

双指标非交换鞅的一些不等式

尹 磬, 马聪变

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了双指标非交换鞅的一些不等式问题. 利用单指标非交换鞅不等式的方法, 获得了双指标非交换鞅的 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}$ 和 $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ 之间的关系 ($2 \leq p < \infty$). 推广了双指标非交换鞅的 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M})}$ 和 $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ 之间的等价关系 ($2 \leq p \leq 4$).

关键词: von Neumann 代数; 双指标鞅; Burkholder 不等式; 鞅 Hardy 空间

MR(2010) 主题分类号: 46L52; 46L53; 60G42

中图分类号: O177.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)04-0851-08

1 引言

非交换鞅空间理论是非交换数学中分析理论的有机组成部分, 是当前泛函分析领域的前沿研究方向. 从 20 世纪 70 年代, 人们开始研究非交换鞅. 为了研究非交换鞅空间, 需要引进新的思想和方法. 1971 年 Cuculescu^[1] 研究了非交换鞅的弱 (1, 1) 型不等式并提出了著名 Cuculescu 构造以取代停时的方法. 1997 年 Pisier 和 Xu^[2] 取得重大突破, 他通过引进列均方函数与行均方函数对 $p < 2$ 与 $p \geq 2$ 分别定义了恰当的非交换鞅的 Hardy 空间 $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$, 并由此证明 Burkholder-Gundy 鞅不等式的非交换类比. 随后经过众多数学家的努力, 非交换鞅取得重要进展. 到目前为止, 绝大多数经典鞅的不等式都成功过渡到了非交换情形, 例如条件均方函数的 Burkholder 不等式^[3], Doob 极大不等式^[4], Stein 不等式^[2]等.

双指标鞅是单指标鞅的自然推广. 在交换的情形, Weisz 对双指标鞅做了许多工作 (见文 [5]). Weisz 的工作表明, 从单指标到双指标绝不是简单的推广, 实际上很多在单指标鞅研究中常用的方法不能够适用于双指标鞅的情形. 因此常常需要一些新的技巧和方法.

关于双指标非交换鞅的研究目前尚属起步阶段. 本文研究双指标非交换鞅, 证明了双指标非交换鞅的一些不等式. 包括双指标非交换鞅的 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}$ 和 $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ 之间的关系, 双指标非交换序列的 Stein 不等式以及 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M})}$ 和 $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ 之间的等价关系.

2 定义与记号

首先回顾一下关于非交换 L_p -空间的一些基本定义与记号. 设 $(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个非交换概率空间, 这里 $\mathcal{M}$ 是 Hilbert 空间 H 上的 von Neumann 代数, τ 为 $\mathcal{M}$ 上的正规忠实的迹, 满足 $\tau(1) = 1$. 记 $L_0(\mathcal{M})$ 为关于 $(\mathcal{M}, \tau)$ 的可测算子全体组成的拓扑 $*$ -代数. 设 $1 \leq p < \infty$, 令

$$L_p(\mathcal{M}) = \{x \in L_0(\mathcal{M}) : \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}\},$$

*收稿日期: 2015-07-10

接收日期: 2015-09-14

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11271293; 11471251).

作者简介: 尹磬 (1991-), 男, 湖南益阳, 硕士, 主要研究方向: H_p 鞅论.

其中 $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$ 表示 x 的模. 定义

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad x \in L_p(\mathcal{M}),$$

则 $(L_p(\mathcal{M}), \|\cdot\|_p)$ 是 Banach 空间, 称之为关于 $(\mathcal{M}, \tau)$ 的非交换 L_p -空间. 当 $p = \infty$ 时, 规定 $L_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, 且 $L_\infty(\mathcal{M})$ 上的范数 $\|\cdot\|_\infty$ 为算子范数. 设 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 0}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列单调增加的子 von Neumann 代数, 用 $\mathcal{E}_n$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_n$ 的条件期望算子. $L_p(\mathcal{M})$ 中的序列 $x = (x_n)_{n \geq 0}$ 称为是关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 0}$ 的鞅, 若对任意的 $m \geq n$, 有 $\mathcal{E}_n(x_m) = x_n$. 关于非交换 L_p -空间与非交换鞅的更详细的介绍可参见文献 [6].

