Vol. 37 (2017)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类 λ - 对数 Bazilevic 函数的 Fekete-Szegö 不等式

鲍春梅, 李书海, 马丽娜
(赤峰学院数学与统计学院, 内蒙古 赤峰 024000)

摘 要: 本文研究了一类 λ - 对数 Bazilevic 函数的 Fekete-Szegö不等式. 利用分类讨论的方法获得了 $|a_3-\mu a_2^2|$ 的精确估计, 推广了一些已有的相关结果.

关 键 词: 解析函数; λ - 对数 Bazilevic 函数; 从属于; Fekete-Szegö不等式
MR(2010) **主题分类号**: 30C45 **中 图 分 类 号**: O174.51
文献标识码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2017)04-0845-06

1 引言

设 S 表示单位圆盘 $E=\{z:|z|<1\}$ 内形如 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 的单叶解析函数类的全体. S^*,C 和 K 分别表示通常的星像函数类, 凸函数类和近于凸函数类, 它们都是 S 的子类.

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 E 内解析, 若存在 E 内满足 $|\varphi(z)|\le|z|$ 的解析函数 $\varphi(z)$ (不必单叶), 使得 $f(z)=g(\varphi(z))$, 则称 $f(z)$ 从属于 $g(z)$, 记为 $f(z)\prec g(z)$.

Fekete 和 Szegö于 1933 年提出函数族 S 上的系数泛函 $|a_3-\mu a_2^2|$ 的精确估计问题, 并得到结果 [1]

$$|a_3-\mu a_2^2|\le 1+2\exp\left(\frac{-2\mu}{1-\mu}\right),\ 0\le\mu<1,$$

且对任意的 $\mu\in[0,1)$, 等号均能成立.

在文献 [2–8] 中分别研究了某些星像函数类和近于凸函数类的 Fekete-Szegö不等式. 本文引进一类 λ - 对数 Bazilevic 函数, 讨论该函数类的 Fekete-Szegö不等式, 并得到对应的极值函数.

定义 设 $\lambda\ge0,\alpha\ge0,-1\le B<A\le1$, 若存在 $g(z)\in S^*$, 使得 $f(z)\in S$, 且满足条件

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\cdot\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\cdot\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha}\right)^{\lambda}\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\quad(z\in E),$$

则称 $f(z)$ 为 λ - 对数 Bazilevic 函数, 这类函数记为 $L(\lambda,\alpha,A,B)$, 其中的幂函数取主值.

下面对函数类 $L(\lambda,\alpha,A,B)$ 中建立 Fekete-Szegö 不等式, 为此需要如下引理.

引理 1 [9] 设 $\varphi(z)=d_1z+d_2z^2+\cdots$ 在 E 内解析且满足 $|\varphi(z)|<|z|$, 则

$$|d_1|\le1,\quad |d_2|\le1-|d_1|^2.$$

*收稿日期: 2015-05-04 接收日期: 2015-08-06
基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金资助 (2014MS0101).
作者简介: 鲍春梅 (1962–), 女, 蒙古族, 内蒙古赤峰, 教授, 主要研究方向: 复分析及其应用.

引理 2 [10] 设 $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots$ 在 E 内解析且对任意 $z\in E$, 满足 $\mathrm{Re}p(z)>0$, 则

$$|p_k|\le 2\quad(k\ge 1),\qquad \left|p_2-\frac{p_1^2}{2}\right|\le 2-\frac{|p_1|^2}{2}.$$

2 主要结果及证明

定理 设 $\lambda\ge 0,\alpha>1,-1\le B<A\le 1$, 若 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in L(\lambda,\alpha,A,B)$, 则对任意实数 μ, 有

$$\begin{aligned}&(2+\alpha)(1+2\lambda)|a_3-\mu a_2^2|\\ \le\ &\begin{cases}\alpha(1+2\lambda)\\ +\frac{(A-B)|A+B|}{2}+\frac{[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]^2[(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)]}{2(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}, & \mu<\mu_1,\\ (A-B)+\alpha(1+2\lambda)\\ +\frac{2\alpha^2(1+\lambda)^2(2-|A+B|)[(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)]}{(2-|A+B|)(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2-(A-B)[(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)]}, & \mu_1\le\mu\le\mu_2,\\ (A-B)+\alpha(1+2\lambda), & \mu_2\le\mu\le\mu_3,\end{cases}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mu_1&=\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]-(2-|A+B|)(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]},\\ \mu_2&=\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)},\\ \mu_3&=\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)[1+2\alpha(1+\lambda)^2]+(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)[1+2\alpha(1+\lambda)^2]}.\end{aligned}$$

