

一类推广的 KdV 方程的新行波解

王 鑫, 邢文雅, 李胜军
(海南大学信息科学技术学院, 海南海口 570228)

摘要: 本文研究了一类推广的 KdV 方程的行波解求解的问题. 利用新的 G 展开法, 并借助 Mathematica 计算软件, 获得了该方程的含有多个任意参数的新的行波解, 分别为三角函数解、双曲函数解、有理函数解和指数函数解, 扩大了该类方程的解的范围.

关键词: 推广的 KdV 方程; 新的 G 展开法; 行波解

MR(2010) 主题分类号: 35C07; 35Q53

中图分类号: O175.29

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)04-0859-06

1 引言

本文研究一类推广的 KdV 方程

$$u_t + a(1 + bu^2)u^2u_x + \delta u_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

其中 $\delta \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$ 均为参数. 当 $\delta \in R, a > 0, b < 0$ 时, Dey 求出了该类方程的守恒律和域墙波解^[1]; 在相同条件下, 方程的孤波解的存在性在文献 [2] 中用动力系统分支法得到了证明; 通过利用推广的齐次平衡法和吴氏消元法, 文献 [3] 得到了方程的孤波解的解析表达式; 文献 [4] 通过相似约化, 研究了方程的相似解; 文献 [5] 用首次积分法得到了方程的精确解.

近年来, 对于非线性偏微分方程的精确解的研究, 又涌现出例如双曲函数展开法、Jacobi 椭圆函数法、Riccati 展开法、F 展开法、齐次平衡法、首次积分法等方法 and 技巧. 最近, 王明亮等又提出了一种简洁、有效地求方程精确解的方法, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 展开法^[6-8], 即将方程的行波解用 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 的多项式来表示, 并且其中的 G 满足一类二阶线性常微分方程, 结合齐次平衡法得到了方程的精确行波解.

本文应用 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 展开法的基本思想, 构造 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 展开法, 简称新的 G 展开法, 令其中的 G 满足一类二阶非线性常微分方程, 得到了较 $\left(\frac{G'}{G}\right)$ 展开法有更多自由参数的新的不同的行波解, 从而扩大了方程的解的范围. 本文以此新的 G 展开法, 即 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 展开法, 研究了一类推广的 KdV 方程, 获得了其含有多个任意参数的多种新的行波解.

2 新的 G 展开法

*收稿日期: 2015-06-12 接收日期: 2015-10-19

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461016).

作者简介: 王鑫 (1980-), 女, 北京, 讲师, 主要研究方向: 非线性偏微分方程及其应用.

对于非线性偏微分方程

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0 \quad (2.1)$$

作行波变换, 令 $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, 使上式化为常微分方程

$$P(u, u', u'', \cdots) = 0. \quad (2.2)$$

设方程 (2.2) 的解有如下形式

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right)^i, \quad (2.3)$$

这里 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$, m 为待定常数, 其中非负整数 m 可通过齐次平衡法, 即平衡最高阶非线性项和最高阶线性项得到; $G = G(\xi)$ 满足二阶非线性常微分方程

$$\rho G G'' + \lambda (G')^2 + \mu G G' + \omega G^2 = 0, \quad (2.4)$$

这里 ρ 、 λ 、 μ 及 ω 均为任意常数. 通过借助 Mathematica 软件, 可以求得该方程的解有以下几种情况

① 当 $\rho \neq -\lambda$, $\rho \neq 0$ 且 $4\omega(\rho + \lambda) - \mu^2 > 0$ 时, 方程 (2.4) 的解为

$$G(\xi) = C_2 \cos \left[\frac{1}{2\rho} \sqrt{4\omega(\rho + \lambda) - \mu^2} (\xi - \rho C_1) \right]^{\frac{\rho}{\rho + \lambda}} \exp \left(\frac{-\mu\xi}{2\rho + 2\lambda} \right), \quad (2.5)$$

这里 C_1 、 C_2 为积分常数.

② 当 $\rho \neq -\lambda$, $\rho \neq 0$ 且 $4\omega(\rho + \lambda) - \mu^2 < 0$ 时, 方程 (2.4) 的解为

$$G(\xi) = C_2 \cosh \left[\frac{1}{2\rho} \sqrt{4\omega(\rho + \lambda) - \mu^2} (\xi - \rho C_1) \right]^{\frac{\rho}{\rho + \lambda}} \exp \left(\frac{-\mu\xi}{2\rho + 2\lambda} \right), \quad (2.6)$$

这里 C_1 、 C_2 为积分常数.

