Vol. 37 ( 2017 )
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# 一类四阶离散哈密顿系统周期解的存在性

金盼盼, 王智勇

(南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

**摘 要**: 本文研究了一类四阶离散哈密顿系统周期解的存在性问题. 利用临界点理论中的极大极小方法, 通过引入两个不同的控制函数, 得到了新的可解性条件, 并且利用这些条件得到了新的存在性结果.

**关 键 词**: 离散哈密顿系统; 周期解; 鞍点定理; 可解性条件

MR(2010) **主题分类号**: 39A23; 58E50 **中 图 分 类 号**: O175.12

**文献标识码**: A **文章编号**: 0255-7797(2017)03-0549-09

## 1 引言及主要结果

考虑非线性四阶离散哈密顿系统

$$\Delta^4 u(t-2) + \nabla F(t, u(t)) = 0, \quad t \in Z, \tag{1.1}$$

这里 $\Delta u(t) = u(t+1) - u(t)$, $\Delta^2 u(t) = \Delta(\Delta u(t))$, $F: Z \times R^N \to R$, $F(t,x)$ $\forall t \in Z$ 关于 $x$ 是连续可微的, 并且 $\forall x \in R^N$ 关于 $t$ 是 $T$ 周期的, 其中 $T$ 是正整数, $Z$ 是整数集, $\nabla F(t,x)$ 表示 $F(t,x)$ 在 $x$ 的梯度.

哈密顿系统的动力学性质的研究是非线性科学领域中的重要课题之一. 哈密顿系统周期解的研究被认为是研究动力学系统的动力学性质的第一步, 因此研究哈密顿系统周期解的存在性和多重性问题, 对揭示复杂事物的本质具有重要的理论意义和应用价值. 对于二阶离散哈密顿系统, 已经有许多学者利用临界点理论中的方法来研究其周期解的存在性 [1−7,13]. 早在 1980 年, Rabinowitz 在文献 [10] 中借助于临界点理论, 首次给出了一个次二次条件, 即存在常数 $M_1 > 0$, $0 < \mu < 2$ 使得 $\forall |x| \geqslant M_1$, $\forall t \in [0, T]$, 有

$$0 < (x, \nabla F(t,x)) \leqslant \mu F(t,x). \tag{1.2}$$

从此以后, 次二次条件不断的被推广和丰富, 并且得到了许多有意义的结果 [1, 3, 11, 13]. 特别的, 在文献 [11] 中, 王和肖通过引入一个控制函数, 在更一般的次二次增长条件下考虑了二阶哈密顿系统周期解的存在性问题.

**定义 1.1** 连续函数空间 $\mathcal{H}_1$ 是这样的函数集合: $\forall \theta_1 \in \mathcal{H}_1$, 存在常数 $M_2 > 0$, 满足

(i) $\forall t \in R^+$, 有 $\theta_1(t) > 0$;

(ii) 当 $t \to +\infty$ 时, 有 $\displaystyle\int_{M_2}^{t} \frac{1}{s\theta_1(s)} \to +\infty$.

*收稿日期: 2015-10-19 接收日期: 2016-02-18
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11571176).
作者简介: 金盼盼 (1990–), 女, 江苏淮安, 硕士, 主要研究方向: 非线性泛函分析.

**定义 1.2** 连续函数空间 $\mathcal{H}_2$ 是这样的函数集合: $\forall \theta_2 \in \mathcal{H}_2$, 存在常数 $M_3>0$, 满足

(i) $\forall t \in R^+$, 有 $\theta_2(t)>0$;

(ii) $0<\displaystyle\int_{M_3}^{+\infty} \frac{1}{s\theta_2(s)}ds<+\infty$;

(iii) 当 $t\to+\infty$ 时, 有 $\frac{\theta_2(t)}{t^2}\to 0$.

