+AT^+)=T^+$. 因此, $\overline{T}^+=T^+(I+AT^+)^{-1}$. 证毕.

下面给出 $\overline{T}^+$ 具有最简表示形式 $\overline{T}^+=T^+(I+AT^+)^{-1}$ 的充要条件.

定理 2.4 设 $T^+\in L(Y,X)$ 为 $T\in L(X,Y)$ 的代数广义逆, $A\in L(X,Y)$ 满足 $D(T)\subseteq D(A)$, $R(T^+)\subseteq D(A)$, $R(A)\subseteq D(T^+)$. 若 $I+AT^+:D(T^+)\to D(T^+)$ 为双射, 则下列命题等价

(1) $B=T^+(I+AT^+)^{-1}=(I+T^+A)^{-1}T^+$ 为 $\overline{T}=T+A$ 的代数广义逆;

(2) $R(\overline{T})=R(\overline{T}T^+)$;

(3) $D(T^+)=R(\overline{T})\dot{+}N(T^+)$;

(4) $R(\overline{T})\cap N(T^+)=\{0\}$;

(5) $N(T^+\overline{T})=N(\overline{T})$;

(6) $D(T)=N(\overline{T})\dot{+}R(T^+)$ 或 $D(T)=N(\overline{T})+R(T^+)$;

(7) $(I+AT^+)^{-1}R(\overline{T})=R(T)$;

(8) $(I+T^+A)^{-1}N(T)=N(\overline{T})$;

(9) $(I+AT^+)^{-1}\overline{T}N(T)\subseteq R(T)$.

证 易见 $B=T^+(I+AT^+)^{-1}=(I+T^+A)^{-1}T^+$ 是可定义的, 且 $R(B)=R(T^+)$, $N(B)=N(T^+)$. 因为

$$\begin{aligned}B\overline{T}B &= (I+T^+A)^{-1}T^+(T+A)T^+(I+AT^+)^{-1}\\ &= (I+T^+A)^{-1}(T^++T^+AT^+)(I+AT^+)^{-1}\\ &= (I+T^+A)^{-1}(I+T^+A)T^+(I+AT^+)^{-1}\\ &= T^+(I+AT^+)^{-1}=B,\end{aligned}$$

所以 B 为 $\overline{T}$ 的代数外逆. 注意到 $R(\overline{T}B)=R(\overline{T}T^+)$ 和 $N(B\overline{T})=N(T^+\overline{T})$, 根据引理 2.1, 我们知 (1)$\sim$(6) 两两等价.

(1) $\Rightarrow$ (7) 若 B 为 $\overline{T}$ 的广义逆, 则

$$\begin{aligned}R(\overline{T}) &= R(\overline{T}B)=\overline{T}R(B)=\overline{T}R(T^+)=\overline{T}R(T^+T)=\overline{T}T^+R(T)\\ &= (\overline{T}T^++I-TT^+)R(T)=(I+AT^+)R(T).\end{aligned}$$

(7) $\Rightarrow$ (8) 显然, $(I+T^+A)N(\overline{T})=[I+T^+(\overline{T}-T)]N(\overline{T})=(I-T^+T)N(\overline{T})\subseteq N(T)$. 另一方面, 由 (7), 对任何 $x\in N(T)$, 有

$$\overline{T}x\in R(\overline{T})\subseteq(I+AT^+)R(T)=\overline{T}T^+R(T)=\overline{T}R(T^+T)=\overline{T}R(T^+).$$

故存在 $y \in R(T^+)$, 使得 $\overline{T}y = \overline{T}x$. 那么 $x - y \in N(\overline{T})$, 且

$$(I + T^+A)(x - y) = (I - T^+T)(x - y) = (I - T^+T)x = x.$$

因此 $N(T) \subseteq (I + T^+A)N(\overline{T})$.