设 $\mathbb{N}$ 是非负整数的集合, $\mathbb{N}^2 = \{(n_1, n_2) : n_1, n_2 \in \mathbb{N}\}$. 在 $\mathbb{N}^2$ 上定义半序如下: 对任意的 $n = (n_1, n_2), m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$, 定义 $n \leq m$ 当且仅当 $n_1 \leq m_1, n_2 \leq m_2$ 以及 $n < m$ 若 $n \leq m$ 且 $n \neq m$. 设 $(\mathcal{M}_n; n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列关于 $\mathbb{N}^2$ 偏序单调增加的子 von Neumann 代数, 并且 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{M}_n$ 在 $\mathcal{M}$ 中 w^* -稠密. 对任意的 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 用 $\mathcal{E}_n$ 或者 $\mathcal{E}_{n_1, n_2}$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_n$ 的条件期望算子. 一般地, 对于 $\mathcal{M}$ 的任意一列子 von Neumann 代数 $(\mathcal{N}_n; n \geq 0)$, 令 $\bigvee_{n \geq 0} \mathcal{N}_n$ 表示包含 $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{N}_n$ 的最小的 von Neumann 代数. 对每个 $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 定义

$$\mathcal{M}_{n_1, \infty} = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{M}_{n_1, k}, \quad \mathcal{M}_{\infty, n_2} = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{M}_{k, n_2}.$$

以后总是设 $(\mathcal{M}_n; n \in \mathbb{N}^2)$ 满足 (F_4) 条件: 对任意的 $x \in \mathcal{M}$ 和任意的 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$, 有

$$(F_4): \quad \mathcal{E}_n(x) = \mathcal{E}_{n_1, \infty}(\mathcal{E}_{\infty, n_2}(x)) = \mathcal{E}_{\infty, n_2}(\mathcal{E}_{n_1, \infty}(x)).$$

为了方便起见, 规定对任意的 $x \in L_1(\mathcal{M})$, 当 $n_1 = 0$ 或者 $n_2 = 0$ 时, $\mathcal{E}_{n_1, n_2}(x) = 0$.

定义 2.1 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $L_1(\mathcal{M})$ 中的序列. 称 x 为关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 的鞅, 如果满足

$$\mathcal{E}_n(x_m) = x_n, \quad \forall n \leq m.$$

若进一步对每个 $n \in \mathbb{N}^2$, 有 $x_n \in L_p(\mathcal{M}) (1 \leq p \leq \infty)$, 则称 x 为关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 的 L_p -鞅. 此时, 令

$$\|x\|_p = \sup_{n \in \mathbb{N}^2} \|x_n\|_p.$$

若 $\|x\|_p < \infty$, 则称 x 为 L_p -有界鞅.

设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是关于 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 的鞅, $n = (n_1, n_2)$. 令

$$dx_n = x_{n_1, n_2} - x_{n_1-1, n_2} - x_{n_1, n_2-1} + x_{n_1-1, n_2-1}.$$

约定当 $n_1 = 0$ 或者 $n_2 = 0$ 时, $dx_n = 0$, 称 $dx = (dx_n)$ 为 x 的鞅差序列. 容易证明当 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 满足 (F_4) 条件时, 若 $(dx_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是鞅差序列, 则 $\mathcal{E}_n(dx_m) = 0 (\forall n \not\leq m)$.

为了定义关于双指标非交换鞅的 Hardy 空间, 先回顾一下非交换列空间与行空间的定义 (详见文 [6]).

设 $1 \leq p < \infty$, $x = (x_n)$ 是 $L_p(\mathcal{M})$ 中的有限序列. 令

$$\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^c)} = \|(\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p, \quad \|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^r)} = \|(\sum_n |x_n^*|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p,$$

则 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^c)}$ 和 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^r)}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 的有限序列上定义了范数. 相应的完备化空间分别记为 $L_p(\mathcal{M}, l_2^c)$ 和 $L_p(\mathcal{M}, l_2^r)$. 注意到对于 $L_p(\mathcal{M})$ 中的一个序列 (x_n) , 如果 $(\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中有界, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ 存在. 用 $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ 表示这个极限, 则

$$\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^c)} = \|(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

当 $1 \leq p < \infty$ 时, $CR_p[L_p(\mathcal{M})]$ 空间定义如下.