本文受次二次条件 (1.2) 和文献 [11, 12] 的启发, 通过引入两个新的控制函数, 得到了一些新的可解性条件, 并在此条件下利用临界点理论研究四阶离散哈密顿系统 (1.1) 周期解的存在性, 有下面的结论:

**定理 1.3** 假设 $F$ 满足下面的条件:

(F1) 存在正整数 $T$, 使得 $F(t+T,x)=F(t,x)$, $\forall\,(t,x)\in Z\times R^N$;

(F2) 存在函数 $\theta_1(|x|)\in\mathcal{H}_1$ 以及常数 $M_2>0$, 使得 $\forall |x|\geqslant M_2$, $t\in Z[1,T]$, 有

$$(x,\nabla F(t,x))\geqslant\left(2-\frac{1}{\theta_1(|x|)}\right)F(t,x),$$

其中 $\theta_1(|x|)$ 满足 $0<\frac{1}{\theta_1(|x|)}<2$;

(F3) 当 $|x|\to+\infty$ 时, $\sum\limits_{t=1}^{T}\frac{F(t,x)}{\theta_1(|x|)}\to-\infty$;

(F4) 对所有的 $t\in Z[1,T]$, 当 $|x|\to+\infty$ 时, 有 $F(t,x)\leqslant 0$,

则问题 (1.1) 至少有一个 $T$ 周期解.

**注 1.4** (a) 令 $\inf\limits_{|x|\geqslant M_2}\frac{1}{\theta_1(|x|)}=k$, 其中 $k$ 是常数. 由定义 1.1 可知, $k\geqslant 0$.

(b) 定理 1.3 的结果是新的, 存在函数 $F$ 满足定理 1.3 中的所有条件. 例如, 设 $T=6$,

$$F(t,x)=g(t)\frac{|x|^2}{\ln(1+|x|^2)},$$

其中 $g(t)=\begin{cases}-\sin\frac{2\pi t}{T}, & t\in Z[1,3],\\ 0, & t\in Z[4,6].\end{cases}$ 令 $\theta_1(|x|)=\frac{1}{\ln(1+|x|^2)}$, 容易验证 $F$ 满足定理 1.3 中所有条件.

**定理 1.5** 假设 $F$ 满足 (F1), (F4) 以及下面的条件:

(F2)* 存在函数 $\theta_2(|x|)\in\mathcal{H}_2$ 以及常数 $M_3>0$, 使得 $\forall|x|\geqslant M_3$, $t\in Z[1,T]$, 有

$$(x,\nabla F(t,x))\geqslant\left(2-\frac{1}{\theta_2(|x|)}\right)F(t,x);$$

(F3)* 当 $|x|\to+\infty$ 时, $\sum\limits_{t=1}^{T}\frac{F(t,x)}{\theta_2(|x|)}\to-\infty$;

(F5) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\inf\frac{F(t,x)}{|x|^2}>-\frac{1}{2}\lambda_1$, 其中 $\lambda_1=2-2\cos\omega$, $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

则问题 (1.1) 至少有一个 $T$ 周期解.

**注 1.6** (a) 由定义 1.2 中的 (ii) 可知当 $t\to+\infty$ 时, $\theta_2(t)\to+\infty$. 这与注 1.4 (a) 中的控制函数 $\theta_1(t)$ 有本质的不同.

(b) 定理 1.5 的结果也是新的, 并且不同于定理 1.3, 存在函数 $F$ 满足定理 1.5 中的所有条件. 例如, 设 $T=6$,

$$F(t,x)=k(t)\left(|x|^2+|x|^{\frac{3}{2}}\right)+1,$$

其中 $k(t) = \begin{cases} \lambda \sin\frac{2\pi t}{T}, & t\in Z[1,3], \\ 0, & t\in Z[4,6], \end{cases}$ 并且 $-\frac{1}{2}\lambda_1 < \lambda < 0$, 令 $\theta_2(|x|) = |x|^{\frac{1}{2}}$, 容易验证 $F(t,x)$ 满足定理 1.5 中的所有条件.

