

具有人口年龄结构的 Solow-Swan 模型与仿真

蔡东汉¹, 葛夫夫¹, 陈忠斌²

(1. 武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

(2. 武汉大学经济与管理学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 本文中, 我们将人口年龄结构引入经典的 Solow-Swan 模型, 探讨人口年龄结构变动对经济增长的影响. 利用比较定理证明当人口趋于稳定的人口结构时, 刻划模型的微分方程的解是渐近稳定的. 通过数值仿真, 我们看到经济增长在少年抚养下降时加速, 在老年抚养上升时减缓. 在人口转变时期存在“人口红利”, 人口老龄化导致的劳动力人数占人口的比重下降会使经济增长减缓甚至下降.

关键词: Solow-Swan 模型; 微分不等式; 渐近稳定性; 人口年龄结构; 数值仿真

MR(2010) 主题分类号: 91B62; 34A40; 34D05 中图分类号: O19

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2017)02-0419-08

1 引言

近年来, 人口年龄结构变动对经济增长的影响引起了人口学家和经济学家的广泛重视 (见文献 [1-4]). Bloom 等人 [5-7] 作的经验分析表明当少年抚养比下降而老年抚养比上升之前存在“人口红利”. Wei 与 Hao^[8] 建立一个计量模型探讨中国人口年龄结构的变动及对经济增长的影响. Blanchard^[9] 构造一个最优经济增长模型研究人口年龄结构对政府赤字的动态影响. Hippolyte^[10] 给出一个连续世代交叠模型探讨人口年龄结构对经济增长的影响. 然而, 在文献 [9] 和 [10] 中, 人口结构年龄结构是稳定的, 即不随时间而变动. 这与世界绝大多数国家的人口年龄结构实际的变动情况是不相符合的.

在经济增长的文献中, 人口增长率通常简单地假设为一个常数或随时间单调下降的函数^[11-12]. 本文中, 我们将随时间变动的人口与劳动力人数引入经典的 Solow-Swan 模型, 探讨人口年龄结构变化导致的人口与劳动力人数变化对经济增长的影响. 利用比较定理证明当人口与劳动力人数趋于稳定时, 刻划模型的微分方程的解是渐近稳定的. 通过数值仿真, 我们看到经济增长在少年抚养下降时加速, 在老年抚养上升时减缓. 在人口转变时期存在“人口红利”, 人口老龄化导致的劳动力人数占人口的比重下降会使经济增长减缓甚至下降.

2 模型的建立

假定生产函数为 $F(K(t), L(t))$, 满足新古典主义生产函数的条件, 其中 $K(t), L(t)$ 为 t 时刻的总资本和劳动力人数. 设储蓄率和资本折旧率分别为 s 和 δ , 则有

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K. \quad (2.1)$$

*收稿日期: 2014-12-12 接收日期: 2015-04-07

基金项目: 国家自然科学基金资助 (71271158).

作者简介: 蔡东汉 (1960-), 男, 湖南东安, 教授, 主要研究方向: 数理经济.

记 $k(t) = \frac{K(t)}{N(t)}$, $\lambda(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$, 则 $k(t), \lambda(t)$ 为 t 时刻的人均资本和劳动力人数占人口的比重, 其中 $N(t)$ 为 t 时刻的总人口. 由 (2.1) 式,

$$\dot{k} = sF(k, \lambda(t)) - [\delta + n(t)]k, \quad (2.2)$$

其中 $n(t) = \frac{\dot{P}(t)}{P(t)}$ 为人口增长率.

3 比较定理与收敛性

假设 1 总人口函数 $N(t)$ 满足 $N(t) \geq \bar{N}$, $0 \leq \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = n(t) \leq \bar{n} < 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = \bar{n}$.

假设 2 劳动力人数占人口比重 $\lambda(t)$ 满足 $0 < a \leq \lambda(t) \leq b < 1$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \bar{\lambda}$.

定义 $f(k) = F(k, c)$, 其中 c 为正常数, 则由经典的 Solow-Swan 模型的结论^[11] 有如下引理.

引理 1 微分方程

$$\dot{k} = a_1 F(k, c) - b_1 k \quad (3.1)$$

存在唯一的正平衡点 k^* , 其解收敛于 k^* , 其中 a_1, b_1 为大于零小于 1 的常数.