(i) 当 $p \geq 2$ 时, 定义 $CR_p[L_p(\mathcal{M})] = L_p(\mathcal{M}, l_2^c) \cap L_p(\mathcal{M}, l_2^r)$, 赋予范数

$$\|(x_n)\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]} = \max\{\|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^c)}, \|(x_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^r)}\}.$$

(ii) 当 $1 \leq p < 2$ 时, 定义 $CR_p[L_p(\mathcal{M})] = L_p(\mathcal{M}, l_2^c) + L_p(\mathcal{M}, l_2^r)$, 赋予范数

$$\|(x_n)\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]} = \inf_{x_n = y_n + z_n} \{\|(y_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^c)}, \|(z_n)\|_{L_p(\mathcal{M}, l_2^r)}\}.$$

下面定义双指标非交换鞅的 Hardy 空间 $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$. 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个鞅, 令

$$S_{c,(n,n)}(x) = (\sum_{k,l \leq n} |dx_{k,l}|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad S_{r,(n,n)}(x) = (\sum_{k,l \leq n} |dx_{k,l}^*|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

如果 $(S_{c,(n,n)}(x))_{n \geq 1}$ 和 $(S_{r,(n,n)}(x))_{n \geq 1}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中有界, 令

$$S_c(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{c,(n,n)}(x) = (\sum_{k \in \mathbb{N}^2} |dx_k|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$S_r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{r,(n,n)}(x) = (\sum_{k \in \mathbb{N}^2} |dx_k^*|^2)^{\frac{1}{2}},$$

称 $S_c(x)$ 和 $S_r(x)$ 分别为鞅 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 的列均方函数与行均方函数.

定义 2.2 (i) 设 $1 \leq p < \infty$. 定义双指标非交换鞅的列 Hardy 空间,

$$\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^2} : (S_{c,(n,n)}(x))_{n \geq 1} \text{ 在 } L_p(\mathcal{M}) \text{ 中有界, } \|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} = \|S_c(x)\|_p\}.$$

类似地, 定义双指标非交换鞅的行 Hardy 空间.

$$\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^2} : (S_{r,(n,n)}(x))_{n \geq 1} \text{ 在 } L_p(\mathcal{M}) \text{ 中有界, } \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})} = \|S_r(x)\|_p\}.$$

(ii) 定义非交换鞅 Hardy 空间如下.

当 $1 \leq p \leq 2$ 时, 定义 $\mathcal{H}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M}) + \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} = \inf\{\|y\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} + \|z\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})} : x = y + z, y \in \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M}), z \in \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})\}.$$

当 $2 \leq p < \infty$ 时, 定义 $\mathcal{H}_p(\mathcal{M}) = \mathcal{H}_p^c(\mathcal{M}) \cap \mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} = \max\{\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})}, \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})}\}.$$

注 对一个双指标鞅 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 的鞅差序列 $dx = (dx_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$, 把它重新编号变成一个单指标的序列, 则可以把它视为一个单指标序列 $dx = (\tilde{d}x_n)$ (但是要注意的是 $(\tilde{d}x_n)$ 一般不是单指标的鞅差序列). 因此, 无论 $x = (x_n)$ 是单指标鞅还是双指标鞅都有

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} = \|dx\|_{CR_p[L_p(\mathcal{M})]}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

下面定义双指标非交换鞅 Hardy 空间 $h_p(\mathcal{M})$. 由于这里需要考虑双指标有限鞅, 为此先给出双指标有限鞅的知识. 设 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是一个鞅, $k \in \mathbb{N}$, 称形如 $x^{(k)} = (x_{n_1 \wedge k, n_2 \wedge k}, (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2)$ 为停止于 k 的有限鞅.

设 $1 \leq p < \infty$, 对 $L_p(\mathcal{M})$ 中的有限鞅 $x = (x_n)$, 定义

$$\|x\|_{h_p^c(\mathcal{M})} = \|(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p, \quad \|x\|_{h_p^r(\mathcal{M})} = \|(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n^*|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

记 $h_p^c(\mathcal{M})$ 和 $h_p^r(\mathcal{M})$ 分别为按上述范数完备化的 Banach 空间. 对 $L_2(\mathcal{M})$ 中任意的有限鞅 $x = (x_n)$, 令

$$s_c(x) = (\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad s_r(x) = (\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1} |dx_n^*|^2)^{\frac{1}{2}},$$