## 2 准备工作

方便起见, 定义 $C_i\,(i = 1,2,3,\cdots)$ 为一系列正常数. 首先陈述一些基本概念. 设空间 $H_T$ 为

$$H_T = \{u : Z \to R^N \,|\, u(t+T) = u(t), \forall\, t\in Z\}.$$

$\forall\, u, v \in H_T$, 可赋予其内积

$$\langle u,v\rangle = \sum_{t=1}^{T}(u(t),v(t)).$$

由此其范数可表示为

$$\|u\| = \left(\sum_{t=1}^{T}|u(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall\, u\in H_T,$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 和 $|\cdot|$ 分别表示 $R^N$ 中内积和范数. 易知 $(H_T, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是有限维的 Hilbert 空间, 并且与 $R^{NT}$ 是线性同构的. 定义 $\|u\|_\infty := \max\limits_{t\in Z[1,T]}|u(t)|$, 对于正整数 $T$, 由文献 [1], 容易得到

$$\|u\|_\infty \leqslant \|u\|. \tag{2.1}$$

定义 $H_T$ 上的能量泛函 $\varphi$ 为

$$\varphi(u) := \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2 u(t)|^2 + \sum_{t=1}^{T}F(t,u(t)),$$

则 $\forall\, u, v\in H_T$, 有

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \sum_{t=1}^{T}(\Delta^2 u(t), \Delta^2 v(t)) + \sum_{t=1}^{T}(\nabla F(t,u(t)), v(t)).$$

由文献 [12] 知道问题 (1.1) 的 $T$ 周期解对应于泛函 $\varphi$ 的临界点.

对于有限维空间 $H_T$, 有如下结果.

**引理 2.1** [12] $H_T$ 的子空间 $N_k$ 定义为 $N_k := \{u\in H_T|\Delta^4 u(t-2) = \lambda_k u(t)\}$, 其中 $\lambda_k = 2\cos k\omega - 8\cos k\omega + 6$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $k\in Z[0,[T/2]]$, $[\cdot]$ 表示高斯函数, 有

(1) $N_k \perp N_j$, $k\neq j$, $k, j\in Z[0,[T/2]]$;

(2) $H_T = \bigoplus\limits_{k=0}^{[T/2]} N_k$.

**引理 2.2** [12] 设 $H_k = \bigoplus\limits_{j=0}^{k} N_j$, $H_k^{\perp} = \bigoplus\limits_{j=k+1}^{[T/2]} N_j$, $k\in Z[0,[T/2]-1]$, 则有

$$\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2 u(t)|^2 \leqslant \lambda_k\|u\|^2, \quad \forall u\in H_k,$$

$$\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2 u(t)|^2 \geqslant \lambda_{k+1}\|u\|^2, \quad \forall u\in H_k^{\perp}.$$

**定义 2.3** [8] 设 $X$ 是一个实 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,R)$, 如果 $\{u_n\}\in X$, $\varphi(u_n)$ 有界, $\varphi'(u_n)\to 0\,(n\to+\infty)$ 蕴含 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 $\varphi$ 满足 Palais-Smale 条件 (简称 PS 条件).

**定义 2.4** [8] 设 $X$ 是一个实 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,R)$, 如果 $\{u_n\}\in X$, $\varphi(u_n)$ 有界, $||\varphi'(u_n)||(1+||u_n||)\to 0\,(n\to+\infty)$ 蕴含 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 $\varphi$ 满足 Cerami 条件 (简称 C 条件).

**引理 2.5** [8] (鞍点定理) 设 $X$ 是一个 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,R), X=X^+\oplus X^-$, 及 $\dim X^-<+\infty$, 且 $\inf\limits_{X^+}\varphi>\sup\limits_{S_R^-}\varphi$, 这里 $S_R^-=\{u\in X^-:|u|=R\}$. 令

$$\begin{aligned}&B_R^-=\{u\in X^-:|u|\leqslant R\};\\&M=\{g\in C(B_R^-,X):g(s)=s,s\in S_R^-\};\\&c=\inf_{g\in M}\max_{s\in B_R^-}\varphi(g(s)).\end{aligned}$$

则当 $\varphi$ 满足 (PS) 条件时, $c$ 是 $\varphi$ 的临界值.