③ 当 $\rho \neq -\lambda$ 且 $4\omega(\rho + \lambda) - \mu^2 = 0$, 方程 (2.4) 的解为

$$G(\xi) = C_2 (2\xi - \rho C_1)^{\frac{\rho}{\rho + \lambda}} \exp \left(\frac{-\mu\xi}{2\rho + 2\lambda} \right), \quad (2.7)$$

这里 C_1 、 C_2 为积分常数.

④ 当 $\rho = -\lambda \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$ 时, 方程 (2.4) 的解为

$$G(\xi) = C_2 \exp \left(\frac{-\xi\omega + \lambda C_1 e^{\frac{\xi\mu}{\lambda}}}{\mu} \right), \quad (2.8)$$

这里 C_1 、 C_2 为积分常数.

⑤ 当 $\rho = -\lambda \neq 0$ 且 $\mu = 0$ 时, 方程 (2.4) 的解为

$$G(\xi) = C_2 \exp \left(\frac{\xi^2 \omega}{2\lambda} + C_1 \xi \right), \quad (2.9)$$

这里 C_1 、 C_2 为积分常数.

结合上述 (2.4) 方程的解, 再将 (2.3) 式代入 (2.2) 式, 合并且比较 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 的各项系数, 可得到一组有关 a_i 的代数方程组, 求出其解, 代回 (2.3) 式, 即得原非线性偏微分方程 (2.1) 的精确解.

3 方程的行波解

设方程 (1.1) 有行波解 $u = u(\xi) = u(x - ct)$, 其中 c 表示波速, 是一常数, 则方程可化为

$$-c \frac{du}{d\xi} + a(1 + bu^2)u^2 u' + \delta u''' = 0,$$

两边关于 ξ 进行积分, 并令积分常数为零, 化简得

$$-cu + \frac{a}{3}u^3 + \frac{ab}{5}u^5 + \delta u'' = 0. \quad (3.1)$$

设方程 (3.1) 的解能够表示成多项式 (2.3) 式, 再利用齐次平衡法, 得到 $m = \frac{1}{2}$, 不是整数, 故对方程 (3.1) 作变换, 令 $v = u^2$, 从而方程 (3.1) 化为

$$30\delta vv'' - 15\delta(v')^2 + 12abv^4 + 20av^3 - 60cv^2 = 0. \quad (3.2)$$

设方程 (3.2) 的解能够表示成多项式

$$v(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right)^i,$$

这里 $G = G(\xi)$ 满足二阶非线性常微分方程

$$\rho GG'' + \lambda(G')^2 + \mu GG' + \omega G^2 = 0,$$

其中 ρ 、 λ 、 μ 及 ω 均为任意常数. 利用齐次平衡法, 有 $m + m + 2 = 4m$ 或 $2(m + 1) = 4m$, 得 $m = 1$. 则方程 (3.2) 的解表示为

$$v(\xi) = a_1 \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right) + a_0, \quad (3.3)$$

由方程 (2.4) 和 (3.3) 式, 可得

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= \frac{a_1}{2\rho} (\rho + \lambda - \mu + \omega) \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right)^2 + \frac{a_1}{\rho} (-\rho - \lambda + \omega) \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right) + \frac{a_1}{2\rho} (\rho + \lambda + \mu + \omega), \\ v''(\xi) &= \frac{a_1}{2\rho^2} (\rho + \lambda - \mu + \omega)^2 \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right)^3 + \frac{3a_1}{2\rho^2} (\rho + \lambda - \mu + \omega) (-\lambda - \rho + \omega) \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right)^2 \\ &\quad + \frac{a_1}{2\rho^2} (3\omega^2 - \mu^2 - 2\omega(\rho + \lambda) + 3(\rho + \lambda)^2) \left(\frac{G - G'}{G + G'} \right) \\ &\quad + \frac{a_1}{2\rho^2} (-\rho - \lambda + \omega) (\rho + \lambda + \mu + \omega), \end{aligned}$$