则 $\|x\|_{h_p^c(\mathcal{M})} = \|s_c(x)\|_p$, $\|x\|_{h_p^r(\mathcal{M})} = \|s_r(x)\|_p$. 还需要考虑 $l_p(L_p(\mathcal{M}))$, 定义

$$l_p(L_p(\mathcal{M})) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^2} : a_n \in L_p(\mathcal{M}), \|a\|_{l_p(L_p(\mathcal{M}))} = (\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \|a_n\|_p^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

记 $h_p^d(\mathcal{M})$ 为 $l_p(L_p(\mathcal{M}))$ 中由所有鞅差序列构成的子空间, 并且定义 $\|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})} = \|dx\|_{l_p(L_p(\mathcal{M}))}$.

定义 2.3 (i) 设 $1 \leq p < 2$. 定义 $h_p(\mathcal{M}) = h_p^d(\mathcal{M}) + h_p^c(\mathcal{M}) + h_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} = \inf_{x=y+z+w} \{\|y\|_{h_p^d(\mathcal{M})} + \|z\|_{h_p^c(\mathcal{M})} + \|w\|_{h_p^r(\mathcal{M})}\}.$$

(ii) 设 $2 \leq p < \infty$. 定义 $h_p(\mathcal{M}) = h_p^d(\mathcal{M}) \cap h_p^c(\mathcal{M}) \cap h_p^r(\mathcal{M})$, 赋予范数

$$\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} = \max\{\|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})}, \|x\|_{h_p^c(\mathcal{M})}, \|x\|_{h_p^r(\mathcal{M})}\}.$$

3 主要结果

在这一部分研究双指标非交换鞅 Hardy 空间的一些不等式, 包括双指标非交换鞅的 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}$ 和 $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ 之间的关系, 双指标非交换序列的 Stein 不等式以及 $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M})}$ 和 $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ 之间的等价关系. 这些结果是关于单指标鞅相应的结果在双指标鞅相应的推广 (见文 [3]).

下面的定理 3.1 是这一节的主要结果.

定理 3.1 设 $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 是 $L_p(\mathcal{M})$ 中的鞅. 则

(i) 当 $1 \leq p \leq 2$ 时, 有 $\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq C_p \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}$;

(ii) 当 $2 \leq p < \infty$ 时, 有 $\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leq \tilde{C}_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}$,

其中 C_p 和 $\tilde{C}_p$ 是只依赖于 p 的常数.

为证明上述定理, 需要用到下面的一系列引理.

引理 3.2 ^[3,4] 设 $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 1}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列单调递增的子 von Neumann 代数, $\mathcal{E}_n$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_n$ 的条件期望算子. 则对任意的有限序列 $(a_n) \subset L_p^+(\mathcal{M})$, 有

- (i) 当 $0 < p < 1$ 时, $\|\sum_n a_n\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\sum_n \mathcal{E}_{n-1}(a_n)\|_p$;
- (ii) 当 $1 \leq p < \infty$ 时, $\|\sum_n \mathcal{E}_n(a_n)\|_p \leq C_p \|\sum_n a_n\|_p$,

这里 C_p 是只依赖于 p 的正常数.

下面把引理 3.2 推广到双指标的情形.

引理 3.3 设 $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一列关于 $\mathbb{N}^2$ 偏序单调递增的子 von Neumann 代数, $\mathcal{E}_n$ 表示 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}_n$ 的条件期望算子, 则对任意的有限双指标序列 $a = (a_n) \subset L_p^+(\mathcal{M})$, 有

- (i) 当 $0 < p < 1$ 时, $\|\sum_n a_n\|_p \leq 2^{\frac{2}{p}} \|\sum_n \mathcal{E}_{n-1}(a_n)\|_p$;
- (ii) 当 $1 \leq p < \infty$ 时, $\|\sum_n \mathcal{E}_n(a_n)\|_p \leq C_p^2 \|\sum_n a_n\|_p$,

这里 C_p 与引理 3.2 中的 C_p 一致.