证 因为 $f(z)\in L(\lambda,\alpha,A,B)$, 所以存在 $g(z)=z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots\in S^*$ 和 E 内满足条件 $|\varphi(z)|\le|z|$ 的解析函数 $\varphi(z)=d_1z+d_2z^2+\cdots$, 使得

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\cdot\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}\cdot\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right)^{\alpha}\right)^{\lambda}=\frac{1+A\varphi(z)}{1+B\varphi(z)}.$$

将 $f(z)=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nz^n, g(z)$ 和 $\varphi(z)$ 的幂级数展开式代入上式, 经过一些运算可得

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{(A-B)d_1+\alpha(1+\lambda)b_2}{(1+\lambda)(1+\alpha)},\\ (2+\alpha)(1+2\lambda)a_3&=\alpha(1+2\lambda)b_3+\frac{\alpha(\alpha-1)(1+3\lambda)}{2(1+\alpha)^2}b_2^2+(A-B)d_2\\ &\quad+\frac{\alpha(A-B)(3+\alpha)(1+3\lambda)}{(1+\alpha)^2(1+\lambda)}b_2d_1\\ &\quad-\frac{1}{2}\left((A^2-B^2)-\frac{(A-B)^2(3+\alpha)(1+3\lambda)}{(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}\right)d_1^2.\end{aligned}$$

令 $x=\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)}{(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}$, 则由以上两式可得

$$\begin{aligned}(2+\alpha)(1+2\lambda)(a_3-\mu a_2^2) &= \left[\alpha(1+2\lambda)b_3+\frac{\alpha^2(1+\lambda)^2x-\alpha(1+3\lambda)}{2}b_2^2\right]\\ &\quad +(A-B)\left[d_2-\left(\frac{A+B}{2}-\frac{(A-B)}{2}x\right)d_1^2\right]\\ &\quad +\alpha(A-B)(1+\lambda)xd_1b_2.\end{aligned}$$

因为

$$e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)=z+a_2e^{i\theta}z^2+a_3e^{2i\theta}z^3+\cdots$$

仍属于 $L(\lambda,\alpha,A,B)$, 所以不失一般性, 可以假定 $a_3-\mu a_2^2\geq 0$. 下面估计 $\mathrm{Re}(a_3-\mu a_2^2)$.

由于 $g(z)\in S^*$, 所以存在 E 内具有正实部的解析函数 $p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots$, 使得 $zg'(z)=g(z)p(z)$, 比较系数可得 $b_2=p_1, b_3=\frac{1}{2}(p_2+p_1^2)$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[\alpha(1+2\lambda)b_3+\frac{\alpha^2(1+\lambda)^2x-\alpha(1+3\lambda)}{2}b_2^2\right]\\ =\ &\frac{\alpha(1+2\lambda)}{2}\mathrm{Re}(p_2-\frac{p_1^2}{2})+\frac{\alpha}{4}[2\alpha(1+\lambda)^2x+1]\mathrm{Re}p_1^2\\ \leq\ &\frac{\alpha(1+2\lambda)}{2}(2-\frac{|p_1|^2}{2})+\frac{\alpha}{4}[2\alpha(1+\lambda)^2x+1]\mathrm{Re}p_1^2\\ =\ &\alpha(1+2\lambda)(1-\rho^2)+\alpha[2\alpha(1+\lambda)^2x+1]\rho^2\cos 2\phi,\end{aligned}$$

其中 $b_2=p_1=2\rho e^{i\phi}$, $0\leq\rho\leq 1$.

$$\begin{aligned}&(A-B)\mathrm{Re}\left[d_2-\left(\frac{A+B}{2}-\frac{(A-B)}{2}x\right)d_1^2\right]\\ \leq\ &(A-B)-\frac{A-B}{2}(2-|A+B|)|d_1|^2+\frac{(A-B)^2}{2}x\mathrm{Re}d_1^2\\ =\ &(A-B)-\frac{A-B}{2}(2-|A+B|)r^2+\frac{(A-B)^2}{2}xr^2\cos 2\theta,\end{aligned}$$