(8) $\Rightarrow$ (4) 任取 $y \in R(\overline{T}) \cap N(T^+)$, 存在 $x \in D(\overline{T})$, 满足 $y = \overline{T}x$ 和 $T^+\overline{T}x = 0$. 因而

$$T(I + T^+A)x = Tx + TT^+Ax = Tx + TT^+\overline{T}x - Tx = 0,$$

即 $(I + T^+A)x \in N(T)$. 根据 (8), $x \in N(\overline{T})$, 故 $y = \overline{T}x = 0$.

(7) $\Rightarrow$ (9) 显然.

(9) $\Rightarrow$ (4) 设 $y \in R(\overline{T}) \cap N(T^+)$, 存在 $x \in D(\overline{T}) = D(T)$ 满足 $y = \overline{T}x$ 和 $T^+\overline{T}x = 0$. 因为 $D(T) = N(T) \dot{+} R(T^+)$, $x = x_1 + x_2$, 这里 $x_1 \in N(T)$, $x_2 \in R(T^+)$. 则

$$(I + AT^+)Tx_2 = [I + (\overline{T} - T)T^+]Tx_2 = \overline{T}T^+Tx_2 = \overline{T}x_2.$$

因而 $(I + AT^+)^{-1}\overline{T}x_2 = Tx_2 \in R(T)$. 由 (9), $(I + AT^+)^{-1}\overline{T}x_1 \in R(T)$. 注意到 $y \in N(T^+)$, 我们得到 $(I + AT^+)y = y = \overline{T}x$, 进而

$$y = (I + AT^+)^{-1}\overline{T}x = (I + AT^+)^{-1}\overline{T}(x_1 + x_2) \in R(T).$$

故 $y \in R(T) \cap N(T^+)$. 根据 $R(T) \cap N(T^+) = \{0\}$ 知, $y = 0$. 证毕.

定理 2.5 设 $T \in L(X, Y)$ 为有限秩算子, $T^+ \in L(Y, X)$ 为 T 的代数广义逆, $A \in L(X, Y)$ 满足 $D(T) \subseteq D(A)$, $R(T^+) \subseteq D(A)$, $R(A) \subseteq D(T^+)$. 若 $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为双射, 则 $B = T^+(I + AT^+)^{-1} = (I + T^+A)^{-1}T^+$ 为 $\overline{T} = T + A$ 的代数广义逆当且仅当

$$\mathrm{Rank}\ \overline{T} = \mathrm{Rank}\ T < +\infty.$$

证 必要性由定理 2.4 的 (1) $\Leftrightarrow$ (7) 可得. 下面证明充分性. 根据 $(I + AT^+)T = T + AT^+T = \overline{T}T^+T$, 有 $T = (I + AT^+)^{-1}\overline{T}T^+T$ 成立. 如果 $\mathrm{Rank}\ \overline{T} = \mathrm{Rank}\ T$, 那么 $\dim R(\overline{T}) = \dim R(T) = \dim R(\overline{T}T^+T)$. 因此 $R(\overline{T}) = R(\overline{T}T^+T) \subseteq R(\overline{T}T^+) \subseteq R(\overline{T})$. 再根据定理 2.4 中的 (1) $\Leftrightarrow$ (2), B 为 $\overline{T}$ 的代数广义逆. 证毕.

类似地, 可以证明

定理 2.6 设 $T^+ \in L(Y, X)$ 为 $T \in L(X, Y)$ 的代数广义逆, $A \in L(X, Y)$ 满足 $D(T) \subseteq D(A)$, $R(T^+) \subseteq D(A)$, $R(A) \subseteq D(T^+)$. 若 $\dim N(T) < +\infty$, $I + AT^+ : D(T^+) \to D(T^+)$ 为双射, 则 $B = T^+(I + AT^+)^{-1} = (I + T^+A)^{-1}T^+$ 为 $\overline{T} = T + A$ 的代数广义逆, 当且仅当

$$\dim N(\overline{T}) = \dim N(T) < +\infty.$$

3 应用

作为进一步的应用, 本节讨论 Banach 空间中广义逆和 Hilbert 空间中 Moore-Penrose 逆的扰动表示. 首先由定理 2.4, 可以得到

定理 3.1 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in C(X,Y)$ 存在广义逆 $T^+ \in C(Y,X)$, $\delta T \in B(X,Y)$ 满足 $R(\delta T) \subseteq D(T^+)$. 若 $\|T^+\delta T\| < 1$, 则下列命题等价