再将 (3.3) 式和上面的 v' 和 v'' 代入 (3.2) 式, 合并 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 的同幂次项, 比较方程两端的系数, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^0 &: -\frac{15\delta a_1^2}{4\rho^2}(\rho+\lambda+\mu+\omega)^2 + \frac{15\delta a_0 a_1}{\rho^2}(-\rho-\lambda-\mu-\omega)(\rho+\lambda-\omega) \\ &\quad - 60ca_0^2 + 20aa_0^3 + 12aba_0^4 = 0, \\ \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^1 &: a_0 a_1 \left(-120c + 45\delta + \frac{15\delta}{\rho^2}(3\lambda^2 - \mu^2 + 6\lambda\rho - 2\lambda\omega - 2\rho\omega + 3\omega^2)\right) \\ &\quad + 60aa_0^2 a_1 + 48aba_0^3 a_1 = 0, \\ \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^2 &: a_1^2 \left(\frac{15\delta}{2\rho^2}(3\lambda^2 - \mu^2 + 6\lambda\rho + 3\rho^2 - 2\lambda\omega - 2\rho\omega + 3\omega^2) - 60c\right) + 60aa_0 a_1^2 \\ &\quad + 72aba_0^2 a_1^2 + \frac{45\delta a_0 a_1}{\rho^2}(\rho+\lambda-\mu+\omega)(-\rho-\lambda+\omega) = 0, \\ \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^3 &: 20aa_1^3 + 48aba_0 a_1^3 - \frac{30\delta a_1^2}{\rho^2}(\rho+\lambda-\omega)(\rho+\lambda-\mu+\omega) \\ &\quad + \frac{15\delta a_0 a_1}{\rho^2}(\rho+\lambda-\mu+\omega)^2 = 0, \\ \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)^4 &: \frac{45\delta a_1^2}{4\rho^2}(\rho+\lambda-\mu+\omega)^2 + 12aba_1^4 = 0. \end{aligned}$$

用 Mathematica 软件对以上代数方程组进行求解, 可得

$$a_1 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2(\rho+\lambda+\mu+\omega)}}, \quad a_0 = -\frac{5}{8b}, \quad c = -\frac{5a}{48b}, \quad (3.4)$$

将 (3.4) 式代入 (3.3) 式, 故得

$$v = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2(\rho+\lambda+\mu+\omega)}} \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right) - \frac{5}{8b},$$

又由 $v = u^2$, 且令 $\theta = \rho + \lambda + \mu + \omega$, 这时有

$$u^2 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2\theta}} \left(\frac{G-G'}{G+G'}\right) - \frac{5}{8b},$$

其中 G 满足方程 (2.4), 从而得到了推广的 KdV 方程 (1.1) 的多个隐式行波解:

① 当 $\rho \neq -\lambda$ 且 $4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2 > 0$ 时, 由 (2.5) 式, 可得方程 (1.1) 的解为

$$u^2 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2\theta}} \frac{2\lambda + \mu + 2\rho + \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} \tan \left[\frac{1}{2\rho} \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} (\xi - \rho C_1) \right]}{2\lambda - \mu + 2\rho - \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} \tan \left[\frac{1}{2\rho} \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} (\xi - \rho C_1) \right]} - \frac{5}{8b},$$

其中 $\xi = x + \frac{5a}{48b}t$. 此为方程的三角函数形式的解.

② 当 $\rho \neq -\lambda$ 且 $4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2 < 0$ 时, 由 (2.6) 式, 可得方程 (1.1) 的解为

$$u^2 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2\theta}} \frac{2\lambda + \mu + 2\rho + \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} \tanh \left[\frac{1}{2\rho} \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} (\xi - \rho C_1) \right]}{2\lambda - \mu + 2\rho - \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} \tanh \left[\frac{1}{2\rho} \sqrt{4\omega(\rho+\lambda) - \mu^2} (\xi - \rho C_1) \right]} - \frac{5}{8b},$$

其中 $\xi = x + \frac{5a}{48b}t$. 此为方程的双曲函数形式的解.

③ 当 $\rho \neq -\lambda$ 且 $4\omega(\rho + \lambda) - \mu^2 = 0$ 时, 由 (2.7) 式, 可得方程 (1.1) 的解为

$$u^2 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2\theta} \frac{(2\lambda + \mu + 2\rho)(2\xi - \rho C_1) - 4\rho}{(2\lambda - \mu + 2\rho)(2\xi - \rho C_1) + 4\rho} - \frac{5}{8b}},$$

其中 $\xi = x + \frac{5a}{48b}t$. 此为方程的有理函数形式的解.