其中 $d_1=re^{i\theta}$, $0\leq r\leq 1$. 所以

$$(2+\alpha)(1+2\lambda)\mathrm{Re}(a_3-\mu a_2^2)\leq\Psi(x),$$

其中

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \alpha(1+2\lambda)(1-\rho^2)+\alpha[2\alpha(1+\lambda)^2x+1]\rho^2\cos 2\phi+(A-B)-\frac{A-B}{2}(2-|A+B|)r^2\\ &\quad+\frac{(A-B)^2}{2}xr^2\cos 2\theta+2\alpha(A-B)(1+\lambda)x\rho r\cos(\phi+\theta).\end{aligned}$$

(1) 当 $\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]-(2-|A+B|)(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]}\leq\mu\leq\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)}$ 时, $0\leq x\leq$

$\frac{2-|A+B|}{(A-B)+2\alpha(1+\lambda)}$, 有

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\leq \alpha[(1+2\lambda)+2\alpha(1+\lambda)^2x]+(A-B)-\frac{A-B}{2}[(2-|A+B|)\\&\quad -(A-B)x\cos 2\theta]r^2+2\alpha(A-B)(1+\lambda)xr\\&= \alpha[(1+2\lambda)+2\alpha(1+\lambda)^2x]+(A-B)+\frac{2\alpha^2(A-B)(1+\lambda)^2x^2}{(2-|A+B|)-(A-B)x\cos 2\theta}\\&\quad -\frac{A-B}{2}[(2-|A+B|)-(A-B)x\cos 2\theta]\left(r-\frac{2\alpha(1+\lambda)x}{(2-|A+B|)-(A-B)x\cos 2\theta}\right)^2\\&\leq \alpha[(1+2\lambda)+2\alpha(1+\lambda)^2x]+(A-B)+\frac{2\alpha^2(A-B)(1+\lambda)^2x^2}{(2-|A+B|)-(A-B)x}\\&= (A-B)+\alpha(1+2\lambda)+\frac{2\alpha^2(1+\lambda)^2(2-|A+B|)x}{(2-|A+B|)-(A-B)x}\\&= \frac{2\alpha^2(1+\lambda)^2(2-|A+B|)[(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)]}{(2-|A+B|)(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2-(A-B)[(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)]}\\&\quad +(A-B)+\alpha(1+2\lambda).\end{aligned}$$

当 $\mu_1\leq\mu\leq\mu_2$ 时, 不存在对应的极值函数.

(2) 当 $\mu\leq\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]-(2-|A+B|)(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]}$ 时, $x\geq\frac{2-|A+B|}{(A-B)+2\alpha(1+\lambda)}$, 令 $x_0=\frac{2-|A+B|}{(A-B)+2\alpha(1+\lambda)}$, 则由 (1) 可得

$$\begin{aligned}\Psi(x_0) &\leq (A-B)+\alpha(1+2\lambda)+\frac{2\alpha^2(1+\lambda)^2(2-|A+B|)x_0}{(2-|A+B|)-(A-B)x_0}\\&\leq (A-B)+\alpha(1+2\lambda)+\alpha(1+\lambda)(2-|A+B|),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Psi(x_0)+(x-x_0)\big(2\alpha^2(1+\lambda)^2\rho^2\cos 2\phi\\&\quad +\frac{(A-B)^2}{2}r^2\cos 2\theta+2\alpha(A-B)(1+\lambda)r\rho\cos(\phi+\theta)\big)\\&\leq \Psi(x_0)+(x-x_0)\left(2\alpha^2(1+\lambda)^2+\frac{(A-B)^2}{2}+2\alpha(A-B)(1+\lambda)\right)\\&\leq (A-B)+\alpha(1+2\lambda)+\alpha(1+\lambda)(2-|A+B|)+\frac{x-x_0}{2}[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]^2\\&= \alpha(1+2\lambda)+\frac{(A-B)|A+B|}{2}+\frac{[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]^2x}{2}\\&= \alpha(1+2\lambda)+\frac{(A-B)|A+B|}{2}\\&\quad +\frac{[(A-B)+2\alpha(1+\lambda)]^2[(3+\alpha)(1+3\lambda)-2\mu(2+\alpha)(1+2\lambda)]}{2(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2},\end{aligned}$$

当 $\mu\leq\mu_1$ 时, 不存在对应的极值函数.