(1) $B = T^+(I+\delta TT^+)^{-1} = (I+T^+\delta T)^{-1}T^+$ 为 $\overline{T} = T+\delta T$ 的广义逆;

(2) $R(\overline{T}) = R(\overline{T}T^+)$;

(3) $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{0\}$;

(4) $N(T^+\overline{T}) = N(\overline{T})$;

(5) $(I+\delta TT^+)^{-1}R(\overline{T}) = R(T)$;

(6) $(I+T^+\delta T)^{-1}N(T) = N(\overline{T})$;

(7) $(I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}N(T) \subseteq R(T)$.

证 根据 $T \in C(X,Y)$ 与 $\delta T \in B(X,Y)$, $\overline{T} = T+\delta T$ 为稠定闭算子. 又在假设 $\|T^+\delta T\| < 1$ 下, 由著名的 Banach 引理, $I+T^+\delta T : X \to X$ 可逆, 且 $(I+T^+\delta T)^{-1}$ 为有界线性算子. 由 T^+ 为稠定闭算子, 容易证明 $B = (I+T^+\delta T)^{-1}T^+$ 也为稠定闭算子. 根据定理 2.4 知, 结论成立. 证毕.

定理 3.2 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in C(X,Y)$ 存在有界广义逆 $T^+ \in B(Y,X)$. 若 $\delta T \in B(X,Y)$ 满足 $\|\delta TT^+\| < 1$, 则下列命题等价

(1) $B = T^+(I+\delta TT^+)^{-1} = (I+T^+\delta T)^{-1}T^+ : Y \to D(T)$ 为 $\overline{T} = T+\delta T$ 的广义逆;

(2) $R(\overline{T}) = R(\overline{T}T^+)$;

(3) $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{0\}$;

(4) $N(T^+\overline{T}) = N(\overline{T})$;

(5) $(I+\delta TT^+)^{-1}R(\overline{T}) = R(T)$;

(6) $(I+T^+\delta T)^{-1}N(T) = N(\overline{T})$;

(7) $(I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}N(T) \subseteq R(T)$;

(8) $X = N(\overline{T}) \oplus \overline{R(T^+)}$ 或 $X = N(\overline{T}) + \overline{R(T^+)}$;

(9) $Y = R(\overline{T}) \oplus N(T^+)$.

证 在假设 $\|\delta TT^+\| < 1$ 下, $I+\delta TT^+ : Y \to Y$ 可逆, 且 $(I+\delta TT^+)^{-1}$ 为有界线性算子. 易见 $B = T^+(I+\delta TT^+)^{-1}$ 为有界线性算子. 若 B 为 $\overline{T}$ 的广义逆, 则根据定理 1.6 和定理 2.4, (2) $\sim$ (9) 均成立. 反之, 若 (2) $\sim$ (7) 中之一成立, 则 (1) 成立. 若 (9) 成立, 则 (3) 成立. 若 $X = N(\overline{T}) + \overline{R(T^+)}$ 成立, 则对任何 $x \in N(T)$, 存在 $x_1 \in N(\overline{T})$, $x_2 \in \overline{R(T^+)}$, 使得 $x = x_1 + x_2$. 从而 $x_2 = x - x_1 \in D(T)$, 且 $x_2 - T^+Tx_2 \in \overline{R(T^+)} \cap N(T) = \{0\}$, 即 $x_2 = T^+Tx_2$. 因此

$$\begin{aligned}(I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}x &= (I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}x_2 = (I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}T^+Tx_2\\ &= (I+\delta TT^+)^{-1}(I+\delta TT^+)TT^+Tx_2 = Tx_2 \in R(T).\end{aligned}$$

故 (7) 成立. 证毕.