由假设 1 和假设 2, 人口增长率 $n(t)$ 和劳动力人口占人口的比重在 $[0, \infty)$ 上有界. 记

$$n_* = \inf_{t \geq 0} n(t), n^* = \sup_{t \geq 0} n(t), \lambda_* = \inf_{t \geq 0} \lambda(t), \lambda^* = \sup_{t \geq 0} \lambda(t).$$

则由引理 1 和微分不等式^[13] 得

定理 1 [比较定理] 设 $k_1(t), k_2(t)$ 分别为微分方程

$$\begin{cases} \dot{k} = sF(k, \lambda_*) - (\delta + n^*)k, \\ k_1(0) = k_1^0 \end{cases} \quad (3.2)$$

与

$$\begin{cases} \dot{k} = sF(k, \lambda^*) - (\delta + n_*)k, \\ k_2(0) = k_2^0 \end{cases} \quad (3.3)$$

的解, $k(t)$ 为微分方程 (2.2) 初值为 k_0 的解, $k_1^0 \leq k_0 \leq k_2^0$, 则 $k_1(t) \leq k(t) \leq k_2(t), t \geq 0$.

证 记

$$G(k(t), t) = sF(k, \lambda(t)) - [\delta + n(t)]k,$$

$$G_1(k, t) = sF(k, \lambda_*) - (\delta + n^*)k, \quad G_2(k, t) = sF(k, \lambda^*) - (\delta + n_*)k,$$

则 $G_1(k, t) \leq G(k, t) \leq G_2(k, t)$. 由微分不等式, 定理成立.

定理 2 微分方程 (2.2) 的解 $k(t)$ 是渐近稳定的, 且收敛于微分方程

$$\dot{k} = sF(k, \bar{\lambda}) - (\delta + \bar{n})k$$

的非零平衡点.

证 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 T , 当 $t \geq T$ 时,

$$\bar{\lambda} - \epsilon < \lambda(t) < \bar{\lambda} + \epsilon, \quad \bar{n} - \epsilon < n(t) < \bar{n} + \epsilon.$$

由定理 1, $k_1(T) \leq k(T) \leq k_2(T)$. 设 $\tilde{k}(t)$ 微分方程 (2.2) 初值为 $k(T)$ 的解, $k_1^\epsilon(t)$, $k_2^\epsilon(t)$ 分别为微分方程

$$\dot{k} = sF(k, \bar{\lambda} - \epsilon) - (\delta + \bar{n} + \epsilon)k, \quad (3.4)$$

$$\dot{k} = sF(k, \bar{\lambda} + \epsilon) - (\delta + \bar{n} - \epsilon)k, \quad (3.5)$$

初值分别为 $k_1(T)$, $k_2(T)$ 的解, $k_1^{\epsilon*}$, $k_2^{\epsilon*}$ 分别为微分方程 (3.4), (3.5) 的正平衡点, 则 $k_1^\epsilon(t) \leq \tilde{k}(t) \leq k_2^\epsilon(t)$, $t \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_1^\epsilon(t) = k_1^{\epsilon*}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} k_2^\epsilon(t) = k_2^{\epsilon*}. \quad (3.6)$$

又由微分方程的解关于参数的连续依赖性^[12], $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} k_1^{\epsilon*} = k^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} k_2^{\epsilon*}$. 再由 ϵ 的任意性与微分方程解的惟一性有 $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{k}(t) = k^*$. 由此定理得证.

4 数值仿真

人口转变时期总出生人口变化的显著特征为由低出生人口转变到高人口出生, 然后下降的过程. 当高人口出生时期人口进入生育期后会出现第二次人口生育高峰. 因而通常总出生人口数在呈现出两次生育高峰后才进入一个稳定的状态. 为此, 用分段函数 $B(t)$ 对人口出生过程进行数值仿真 (表达式见附录). 其图形见图 1.