④ 当 $\rho = -\lambda \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$ 时, 由 (2.8) 式, 可得方程 (1.1) 的解为

$$u^2 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2(\mu + \omega)} \frac{(\mu + \omega) - \mu e^{-\frac{\xi\mu}{\rho}} C_1}{(\mu - \omega) + \mu e^{-\frac{\xi\mu}{\rho}} C_1} - \frac{5}{8b}},$$

其中 $\xi = x + \frac{5a}{48b}t$. 此为方程的指数函数形式的解.

⑤ 当 $\rho = -\lambda \neq 0$ 且 $\mu = 0$ 时, 由 (2.9) 式, 可得方程 (1.1) 的解为

$$u^2 = \pm \sqrt{-\frac{5ab}{3\delta} \frac{5\rho}{16b^2\omega} \frac{\rho(1 - C_1) + \xi\omega}{\rho(1 + C_1) - \xi\omega} - \frac{5}{8b}},$$

其中 $\xi = x + \frac{5a}{48b}t$. 此为方程的另一有理函数形式的解.

4 结论

本文借助计算机 Mathematica 软件, 运用新的 G 展开法, 即 $\left(\frac{G-G'}{G+G'}\right)$ 展开法, 得到了一类推广的 KdV 方程的多种新的隐式行波解, 其中包括双曲函数解、三角函数解、有理函数解和指数函数解. 这些精确行波解都含有多个自由的参数, 当这些参数在一定的条件下取不同数值时, 我们可以得到方程更为丰富的解.

参 考 文 献

- [1] Dey B. Domain wall solutions of KdV like equations with higher order nonlinearity[J]. J. Phys. Math. General, 1986, 19(1): 9-12.
- [2] 谢绍龙, 洪晓春. 一类非线性方程的孤立波 [J]. 云南大学学报 (自然科学版), 2001, 23(5): 327-330.
- [3] 刘妍丽, 张健. 一类非线性发展方程的孤波解 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2003, 26(2): 124-126.
- [4] 王鑫, 丁洁. 一类非线性发展方程的相似约化 [J]. 海南大学学报 (自然科学版), 2007, 25(2): 128-133.
- [5] 王鑫. 一类非线性偏微分方程的精确解 [J]. 应用数学, 2013, 26(3): 521-525.
- [6] Wang M L, Zhang J L, Li X Z. Application of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion to travelling wave solutions of the Broer-Kaup and the approximate long water wave equations[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 206: 321-326.
- [7] Wang M L, Li X Z, Zhang J L. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Phys. Lett. A, 2008, 372: 417-423.
- [8] Li L X, Wang M L. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -expansion method and travelling wave solutions for a higher-order nonlinear schrodinger equation[J]. Appl. Math. Comput., 2009, 208: 440-445.
- [9] 曹瑞. 一类广义 Zakharov 方程的精确行波解 [J]. 数学杂志, 2013, 33(5): 837-843.

- [10] Huang J, Liu H. New exact traveling wave solutions for Fisher equation and Burgers-Fisher equation[J]. J. Math., 2011, 31(4): 631–637.
- [11] Rong J, Tang S, Huang W. Bifurcations of traveling wave solutions for the $k(n, 2n, -n)$ equations[J]. J. Math., 2010, 30(4): 603–612.
- [12] 向以华, 石义霞. (2+1) 维色散长波方程的扩展椭圆函数有理展开解法 [J]. 数学杂志, 2009, 29(2): 206–210.

NEW TRAVELLING WAVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF THE GENERALIZED KdV EQUATION

WANG Xin, XING Wen-ya, LI Sheng-jun

(College of Information Science and Technology, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: In this paper, a class of the generalized KdV equation is studied. By new G -expansion method with the aid of computer symbolic system Mathematica, some new travelling wave solutions which involving parameters are obtained. These solutions contain the hyperbolic function solutions, the trigonometric function solutions, the rational function solutions and the exponential function solutions. The solutions of a class of the generalized KdV equation are enriched.

Keywords: the generalized KdV equation; new G -expansion method; travelling wave solution

2010 MR Subject Classification: 35C07; 35Q53