当 $T \in B(X,Y)$, $T^+ \in B(Y,X)$ 时, $R(T^+)$ 为闭集. 由定理 3.2, 直接可以得到

定理 3.3 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in B(X,Y)$ 存在广义逆 $T^+ \in B(Y,X)$. 若 $\delta T \in B(X,Y)$ 满足 $\|\delta TT^+\| < 1$. 则下列命题等价

(1) $B = (I+T^+\delta T)^{-1}T^+ = T^+(I+\delta TT^+)^{-1}$ 为 $\overline{T} = T+\delta T$ 的广义逆;

(2) $R(\overline{T}) = R(\overline{T}T^+)$;

(3) $R(\overline{T}) \cap N(T^+) = \{0\}$;

(4) $N(T^+\overline{T}) = N(\overline{T})$;
(5) $X = N(\overline{T}) \oplus R(T^+)$ 或 $X = N(\overline{T}) + R(T^+)$;
(6) $(I+\delta TT^+)^{-1}R(\overline{T}) = R(T)$;
(7) $(I+T^+\delta T)^{-1}N(T) = N(\overline{T})$;
(8) $(I+\delta TT^+)^{-1}\overline{T}N(T) \subseteq R(T)$;
(9) $Y = R(\overline{T}) \oplus N(T^+)$.

注 定理 3.2 和定理 3.3 推广了文 [6, 7, 13–16, 18] 中的相关结果.

定理 3.4 设 X, Y 为 Hilbert 空间, $T \in C(X,Y)$ 存在 Moore-Penrose 逆 $T^\dagger \in B(Y,X)$. 若 $\delta T \in B(X,Y)$ 满足 $\|\delta TT^\dagger\| < 1$, 则 $B = T^\dagger(I+\delta TT^\dagger)^{-1} = (I+T^\dagger\delta T)^{-1}T^\dagger$ 为 $\overline{T} = T+\delta T$ 的 Moore-Penrose 逆当且仅当 $R(\overline{T}) = R(T)$, $N(\overline{T}) = N(T)$.

证 若 $R(\overline{T}) = R(T)$, $N(\overline{T}) = N(T)$ 成立, 则根据定理 3.2, B 为 $\overline{T}$ 的广义逆. 因此

$$X = N(\overline{T}) \oplus \overline{R(B)}, \quad Y = R(\overline{T}) \oplus N(B). \tag{3.1}$$

根据 Moore-Penrose 逆的定义, X 与 Y 分别具有正交分解

$$X = N(T) \oplus^\perp \overline{R(T^\dagger)}, \quad Y = R(T) \oplus^\perp N(T^\dagger).$$

又 $R(T^\dagger) = R(B)$, $N(T^\dagger) = N(B)$, 则 $X = N(\overline{T}) \oplus^\perp \overline{R(B)}$, $Y = R(\overline{T}) \oplus^\perp N(B)$, 即 (3.1) 式中的拓扑分解为正交分解. 因此 B 为 $\overline{T}$ 的 Moore-Penrose 逆. 反之, 若 B 为 $\overline{T}$ 的 Moore-Penrose 逆, 则

$$X = N(\overline{T}) \oplus^\perp \overline{R(B)}, \quad Y = R(\overline{T}) \oplus^\perp N(B).$$

从而 $N(\overline{T}) = R(B)^\perp$, $R(\overline{T}) = N(B)^\perp$. 注意到 $N(T) = R(T^\dagger)^\perp$, $R(T) = N(T^\dagger)^\perp$, $R(T^\dagger) = R(B)$ 和 $N(T^\dagger) = N(B)$, 我们得到 $R(\overline{T}) = R(T)$ 和 $N(\overline{T}) = N(T)$. 证毕.

注 定理 3.4 推广了文 [9, 14–16] 中的相关结果.