证 (i) 利用 (F₄) 条件和引理 3.2, 有

$$\begin{aligned} \|\sum_n a_n\|_p &= \|\sum_{n_1} (\sum_{n_2} a_n)\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\sum_{n_1} \mathcal{E}_{n_1-1, \infty}(\sum_{n_2} a_n)\|_p \\ &= 2^{\frac{1}{p}} \|\sum_{n_2} (\sum_{n_1} \mathcal{E}_{n_1-1, \infty}(a_n))\|_p \leq 2^{\frac{2}{p}} \|\sum_{n_2} \mathcal{E}_{\infty, n_2-1}(\sum_{n_1} \mathcal{E}_{n_1-1, \infty}(a_n))\|_p \\ &= 2^{\frac{2}{p}} \|\sum_{n_1} \sum_{n_2} \mathcal{E}_{n_1-1, \infty}(\mathcal{E}_{\infty, n_2-1}(a_n))\|_p = 2^{\frac{2}{p}} \|\sum_n \mathcal{E}_{n-1}(a_n)\|_p. \end{aligned}$$

(ii) 证明方法与 (i) 的证明是类似的. 证毕.

推论 3.4 (双指标序列的 Stein 不等式) 设 $2 \leq p < \infty$, 则对 $L_p(\mathcal{M})$ 中任意的有限双指标序列 (a_n) , 有

$$\|(\sum_n |\mathcal{E}_n(a_n)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p^2 \|(\sum_n |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p,$$

这里 C_p 与引理 3.3 中的 C_p 一致.

证 利用引理 3.3 和不等式 $\mathcal{E}(x)^* \mathcal{E}(x) \leq \mathcal{E}(|x|^2)$, 得到

$$\begin{aligned} \|(\sum_n |\mathcal{E}_n(a_n)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p &= \|\sum_n |\mathcal{E}_n(a_n)|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_n \mathcal{E}_n |a_n|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_p^2 \|\sum_n |a_n|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} = C_p^2 \|(\sum_n |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p. \end{aligned}$$

定理证毕.

引理 3.5 设 $1 \leq p < \infty$. 则对任意的有限双指标序列 $(x_n) \subset L_p(\mathcal{M})$, 有

(i) 当 $2 \leq p < \infty$ 时,

$$\min\{\|(\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p, \|(\sum_n |x_n^*|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p\} \geq (\sum_n \|x_n\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) 当 $1 \leq p \leq 2$ 时,

$$\max\{\|(\sum_n |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p, \|(\sum_n |x_n^*|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p\} \leq (\sum_n \|x_n\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

证 (i) 将 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^2}$ 进行重新编号为一个单指标的序列, 再利用非交换单指标的结论 (见文 [7]), 就得到所要证明的不等式.

(ii) 证明方法与 (i) 的证明是类似的. 引理证毕.

定理 3.1 的证明 (i) 先考虑有限秩的情形. 设 $x = (x_n)$ 为 $h_p(\mathcal{M})$ 中停止于 k 的有限秩. 设 $x = y + z + w$ 是 x 的一个分解, 其中 y, z 分别为 $h_p^c(\mathcal{M})$ 和 $h_p^r(\mathcal{M})$ 中的有限秩, $w \in h_p^d(\mathcal{M})$, 满足 $dw_k = 0, \forall k \notin (n, n)$. 由于 $0 < \frac{p}{2} < 1$, 由引理 3.3 (i), 有

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} &= \|(\sum_{n_1, n_2 \leq k} |dy_{n_1, n_2}|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p = \|\sum_{n_1, n_2 \leq k} |dy_{n_1, n_2}|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2^{\frac{2}{p}} \|\sum_{n_1, n_2 \leq k} \mathcal{E}_{(n_1, n_2)-1} |dy_{n_1, n_2}|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{p}} \|y\|_{h_p^c(\mathcal{M})}. \end{aligned}$$

类似地, 可以证明 $\|z\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})} \leq 2^{\frac{2}{p}} \|z\|_{h_p^r(\mathcal{M})}$.

接下来证明 $\|w\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} \leq \|w\|_{h_p^d(\mathcal{M})}$. 由定义知道

$$\|w\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} = \|S_{c, (k, k)}(w)\|_p = \|(\sum_{n_1, n_2 \leq k} |dw_{n_1, n_2}|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p.$$

利用引理 3.5 (ii), 得到

$$\|w\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} \leq (\sum_{n_1, n_2 \leq k} \|dw_{n_1, n_2}\|_p^p)^{\frac{1}{p}} = \|w\|_{h_p^d(\mathcal{M})}.$$

令 $C_p = \max\{2^{\frac{2}{p}}, 1\}$, 则

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq C_p (\|y\|_{h_p^c(\mathcal{M})} + \|z\|_{h_p^r(\mathcal{M})} + \|w\|_{h_p^d(\mathcal{M})}).$$

对 x 的所有分解取下确界, 得到 $\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq C_p \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}$.