**注 2.6** 文献 [9] 表明, 鞍点定理在更弱的 (C) 条件下依然成立.

**引理 2.7** 假设 $F(t,x)$ 满足 (F1) 和 (F2), $\forall x\in R^N$ 和所有的 $t\in Z[1,T]$, 有

$$F(t,x)\geqslant-\frac{C_1}{M_2^2}|x|^2G(|x|)-C_2,$$

这里

$$G(|x|)=\exp\left(-\int_{M_2}^{|x|}\frac{1}{t\theta_1(t)}dt\right).$$

**证** 令 $f(s)=F(t,sx),\forall s\geqslant\frac{M_2}{|x|}$, 根据 (F2), 有

$$\begin{aligned}f'(s)&=\frac{1}{s}(\nabla F(t,sx),sx)\geqslant\frac{1}{s}\left(2-\frac{1}{\theta_1(s|x|)}\right)F(t,sx)\\&=\frac{1}{s}\left(2-\frac{1}{\theta_1(s|x|)}\right)f(s).\end{aligned}$$

设

$$g(s)=f'(s)-\frac{1}{s}\left(2-\frac{1}{\theta_1(s|x|)}\right)f(s),\tag{2.2}$$

则 $g(s)\geqslant 0$. 解上述一阶线性常微分方程 (2.2), 有

$$f(s)=\left(\int_{\frac{M_2}{|x|}}^{s}\frac{g(r)}{r^2G(r|x|)}dr+C^*\right)s^2G(s|x|),$$

这里 $C^*=\frac{f\left(\frac{M_2}{|x|}\right)|x|^2}{M_2^2}$. 注意到 $g(s)$ 是非负的, 可知

$$f(s)\geqslant\frac{f\left(\frac{M_2}{|x|}\right)|x|^2}{M_2^2}s^2G(s|x|),\quad\forall s\geqslant\frac{M_2}{|x|}.$$

因此

$$F(t,x)=f(1)\geqslant \frac{F\left(t,\frac{M_2}{|x|}\right)}{M_2^2}|x|^2G(|x|),\quad \forall |x|\geqslant M_2. \tag{2.3}$$

进一步, 根据 (F1), 对所有的 $t\in Z[1,T]$, 有

$$\left|F\left(t,\frac{M_2x}{|x|}\right)\right|\leqslant C_1. \tag{2.4}$$

因此由 (2.3), (2.4) 式以及 (F1), 得到 $\forall x\in R^N$ 和所有的 $t\in Z[1,T]$, 有

$$F(t,x)\geqslant -\frac{C_1}{M_2^2}|x|^2G(|x|)-C_2.$$

**注 2.8** 根据 $\theta_1$ 的性质, 当 $|x|\to+\infty$ 时, 有 $G(|x|)\to 0$, 并且由 $\frac{1}{\theta_1}$ 的范围以及 $(t^2G(t))'=tG(t)\big(2-\frac{1}{\theta_1(t)}\big)>0$ 可知, 函数 $t^2G(t)$ 关于 $t$ 是递增的.

## 3 定理证明

**定理 1.3 的证明** 首先证明 $\varphi$ 满足 (C) 条件. 假设 $\{u_n\}$ 是 $\varphi$ 的 (C) 序列, 即 $\varphi(u_n)$ 有界, 并且当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to 0$, 因此 $\forall n\in N$, 存在常数 $L>0$ 使得

$$|\varphi(u_n)|\leqslant L,\quad \|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\leqslant L. \tag{3.1}$$

由 (F1) 和 (F2) 可知 $\forall x\in R^N$, $t\in Z[1,T]$, 有

$$C_3+(\nabla F(t,x),x)\geqslant\left(2-\frac{1}{\theta_1(|x|)}\right)F(t,x). \tag{3.2}$$

利用 (3.1) 和 (3.2) 式, $\forall n\in N$, 有

$$\begin{aligned}3L&\geqslant \|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|)-2\varphi(u_n)\geqslant\langle\varphi'(u_n),u_n\rangle-2\varphi(u_n)\\&=\sum_{t=1}^{T}[(\nabla F(t,u_n(t)),u_n(t))-2F(t,u_n(t))]\geqslant-\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u_n)}{\theta_1(|u_n|)}-C_3T.\end{aligned}$$

因此结合 (3.3) 式, $\forall n\in N$, 可得

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u_n)}{\theta_1(|u_n|)}\geqslant -C_4. \tag{3.3}$$