(3) 当 $\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)}\leq\mu\leq\frac{(3+\alpha)(1+3\lambda)[1+2\alpha(1+\lambda)^2]+(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2}{2(2+\alpha)(1+2\lambda)[1+2\alpha(1+\lambda)^2]}$ 时, $-\frac{1}{1+2\alpha(1+\lambda)^2}\leq x\leq 0$, 有

$$\Psi(0)=\alpha(1+2\lambda)(1-\rho^2)+\alpha\rho^2\cos 2\phi+(A-B)-\frac{A-B}{2}(2-|A+B|)r^2\leq(A-B)+\alpha(1+2\lambda).$$

令 $x_1=-\frac{1}{1+2\alpha(1+\lambda)^2}$, 则

$$\begin{aligned}
&\Psi(x_1)-[(A-B)+\alpha(1+2\lambda)]\\
=\;&-\alpha(1+2\lambda)\rho^2+\alpha[2\alpha(1+\lambda)^2x_1+1]\rho^2\cos 2\phi\\
&-\frac{A-B}{2}[(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta]r^2+2\alpha(A-B)(1+\lambda)x_1\rho r\cos(\phi+\theta)\\
=\;&-\alpha(1+2\lambda)\rho^2+\alpha[2\alpha(1+\lambda)^2x_1+1]\rho^2\cos 2\phi+\frac{2\alpha^2(A-B)(1+\lambda)^2x_1^2\rho^2\cos^2(\phi+\theta)}{(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta}\\
&-\frac{A-B}{2}[(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta]\left(r-\frac{2\alpha(1+\lambda)x_1\rho\cos(\phi+\theta)}{(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta}\right)^2\\
\leq\;&-\alpha(1+2\lambda)\rho^2+\alpha[2\alpha(1+\lambda)^2x_1+1]\rho^2\cos 2\phi+\frac{2\alpha^2(A-B)(1+\lambda)^2x_1^2\rho^2\cos^2(\phi+\theta)}{(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta}\\
=\;&-\alpha\rho^2\left\{(1+2\lambda)-[2\alpha(1+\lambda)^2x_1+1]\cos 2\phi-\frac{2\alpha(A-B)(1+\lambda)^2x_1^2\cos^2(\phi+\theta)}{(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta}\right\}\\
=\;&-\frac{2\alpha\rho^2}{[(2-|A+B|)-(A-B)x_1\cos 2\theta][1+2\alpha(1+\lambda)]^2}\\
&\times\{[(\lambda+\sin^2\phi)+\alpha(1+\lambda)^2(1+2\lambda)]\\
&\cdot[(2-|A+B|)(1+2\alpha(1+\lambda)^2)+(A-B)\cos 2\theta]-\alpha(A-B)(1+\lambda)^2\cos^2(\phi+\theta)\}.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
M(A-B)\;=\;&[(\lambda+\sin^2\phi)+\alpha(1+\lambda)^2(1+2\lambda)]\\
&\times[(2-|A+B|)(1+2\alpha(1+\lambda)^2)+(A-B)\cos 2\theta]\\
&-\alpha(A-B)(1+\lambda)^2\cos^2(\phi+\theta),
\end{aligned}$$