一般情形, 设 $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^2} \in h_p(\mathcal{M})$. 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, 令 $x^{(k)} = (x_{n_1 \wedge k, n_2 \wedge k})_{n \in \mathbb{N}^2}$. 由上面证明得到 $\|x^{(k)}\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq C_p \|x^{(k)}\|_{h_p(\mathcal{M})}$. 再令 $k \rightarrow \infty$ 得到 $\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq C_p \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}$.

(ii) 与 (i) 的证明类似, 也先考虑有限秩的情形. 设 $x = (x_n)$ 为 $\mathcal{H}_p(\mathcal{M})$ 中停止于 k 的有限秩. 由引理 3.3 (ii) 得到

$$\begin{aligned} \|x\|_{h_p^c(\mathcal{M})} &= \|(\sum_{n_1, n_2 \leq k} \mathcal{E}_{(n_1, n_2)-1} |dx_{n_1, n_2}|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \\ &= \|\sum_{n_1, n_2 \leq k} \mathcal{E}_{(n_1, n_2)-1} |dx_{n_1, n_2}|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_p^2 \|\sum_{n_1, n_2 \leq k} |dx_{n_1, n_2}|^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}} = C_p^2 \|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})}. \end{aligned}$$

通过取伴随得到 $\|x\|_{h_p^r(\mathcal{M})} \leq C_p^2 \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})}$. 其次证明 $\|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})} \leq \|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})}$. 由引理 3.5(i) 得到

$$\|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})} = (\sum_{n_1, n_2 \leq k} \|dx_{n_1, n_2}\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|(\sum_{n_1, n_2 \leq k} |dx_{n_1, n_2}|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p = \|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})}.$$

令 $\tilde{C}_p = \max\{C_p^2, 1\}$, 由上面的证明得到

$$\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leq \tilde{C}_p \max(\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})}, \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})}) = \tilde{C}_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}.$$

一般情形, 先考虑有限鞅, 再取极限即得到所要的结论. 定理证毕.

下面转到双指标非交换鞅的 Burkholder 不等式. 要用到下面的双指标非交换鞅的 Burkholder-Gundy 不等式.

引理 3.6 ^[7] 设 $1 < p < \infty$. $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $L_p(\mathcal{M})$ 中的鞅, 则 x 是 L_p -有界鞅当且仅当 $x \in h_p(\mathcal{M})$. 更确切地说, 有

$$\alpha_p^{-1} \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq \|x\|_p \leq \beta_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})},$$

这里的 α_p, β_p 是只与 p 有关的正常数.

定理 3.7 设 $2 \leq p \leq 4$, $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$ 是 $L_p(\mathcal{M})$ 中的鞅, 则 x 是 L_p -有界鞅当且仅当 $x \in h_p(\mathcal{M})$. 更确切地说, 有

$$(\alpha_p \tilde{C}_p)^{-1} \|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leq \|x\|_p \leq \beta_p \sqrt{1 + 2\beta_{\frac{p}{2}}} \|x\|_{h_p(\mathcal{M})},$$

这里的 α_p, β_p 为引理 3.6 中的常数, $\tilde{C}_p$ 为定理 3.1(ii) 中的常数.

证 首先证明第一个不等式. 事实上, 由定理 3.1(ii) 和引理 3.6 可知

$$\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leq \tilde{C}_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq \alpha_p \tilde{C}_p \|x\|_p.$$

接下来证明第二个不等式. 由引理 3.6 知 $\|x\|_p \leq \beta_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}$. 下面只需再证明

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq \sqrt{1 + 2\beta_{\frac{p}{2}}} \|x\|_{h_p(\mathcal{M})}.$$

不妨设 $\|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leq 1$. 有

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} = \|S_c(x)\|_p = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^2} |dx_n|^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}}.$$