因为 $H_T$ 是有限维的, 只需证明 $\{u_n\}$ 有界即可. 否则, 不妨设当 $n\to+\infty$ 时, 有 $\|u_n\|\to+\infty$. 令 $v_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则 $\|v_n\|=1$, 即 $\{v_n\}$ 有界, 则存在收敛子列, 仍记为 $\{v_n\}$, 使得在 $H_T$ 上, $v_n\to v_0$. 令 $v_n=\bar v_n+\tilde v_n$, 其中 $\tilde v_n=\frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}v_n(t)$, 所以 $\forall n\in N$, 有 $\bar v_n\in H_0$, $\tilde v_n\in H_0^{\perp}$. 显然, 当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\bar v_n\to\bar v_0, \tag{3.4}$$

其中 $\bar{v}_0=\frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}v_0(t)$. 由 (2.1), 引理 2.7 和注 2.8 可知

$$\begin{aligned}
L\geqslant\varphi(u_n)&=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2+\sum_{t=1}^{T}F(t,u_n(t))\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2-\sum_{t=1}^{T}\frac{C_1}{M_2^2}|u_n|^2G(|u_n|)-C_2T\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2-C_5\|u_n\|_\infty^2G(\|u_n\|_\infty)-C_6\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2-C_5\|u_n\|^2G(\|u_n\|)-C_6.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

将 (3.6) 式两边同除 $\|u_n\|^2$, 则注 2.8 可知当 $n\to+\infty$ 时, $\|\Delta^2v_n\|\to0$. 由引理 2.2, 对所有的 $n\in N$, 有 $\lambda_1\|\tilde{v}_n\|^2\leqslant\|\Delta^2\tilde{v}_n\|^2=\|\Delta^2v_n\|^2$, 结合 (3.5) 式, 当 $n\to+\infty$ 时, 有 $v_n\to\bar{v}_0$. 从而 $v_0=\bar{v}_0,\quad T|\bar{v}_0|^2=\|\bar{v}_0\|^2=1$, 所以当 $n\to+\infty$ 时, $|u_n(t)|\to+\infty$. 利用 (F3) 得到

$$\lim_{|u_n(t)|\to+\infty}\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u_n(t))}{\theta_1(|u_n(t)|)}\to-\infty.$$

这与 (3.4) 式矛盾. 因此 $\{u_n\}$ 是有界的, 则 $\varphi$ 满足条件 (C).

下面证明 $\varphi$ 满足引理 2.5 的几何条件. 根据引理 2.5, 只需证明

($\varphi$1) 在 $H_0^\perp$ 上, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时, 有 $\varphi(u)\to+\infty$;

($\varphi$2) 在 $H_0$ 上, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时, 有 $\varphi(u)\to-\infty$.

对 $u\in H_0^\perp$, 根据 (2.1) 式, 引理 2.2, 引理 2.7 以及注 2.8, 有

$$\begin{aligned}
\varphi(u)&=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u(t)|^2+\sum_{t=1}^{T}F(t,u(t))\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2-\sum_{t=1}^{T}\frac{C_1}{M_2^2}|u_n|^2G(|u_n|)-C_2T\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2-C_5\|u_n\|_\infty^2G(\|u_n\|_\infty)-C_6\\
&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2-C_5\|u_n\|^2G(\|u_n\|)-C_6\\
&\geqslant\left[\frac{1}{2}\lambda_1-C_5G(\|u_n\|)\right]\|u_n\|^2-C_6.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

因此 $\forall u\in H_0^\perp$, 由 (3.7) 式和注 2.8 以及 $\lambda_1>0$, 有, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时, $\varphi(u)\to+\infty$, 即 ($\varphi$1) 成立.

另一方面, 对 $u\in H_0$, 因为 $0<\frac{1}{\theta_1(|x|)}<2$, 由 (F3), (F4), 当 $|u|\to+\infty$ 时, 有

$$\varphi(u)=\sum_{t=1}^{T}F(t,u(t))\leqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u(t))}{\theta_1(|u(t)|)}\to-\infty.$$

这表明 ($\varphi2$) 成立. 根据引理 2.5, 得到问题 (1.1) 至少有一个 $T$ 周期解.