参 考 文 献

[1] Nashed M Z, Votruba G F. A unified approach to generalized inverses of linear operators: I. Algebraic, topological, and projectional properties [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80(5): 825–830.

[2] Nashed M Z, Votruba G F. A unified approach to generalized inverses of linear operators: II. Extremal and proximal properties [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80(5): 831–834.

[3] Nashed M Z. Generalized inverses and applications [M]. New York: Academic Press, 1976.

[4] 王玉文. 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[5] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized inverses: theory and applications (2nd ed.)[M]. New York: Wiley, 2003.

[6] Chen G L, Xue Y F. Perturbation analysis for the operator equation $Tx = b$ in Banach spaces [J]. J. Math. Anal. Appl., 1997, 212 (1): 107–125.

[7] Ma J P. Complete rank theorem of advanced calculus and singularities of bounded linear operators [J]. Front. Math. China, 2008, 3(2): 305–316.

[8] Nashed M Z. Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces [J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 1987, 9(3): 261–325.

[9] Ding J. On the expression of generalized inverses of perturbed bounded linear operators [J]. Missouri J. Math. Sci., 2003, 15(1): 40–47.

[10] Du N L. The basic principles for stable approximations to orthogonal generalized inverses of linear operators in Hilbert spaces [J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 2005, 26(6): 675–708.

[11] Du N L. Finite-dimensional approximation settings for infinite-dimensional Moore-Penrose inverses [J]. SIAM J. Numer. Anal., 2008, 46(3): 1454–1482.

[12] 黄强联, 马吉溥, 王丽. Banach 空间中闭线性算子广义预解式存在定理 [J]. 数学年刊, 2011, 32A(5): 635–646.

[13] Huang Q L, Zhai W X. Perturbations and expressions for generalized inverses in Banach spaces and Moore-Penrose inverses in Hilbert spaces of closed linear operators [J]. Linear Algebra Appl., 2011, 435(1): 117–127.

[14] Huang Q L, Zhu L P, Geng W H, Yu J N. Perturbation and expression for inner inverses in Banach spaces and its applications [J]. Linear Algebra Appl., 2012, 436(9): 3715–3729.

[15] Huang Q L, Zhu L P, Jiang Y Y. On the stable perturbation of outer inverses of linear operators in Banach spaces [J]. Linear Algebra Appl., 2012, 437(7): 1942–1954.

[16] Wang Y W, Zhang H. Perturbation analysis for oblique projection generalized inverses of closed linear operators in Banach spaces [J]. Linear Algebra Appl., 2007, 426(1): 1–11.

[17] Xu Q X, Song C N, Wei Y M. The stable perturbation of the Drazin inverse of the square matrices [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2009, 31(3): 1507–1520.

[18] Yang X D, Wang Y W. Some new perturbation theorems for generalized inverses of linear operators in Banach spaces [J]. Linear Algebra Appl., 2010, 433(11): 1939–1949.

THE SIMPLEST EXPRESSION OF THE ALGEBRAIC GENERALIZED INVERSES IN LINEAR SPACES

GUO Zhi-rong[1,2] , HUANG Qiang-lian[1] , ZHANG Li[1]

(*1. School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225002 China*)

(*2. College of Mathematics, Yangzhou Vocational University, Yangzhou 225009 China*)

Abstract: In this paper, the authors study the additivity and expression of algebraic generalized inverses from the view of pure algebra in the framework of linear space. Utilizing the algebraic direct sum decomposition of linear space, we first give the necessary and sufficient condition of the invertibility of $I + AT^+$ and $\overline{T}^+ = T^+(I + AT^+)^{-1}$. We also provide some necessary and sufficient conditions for $\overline{T}^+$ to have the simplest expression. As applications, we discuss the perturbation problem of generalized inverse in Banach space and Moore-Penrose inverse in Hilbert space, which extend and improve many recent results in this topic.

Keywords: algebraic generalized inverse; generalized inverse; Moore-Penrose inverse; the simplest expression; linear space

2010 MR Subject Classification: 47L05; 46A32