令 $|dx_n|^2 = \mathcal{E}_{n-1}|dx_n|^2 + dy_n$ ($n \in \mathbb{N}^2$), 这里 $dy_n = |dx_n|^2 - \mathcal{E}_{n-1}|dx_n|^2$. 注意到 $\frac{p}{2} \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \|S_c(x)\|_p^2 &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1}|dx_n|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}^2} dy_n \right\|_{\frac{p}{2}} \\ &\leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^2} \mathcal{E}_{n-1}|dx_n|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} + \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}^2} dy_n \right\|_{\frac{p}{2}} \\ &= \|s_c(x)\|_p^2 + \|y\|_{\frac{p}{2}} \leq 1 + \|y\|_{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

这里 y 是一个 $L_{\frac{p}{2}}$ -鞅. 注意到 $1 \leq \frac{p}{2} \leq 2$, 利用引理 3.5 (ii) 和引理 3.6, 得到

$$\begin{aligned} \|y\|_{\frac{p}{2}} &\leq \beta_{\frac{p}{2}} \|y\|_{\mathcal{H}_{\frac{p}{2}}(\mathcal{M})} \leq \beta_{\frac{p}{2}} \|y\|_{h_{\frac{p}{2}}^d(\mathcal{M})} \\ &= \beta_{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \| |dx_n|^2 - \mathcal{E}_{n-1}|dx_n|^2 \|_{\frac{p}{2}}^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2\beta_{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^2} \|dx_n\|_p^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} = 2\beta_{\frac{p}{2}} \|x\|_{h_p^d(\mathcal{M})}^2 \leq 2\beta_{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

因此 $\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})} \leq \sqrt{1+2\beta_{\frac{p}{2}}}$. 通过取伴随可证 $\|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})} \leq \sqrt{1+2\beta_{\frac{p}{2}}}$. 因此

$$\|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} = \max\{\|x\|_{\mathcal{H}_p^c(\mathcal{M})}, \|x\|_{\mathcal{H}_p^r(\mathcal{M})}\} \leq \sqrt{1+2\beta_{\frac{p}{2}}}.$$

定理证毕.

由定理 3.7 和定理 3.1(ii) 得到如下推论.

推论 3.8 设 $2 \leq p \leq 4$, 对任意的 L_p -有限鞅 $x = (x_n, n \in \mathbb{N}^2)$, 有

$$(\alpha_p \beta_p \sqrt{1+2\beta_{\frac{p}{2}}})^{-1} \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})} \leq \|x\|_{h_p(\mathcal{M})} \leq C_p \|x\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}.$$

证 第二个不等式直接由定理 3.1 得到. 对于第一个不等式, 由引理 3.6 和定理 3.7 得到. 证毕.

参 考 文 献

- [1] Cuculescu I. Martingales on von Neumann algebras[J]. J. Multi. Anal., 1971, 1: 17–27.
- [2] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative martingale inequalities[J]. Comm. Math. Phys., 1997, 189: 667–698.
- [3] Junge M, Xu Q. Noncommutative Burkholder/Rosenthal inequalities[J]. Ann. Prob., 2003, 31: 948–995.
- [4] Junge M. Doob's inequalities for non-commutative martingales[J]. J. Reine Angew. Math., 2002, 549: 149–190.
- [5] Weisz F. Martingale Hardy spaces and their application in Fourier analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [6] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative L_p -spaces[M]. Vol. II, Holland: Elsevier, 2003.
- [7] 曹芳. 双指标非交换鞅的收敛性和不等式 [J]. 数学杂志, 2015, 35(6): 1511–1520.

INEQUALITIES OF TWO-PARAMETER NONCOMMUTATIVE MARTINGALES

YIN Di, MA Cong-bian

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, we discuss the inequalities of two-parameter noncommutative martingales. By using the inequalities of one-parameter noncommutative martingales methods, we obtain the relation between $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p(\mathcal{M})}$ and $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ of two-parameter noncommutative martingales ($2 \leq p < \infty$), which generalize the equivalence relation between $\|\cdot\|_{L_p(\mathcal{M})}$ and $\|\cdot\|_{h_p(\mathcal{M})}$ of two-parameter noncommutative martingales ($2 \leq p \leq 4$).

Keywords: von Neumann algebra; two-parameter martingales; Burkholder inequalities; martingale Hardy spaces

2010 MR Subject Classification: 46L52; 46L53; 60G42