**定理 1.5 的证明** 类似定理 1.3 的证明, 容易得到, $\forall\, n\in N$, 有

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u_n)}{\theta(|u_n|)}\geqslant-C_7. \tag{3.7}$$

由定义 1.2 中的 (iii) 以及 (2.1) 式可知 $\forall\varepsilon>0$, 存在常数 $M_4>M_3>0$, 使得 $\forall|u_n|\geqslant M_4$, 有

$$\theta(|u_n|)\leqslant\varepsilon|u_n|^2\leqslant\varepsilon\|u_n\|_\infty^2\leqslant\varepsilon\|u_n\|^2. \tag{3.8}$$

由 (F4) 可知存在常数 $M_5>M_4>0$, 使得 $\forall|u_n|\geqslant M_5$, 有 $F(t,u_n)\leqslant0$. 令 $\Omega_{1n}=\{t\in Z[1,T]:|u_n|\geqslant M_5\}$, $\Omega_{2n}=\{t\in Z[1,T]:|u_n|\leqslant M_5\}$, $m=\min\limits_{|s|\leqslant M_5}\theta_2(|s|)$. 根据 (3.8) 和 (3.9) 式有

$$\begin{aligned}-C_7\leqslant\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u_n)}{\theta_2(|u_n|)}&=\sum_{t\in\Omega_{1n}}\frac{F(t,u_n)}{\theta_2(|u_n|)}+\sum_{t\in\Omega_{2n}}\frac{F(t,u_n)}{\theta_2(|u_n|)}\\&\leqslant\sum_{t\in\Omega_{1n}}\frac{F(t,u_n)}{\varepsilon\|u_n\|^2}+\sum_{t\in\Omega_{2n}}\frac{C_8}{m},\end{aligned}$$

则有

$$\sum_{t\in\Omega_{1n}}F(t,u_n)\geqslant-C_9\varepsilon\|u_n\|^2,$$

那么结合 (F1), 有

$$\sum_{t=1}^{T}F(t,u_n)\geqslant-C_9\varepsilon\|u_n\|^2-C_{10}, \tag{3.9}$$

由 (3.1) 和 (3.10) 式可知

$$\begin{aligned}L\geqslant\varphi(u_n)&=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2u_n(t)|^2+\sum_{t=1}^{T}F(t,u_n(t))\\&\geqslant\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta u_n(t)|^2-C_9\varepsilon\|u_n\|^2-C_{10}.\end{aligned}$$

假设当 $n\to+\infty$ 时, $\|u_n\|\to+\infty$. 类似定理 1.3 的证明, 容易得到, 当 $n\to+\infty$ 时, $|u_n(t)|\to+\infty$. 因此由 (F3)* 有

$$\lim_{|u_n(t)|\to+\infty}\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u_n(t))}{\theta_2(|u_n(t)|)}\to-\infty.$$

这与 (3.8) 式矛盾. 因此, $\{u_n\}$ 是有界的, 则 $\varphi$ 满足条件 (C).

令 $\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \lim\limits_{|x|\to+\infty}\inf \frac{F(t,x)}{|x|^2}\right)$, 由 (F5) 可知 $\epsilon > 0$, 并且存在常数 $M_6 > 0$, 使得 $\forall |x| \geqslant M_6$, 有

$$F(t,x) \geqslant \left(\epsilon - \frac{1}{2}\lambda_1\right)|x|^2. \tag{3.10}$$

进一步, 根据 (F1), $\forall |x| \leqslant M_6$ 和所有的 $t \in Z[1,T]$, 有

$$F(t,x) \geqslant -C_{11}. \tag{3.11}$$

因此结合 (3.11), (3.12) 式和 (F1), 得到 $\forall x \in R^N$ 和所有的 $t \in Z[1,T]$, 有

$$F(t,x) \geqslant \left(\epsilon - \frac{1}{2}\lambda_1\right)|x|^2 - C_{11}. \tag{3.12}$$