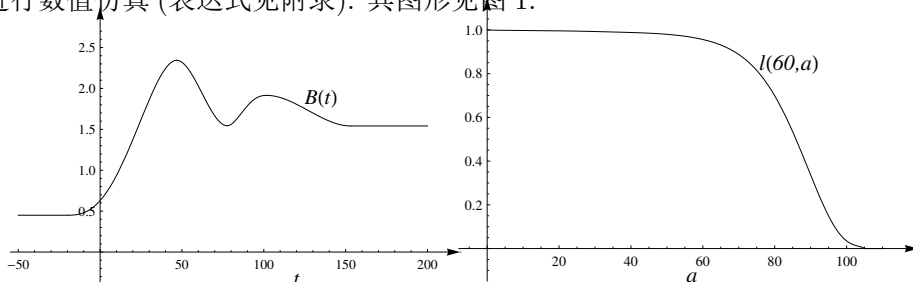


图 1: 总出生人口 $B(t)$

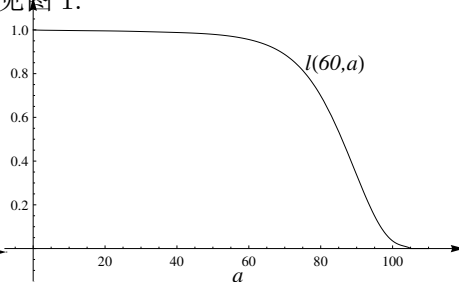
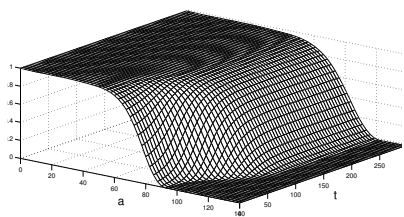
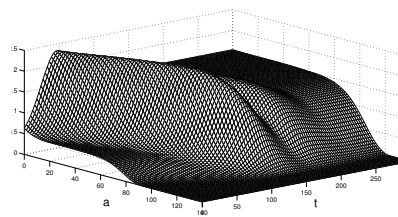


图 2: 基准存活率 ($t = 60$)

为了反映人口存活率随时间增长的过程, 首先给出基准的人口存活率 $L(a) = l(60, a)$, 即 $t = 60$ 时的人口存活率, 其中 a 为年龄. $L(a)$ 的函数表达式也由分段光滑函数给出 (表达式见附录), 其图形见图 2. t 时刻的人口存活率设为 $l(t, a) = L(a(1 - h(t)))$, 其中

$$h(t) = \frac{0.3}{1 + 20\exp(-0.05t)} - 0.15.$$

图 3 为不同时刻的人口存活率.

图 3: 存活率 $l(t, a)$ 图 4: 人口年龄结构 $p(t, a)$

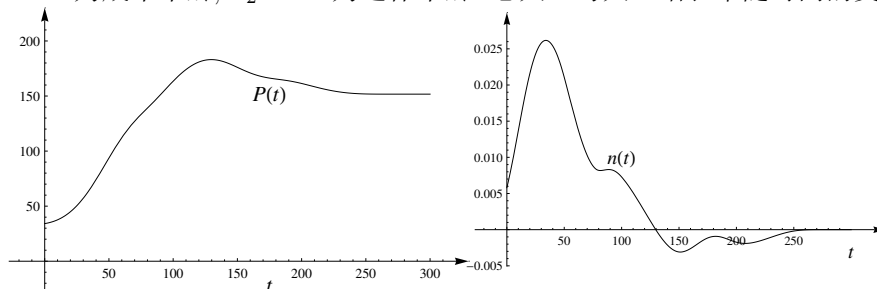
对于给定 t 时刻的总出生人口函数 $B(t)$ 与人口存活率函数 $l(t, a)$ 得出 t 时刻年龄为 a 的人口数为 $p(t, a) = B(t - a)l(t, a)$. 人口年龄结构图见图 4.

对于上述指定不同时刻的存活率, 人的最大寿命小于 $\Omega = 130$. 因此 t 时刻的人口总数与劳动力人数为

$$P(t) = \int_0^{\Omega} p(t, a) da = \int_0^{\Omega} B(t - a)l(t, a) da,$$

$$L(t) = \int_{T_1}^{T_2} p(t, a) da = \int_{T_1}^{T_2} B(t - a)l(t, a) da,$$

其中 $T_1 = 15$ 为成年年龄, $T_2 = 65$ 为退休年龄. 总人口与人口增长率随时间的变化见图 5 与图 6.