则 $M(A-B)$ 是 $A-B$ 的一次函数, 且

$$\begin{aligned}
M(0)\;=\;&(2-|A+B|)(1+2\alpha(1+\lambda)^2)[(\lambda+\sin^2\phi)+\alpha(1+\lambda)^2(1+2\lambda)]\geq 0,\\
M(2)\;=\;&2[(\lambda+\sin^2\phi)+\alpha(1+\lambda)^2(1+2\lambda)]\cdot[1+2\alpha(1+\lambda^2+\cos 2\theta)]\\
&-2\alpha(1+\lambda)^2\cos^2(\phi+\theta)\\
=\;&4[(\lambda+\sin^2\phi)+\alpha(1+\lambda)^2(1+2\lambda)]\cdot[\alpha(1+\lambda)^2+\cos^2\theta]\\
&-2\alpha(1+\lambda)^2(\cos^2\phi\cos^2\theta-2\cos\phi\cos\theta\sin\phi\sin\theta+\sin^2\phi\sin^2\theta)\\
\geq\;&4\alpha(1+\lambda)^2(\sin^2\phi+\cos^2\theta)-2\alpha(1+\lambda)^2\\
&(\cos^2\phi\cos^2\theta-2\cos\phi\cos\theta\sin\phi\sin\theta+\sin^2\phi\sin^2\theta)\\
\geq\;&4\alpha(1+\lambda)^2(\sin^2\phi\sin^2\theta+\cos^2\phi\cos^2\theta)\\
&-2\alpha(1+\lambda)^2(\cos^2\phi\cos^2\theta-2\cos\phi\cos\theta\sin\phi\sin\theta+\sin^2\phi\sin^2\theta)\\
=\;&2\alpha(1+\lambda)^2(\sin\phi\sin\theta+\cos\phi\cos\theta)^2\\
\geq\;&0.
\end{aligned}$$

故当 $0<A-B<2$ 时, $M(A-B)\geq 0$, 从而 $\Psi(x_1)\leq(A-B)+\alpha(1+2\lambda)$. 对于 $0\leq t\leq 1$,

有

$$\begin{aligned}&\Psi(tx_1)\leq t\Psi(x_1)+(1-t)\Psi(0)\\ \leq\ & t[(A-B)+\alpha(1+2\lambda)]+(1-t)[(A-B)+\alpha(1+2\lambda)]=(A-B)+\alpha(1+2\lambda).\end{aligned}$$

当 $b_2=0,b_3=1,d_1=0,d_2=1$ 时等号成立. 对应的极值函数为

$$\{[(f(z))^{\alpha}]'\}^{1-\lambda}\left\{\left[(zf'(z))^{\alpha}\right]'\right\}^{\lambda}=\alpha z^{\alpha-1}\left(\frac{1+Az^2}{1+Bz^2}\right)\left(\frac{(1+z^2)^{\lambda}}{(1-z^2)^{1+\lambda}}\right)^{\alpha}.$$

综上所述, 本定理得证.

参 考 文 献

[1] Fekete M, Szegö G. Eine Bermaerkung uber ungerade schlichte functions[J]. London Math. Soc., 1933, 8: 85–89.

[2] 刘名生. 强拟星函数的 Fekete-Szegö不等式 [J]. 数学研究与评论, 2000, 20(4): 591–595.

[3] London R R. Inequalities for close-to-convex functions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, 117(4): 947–950.

[4] 鲍春梅, 李书海. 一类 β 级扩展的 Bazilevic 函数及其 Fekete-Szegö问题 [J]. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2010(3): 7–10.

[5] Gao Chunyi. Fekete-Szegö problem for strongly Bazilevic functions[J]. Northeast Math., 1996, 12(4): 469–474.

[6] 张洪光, 李书海. 关于 Bazilevic 函数族的一个扩展及其 Fekete-Szegö问题 [J]. 纯粹数学与应用数学学报, 2008, 24(1): 167–173.

[7] 崔志峰, 刘名生. 用卷积定义的解析函数子类的 Fekete-Szegö不等式 [J]. 数学杂志, 2011, 31(5): 955–961.

[8] 刘名生. Bazilevic 函数类的子类的性质 [J]. 数学杂志, 2001, 21(1): 33–37.

[9] 夏道明, 张开明. 从属函数的一些不等式 [J]. 数学学报, 1958, 8(3): 408–412.

[10] Pommerenke C H (杨维奇译). 单叶函数 [M]. 北京: 科学出版社, 1987.

FEKETE-SZEGÖ INEQUALITY FOR A CLASS OF λ-LOGARITHMIC BAZILEVIC FUNCTIONS

BAO Chun-mei, LI Shu-hai, MA Li-na

(*School of Mathematics and Statistics, Chifeng University, Chifeng 024000, China*)

Abstract: In this paper, we discuss the Fekete-Szegö inequality of a class of λ-logarithmic Bazilevic function. Using the methods of the classification, we obtain the accurate estimation of $|a_3-\mu a_2^2|$, which generalizes some known results.

Keywords: analytic function; λ-logarithmic Bazilevic function; subordinate; Fekete-Szegö inequality

2010 MR Subject Classification: 30C45