对 $u \in H_0^{\perp}$, 当 $\|u\| \to +\infty$ 时, 根据 (3.13) 式以及引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}|\Delta^2 u(t)|^2 + \sum_{t=1}^{T}F(t,u(t)) \\
&\geqslant \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 + \sum_{t=1}^{T}\left[\left(\epsilon - \frac{1}{2}\lambda_1\right)|u|^2 - C_{11}\right] \\
&\geqslant \frac{1}{2}\lambda_1\|u\|^2 + \left(\epsilon - \frac{1}{2}\lambda_1\right)\|u\|^2 - C_{12} \\
&\geqslant \epsilon\|u\|^2 - C_{12}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

因此 $\forall u \in H_0^{\perp}$, 由 (3.14) 式和 $\epsilon > 0$, 有当 $\|u\| \to +\infty$ 时, $\varphi(u) \to +\infty$, 即 ($\varphi$1) 成立.

另一方面, 对 $u \in H_0$, 根据 (F3)*, (F4) 以及注 1.6 中的 $(a)$, 当 $|u| \to +\infty$ 时, 有

$$\varphi(u) = \sum_{t=1}^{T}F(t,u(t)) = \theta_2(|u(t)|)\sum_{t=1}^{T}\frac{F(t,u(t))}{\theta_2(|u(t)|)} \to -\infty.$$

这表明 ($\varphi$2) 成立. 根据引理 2.5, 得到问题 (1.1) 至少有一个 $T$ 周期解.

## 参 考 文 献


[1] Xue Y F, Tang C L. Existence of a periodic solution for subquadratic second-order discrete Hamiltonian system[J]. Nonl. Anal., 2007, 67(7): 2072–2080.

[2] Yu J S, Zheng B. Multiplicity of periodic solutions for second-order discrete Hamiltonian systems with a small forcing term[J]. Nonl. Anal., 2008, 69(9): 3016–3029.

[3] Xue Y F, Tang C L. Multiple periodic solutions for superquadratic second-order discrete Hamiltonian systems[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 196(2): 494–500.

[4] Long Y H. Applications of Clark duality to periodic solutions with minimal period for discrete Hamiltonian systems[J]. J. Math. Anal, Appl., 2008, 342(1): 726–741.

[5] 张申贵. 二阶非自治离散 Hamiltonian 系统的多重周期解 [J]. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2012, 37(9): 13–18.

[6] Deng X Q, Shi H P, Xie X L. Periodic solutions of second order discrete Hamiltonian systems with potential indefinite in sign[J]. Appl. Math. Comput., 2011, 218(1): 148–156.

[7] Ye Y W, Tang C L. Periodic solutions for second-order discrete Hamiltonian system with a change of sign in potential[J]. Appl. Math. Comput., 2013, 219(12): 6548–6555.

[8] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[9] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. CBMS Regional Conf. Ser. Math. Vol. 65, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986.

[10] Rabinowitz P H. On subharmonic solutions of Hamiltonian systems[J]. Comm. Pure Appl. Math., 1980, 33: 609–633.

[11] Wang Z Y, Xiao J Z. On periodic solutions of subquadratic second-order non-autonomous Hamiltonian system[J]. Appl. Math. Lett., 2015, 40: 72–77.

[12] Zhou J W, Li Y K. Multiple periodic solutions for a fourth-order discrete Hamiltonian system[J]. Surv. Math. Appl., 2010, 5: 333–344.

[13] 贺铁山, 陈文革. 二阶非线性差分方程多重周期解的存在性 [J]. 数学杂志, 2009, 29(3): 300–306.

# EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR FOURTH ORDER DISCRETE HAMILTONIAN SYSTEMS

JIN Pan-pan, WANG Zhi-yong

(*School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China*)

**Abstract:** In this paper, we study the existence of periodic solutions for a class of fourth-order discrete Hamiltonian systems. By introducing two control functions, we obtain two new solvability conditions. Under these conditions, we establish two new existence theorems by making use of the minimax methods in critical point theory.

**Keywords:** discrete Hamiltonian systems; periodic solutions; saddle point theorem; solvability condition

**2010 MR Subject Classification:** 39A23; 58E50