图 5: 总人口 $P(t)$ 图 6: 人口增长率 $n(t)$

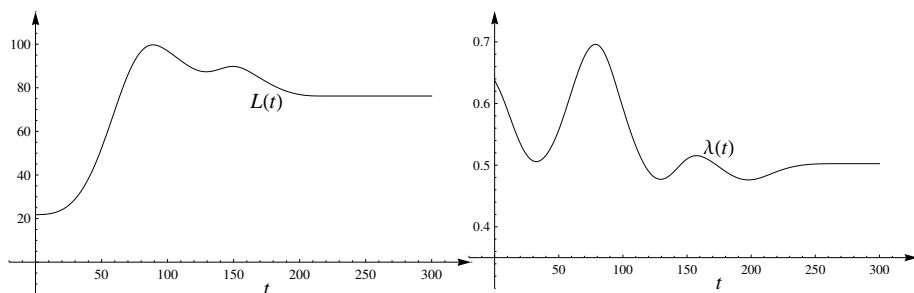
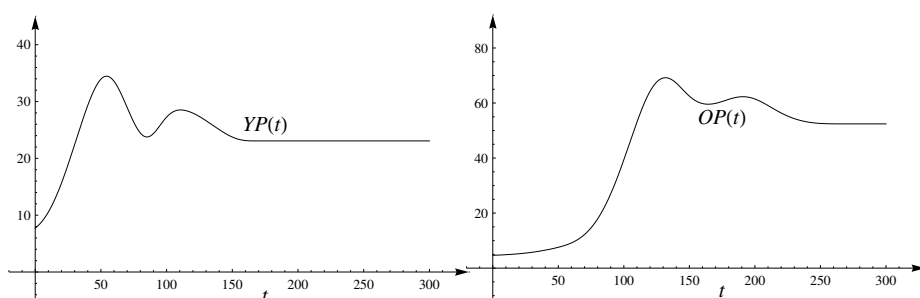
劳动人数 $L(t)$ 与劳动人数占人口的比重 $\lambda(t)$ 随时间的变化见图 7 与图 8.

记 $YP(t)$, $OP(t)$ 分别为 t 时刻的少年人口数与老年人口数, 则

$$YP(t) = \int_0^{T_1} p(t, a) da = \int_0^{T_1} B(t - a)l(t, a) da,$$

$$OP(t) = \int_{T_2}^{\Omega} p(t, a) da = \int_{T_2}^{\Omega} B(t - a)l(t, a) da.$$

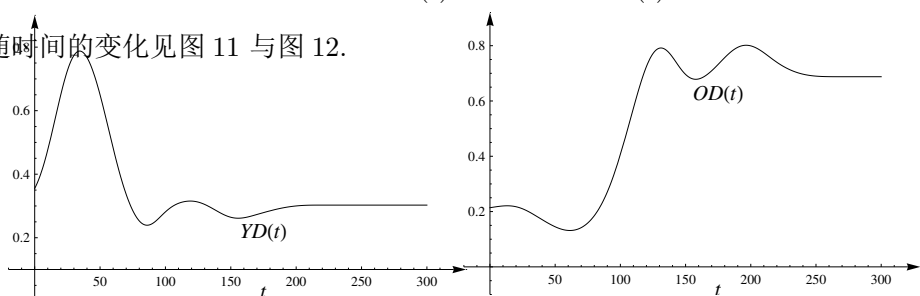
少年人口数与老年人口数随时间的变化见图 9 与图 10.

图 7: 劳动人数 $L(t)$ 图 8: 劳动力人数占人口的比重 $\lambda(t)$ 图 9: 少年人口数 $YP(t)$ 图 10: 老年人口数 $OP(t)$

少年抚养比与老年抚养比分别为

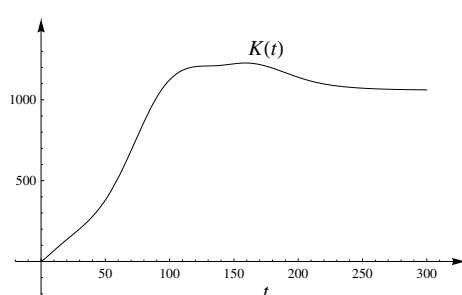
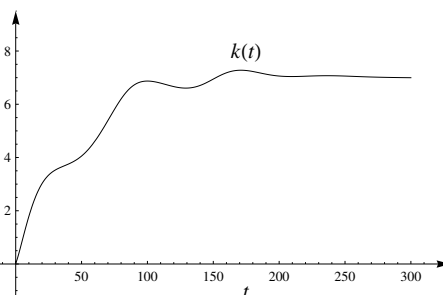
$$YD(t) = \frac{YP(t)}{L(t)}, \quad OD(t) = \frac{OP(t)}{L(t)},$$

它们随时间的变化见图 11 与图 12.

图 11: 少年抚养比 $YD(t)$ 图 12: 老年抚养比 $OD(t)$

生产函数给定为 Cobb-Douglas 生产函数 $AK^\alpha L^{1-\alpha}$. 经济的初始资本、储蓄率、技术水平、资本份额和资本折旧分别设定为

$$K_0 = 1, s = 0.3, A = 1.2, \alpha = 0.25, \delta = 0.05,$$

图 13: 资本 $K(t)$ 图 14: 人均资本 $k(t)$

则由 (2.1) 和 (2.2) 式分别得到资本与人均资本的随时间的增长过程 (见图 13 与图 14).

5 结论

由定理 2, 当人口年龄结构趋于稳定, 进而人口增长率与劳动人数占人口比重趋于稳定时, 经济增长最终也趋于稳定. 而由数值仿真我们看到人口转变时期的人口增长率的变化与人口年龄结构变动导致的劳动人数占人口比重的变化使得经济增长出现波动.

比较图 1、图 4 与图 5, 我们看到, 随着总出生人口数经历一次高峰及后续的次高峰后, 人口总数的增长达到一个高峰出现下降. 图 6 显示的人口增长率则由加速增长转变为低速增长, 最后出现下降. 但总人口的下降则较为缓慢. 这是人口存活率上升的结果 (见图 3).

随着高人口出生时期人口进入劳动年龄人口, 劳动年龄人数呈现快速上升的情况, 但劳动年龄人口的下降显著地先于人口总数的下降, 下降的幅度也大于总人口的下降, 这是由于生存率上升导致的人口老龄化产生的结果. 相应地, 高人口出生时期的人口进入劳动年龄人口, 少年抚养比下降, 劳动力人数占总人口比重快速上升, 经济出现了一个“人口红利”时期. 随着高出生人口进入老年, 这一比重开始下降, 最后渐近地趋于稳定 (见图 8).

对应于人口出生高峰与跟随其后的次高峰, 少年人口数也出现高峰和次高峰, 其后少年人口数下降并趋于一个稳定的水平 (见图 9). 少年抚养比呈现出类似的形态 (见图 11). 老年人口的迅速上升则是高出生时期的人口进入老年时开始的, 随着人口存活率的上升, 老年人口总数快速上升, 最后稳定在一个较高的水平 (见图 10). 老年抚养比在经历了一短暂的下降后也呈现出类似的形态 (见图 12).

通过数值仿真我们看到, 人口年龄结构的变化与存活率的上升对经济增长有着本质的影响. 在经典的 Solow-Swan 模型中, 人均资本随着人口增长率下降是上升的. 其原因在于模型中将经济中所有人口当作劳动力考虑的, 没有区分劳动年龄人口及他们占总人口的比重的问题. 而将人口年龄结构的变化及存活率上升导致劳动年龄人口数和占总人口的比重的变动引入经典的 Solow-Swan 模型后, 情况则发生了本质的改变. 在“人口红利”时期, 总资本和人均资本都迅速上升, 伴随着总出生人口、劳动年龄人口占总人口比重的波动变化, 人均资本也出现波动的变化, 并在人口老龄化严重的时期出现下降 (见图 14).

参 考 文 献

- [1] Lam D. Population growth, age structure, and age-specific productivity[J]. J. Popul. Econ., 1989, 2: 189–210.
- [2] Lau S. Demographic structure and capital accumulation: A quantitative assessment[J]. J. Econ. Dyn. Contr., 2009, 33: 554–567.
- [3] Lindh T. Age structure and economic policy: The case of saving and growth[J]. Popul. Res. Pol. Rev., 2007, 18: 261–270.
- [4] Cai D. The Ramsry model with endogenous demographis transition and simulation(I)[J]. J. Math., 2011, 31(2): 191–196.
- [5] Bloom D E, Canning D, Sevilla J, Finlay J E. Does age structure forecast economic growth[J]. Intern. J. Forecast., 2007, 23(4): 569–585.
- [6] Bloom D E, Williamson J G. Demographic transitions and economic miracles in emerging Asia[J]. World Bank Econ. Rev., 1998, 12(3): 419–455.
- [7] Bloom D E, Canning D, Malaney P N. Population dynamics and economic growth in Asia[J]. Popul. Devel. Rev., 2000, 26: 257–290
- [8] Wei Z, Hao R. Demographic structure and economic growth: Evidence from China[J]. J. Comp. Econ., 2010, 38: 472–491.
- [9] Blanchard O J. Debt, deficits, and finite horizons[J]. J. Political Econ., 1985, 93(2): 223–247.
- [10] d’Albis H. Demographic structure and capital accumulation[J]. J. Econ. The., 2007, 132: 411–434.
- [11] Barro R J, Sala-i-Martin X. Economic growth (2nd ed.)[M]. Cambridge: The MIT Press, 2004.
- [12] Guerrini L. The Solow-Swan model with a bounded population growth rate[J]. J. Math. Econ., 2006, 42(1): 14–21.
- [13] Hartman P. Ordinary differential equations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1964.

THE SOLOW-SWAN MODEL WITH AGE STRUCTURE CHANGING AND SIMULATION

CAI Dong-han¹, GE Fu-fu¹, CHEN Zhong-bin²

(1.School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(2.School of Economics and Management, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, the age structure is integrated into the classical Solow-Swan model to inquire the affection of demographic changes on the economic growth. It is proved that solution of the model is asymptotical stable when the age structure tends a steady state and the economic grows to a stable state after age structure change ended. By numerical simulation, we show that the economic growth is speeded up by the decline of the young dependency and slowed down by the increasing of old dependency. And there exists demographic dividend in the period of demographic transition. With population aging and the labor force population accounts for the proportion of the total population decreasing, the economic growth slows and even declines.

Keywords: Solow-Swan model; differential inequality; asymptotical stability; age structure; numerical simulation

2010 MR Subject Classification: 91B62; 34A40; 34D05

附 录

函数 $B(t)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} B(t) &= 0.45, -\infty < t < -20, \\ B(t) &= B_i(t), t_{i-1} \leq t < t_i, i = 1, 2, 3, 4, \\ B(t) &= 1.54116, t_4 \leq t < +\infty, \end{aligned}$$

其中 $t_0 = -20, t_1 = 46.8, t_2 = 77.6, t_3 = 101.7, t_4 = 153.0$,

$$\begin{aligned} B_1(t) &= 0.628827 + 0.0225777t + 0.000812106t^2 + 1.291379119545292 * 10^{-6}t^3 \\ &\quad - 2.6115299463581346 * 10^{-7}t^4, \\ B_2(t) &= -8.80608 + 0.596379t - 0.0102142t^2 + 0.0000547386t^3, \\ B_3(t) &= 186.44 - 8.00661t + 0.128608t^2 - 0.000908516t^3 \\ &\quad + 2.3856858886676033 * 10^{-6}t^4, \\ B_4(t) &= -8.31995 + 0.258569t - 0.00211623t^2 + 5.539154103437508 * 10^{-6}t^3. \end{aligned}$$

函数 $L(a) = l(60, a)$ 的表达式为 $L(a) = 0, a < 0, L(a) = L_i(a), a_i \leq a < a_{i+1}, i = 0, 1, 2, 3, L(a) = 0, t_4 \leq t < +\infty$, 其中 $a_0 = 0.0, a_1 = 50.0, a_2 = 75.0, a_3 = 90.0, a_4 = 105.0$,

$$\begin{aligned} L_1(a) &= 1.00012 - 0.00102822a + 0.0000593266a^2 - 1.25473 * 10^{-6}a^3 \\ &\quad + 6.34664 * 10^{-9}a^4, \\ L_2(a) &= 2.49693 - 0.0857234a + 0.00163509a^2 - 0.0000105491a^3, \\ L_3(a) &= -13.3449 + 0.51291a - 0.00587948a^2 + 0.0000207724a^3, \\ L_4(a) &= -2.12949 + 0.24734a - 0.00413179a^2 + 0.0000187554a^3. \end{aligned}$$