Vol. 37 (2017)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非自治 $p(t)$ - 拉普拉斯系统周期解的存在性

张申贵, 慕 嘉

(西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730030)

摘 要: 本文研究一类非自治 $p(t)$-Laplace 系统. 利用鞍点定理和极小作用原理, 获得了周期解存在的充分条件, 推广和改进了文献 [8] 中的结果.

关 键 词: 周期解; $p(t)$-Laplace 系统; 临界点

MR(2010) **主题分类号**: 34B15; 34C25 **中 图 分 类 号**: O175.8; O176.3

文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2017)02-0409-10

1 引言与主要结果

考虑二阶 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = \nabla F(t, u(t)) \ \text{ a.e. } \ t \in [0, T], \\ u(0) - u(T) = \dot{u}(0) - \dot{u}(T) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $T > 0$, 设 $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 满足如下假设

(A) 对每个 $x \in \mathbb{R}^N$, $F(t, x)$ 关于 t 可测; 对几乎所有的 $t \in [0, T]$, $F(t, x)$ 关于 x 连续可微, 且存在 $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $b \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, 使得

$$|F(t, x)| \leq a(|x|)b(t), \quad |\nabla F(t, x)| \leq a(|x|)b(t),$$

对所有的 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t \in [0, T]$ 成立.

Mawhin 和 Willem 在文 [1] 在非线性项有界, 即存在 $g \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, 使得

$$|\nabla F(t, x)| \leq g(t),$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t \in [0, T]$ 成立时, 得到了系统 (1.1) 周期解的存在性定理.

文 [2] 假设非线性项是次线性增长的, 即存在 $f, g \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, $\alpha \in [0, 1)$ 使得

$$|\nabla F(t, x)| \leq f(t)|x|^{\alpha} + g(t),$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t \in [0, T]$ 成立.

在具有线性增长非线性项, 即存在 $f, g \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, 使得

$$|\nabla F(t, x)| \leq f(t)|x| + g(t), \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2014-11-14 **接收日期**: 2015-04-07

基金项目: 国家自然科学基金资助 (31260098); 天元数学基金资助 (11326100); 西北民族大学中央高校基本科研业务费专项资助 (31920130004).

作者简介: 张申贵 (1980–), 男, 甘肃兰州, 副教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析和偏微分方程.

对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t \in [0,T]$ 成立时, 文 [3] 中得到以下定理.

定理 A [3] 设 F 满足 (1.2) 式, 且

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^2}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t = +\infty.$$

若 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t < \frac{12}{T}$, 则系统 (1.1) 在 Sobolev 空间 H_T^1 中至少有一个周期解.

文 [4] 将定理 A 中的强制性条件改进为下方有界的情形

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{1}{|x|^2}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t > \frac{3T^2}{2\pi^2\left(12 - T\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t.$$

当非线性项 $\nabla F(t,x)$ 线性增长时, 文 [5–7] 中分别在具有部分周期位势, 脉冲作用项, 单调性条件下得到了二阶 Hamilton 系统周期解的存在性定理.

设存在常数 $M_0 > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ 和非负函数 $\omega \in C([0,\infty),[0,\infty))$, 使得

(ω_1) $\omega(s) \le \omega(t)$, $\quad\forall s \le t, s, t \in [0,\infty)$.

(ω_2) $\omega(s+t) \le M_0(\omega(s)+\omega(t))$, $\quad\forall s, t \in [0,\infty)$.

(ω_3) $0 \le \omega(s) \le M_1 s^{p^- - 1} + M_2$, $\quad\forall s, t \in [0,\infty)$.

(ω_4) 当 $s \to \infty$ 时, $\omega(s) \to +\infty$.

受到文 [8] 和 [9] 的启发, 我们考虑用控制函数 $\omega(|x|)$ 替换线性增长条件 (1.2) 中的 $|x|$, 并将上述结果推广到非自治 $p(t)$ - 拉普拉斯系统

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(|\dot u(t)|^{p(t)-2}\dot u(t)) = \nabla F(t,u(t)) & \text{a.e. } t \in [0,T], \\ u(0)-u(T) = \dot u(0) - \dot u(T) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $p(t) \in C([0,T],\mathbb{R}^+)$, $p(t) = p(t+T)$, 且

$$1 < p^- := \min_{t\in[0,T]} p(t) \le p^+ := \max_{t\in[0,T]} p(t) < +\infty. \tag{1.4}$$

临界点理论是研究微分方程和差分方程边值问题可解性的有效方法, 如文 [10–12]. 非自治 $p(t)$ - 拉普拉斯系统来自于非线性弹性问题和流体力学, 该系统刻画了“逐点异性”的物理现象. 近年来, 临界点理论已用于研究非自治 $p(t)$- 拉普拉斯系统周期解的存在性, 参见文 [13–21].

2 准备知识

记 $p(t) \in C([0,T],\mathbb{R}^+)$, 定义

$$L^{p(t)}([0,T],\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^1([0,T],\mathbb{R}^N); \int_0^T |u|^{p(t)}\mathrm{d}t < \infty\right\}.$$

$$|u|_{p(t)} = \inf\left\{\lambda > 0; \int_0^T |\frac{u}{\lambda}|^{p(t)}\mathrm{d}t \le 1\right\}.$$

$$W_T^{1,p(t)} = \{u : [0,T] \to \mathbb{R}^N \mid u \in L^{p(t)}([0,T],\mathbb{R}^N), u(0) = u(T), \dot u \in L^{p(t)}(0,T;\mathbb{R}^N)\}.$$

当 $p^->1$ 时, 空间 $W_T^{1,p(t)}$ 是自反的 Banach 空间, 其范数为

$$\|u\|=|u|_{p(t)}+|\dot{u}|_{p(t)}.$$

记

$$\widetilde{W}_T^{1,p(t)}=\left\{u\in W_T^{1,p(t)}\mid \int_0^T u(t)\mathrm{d}t=0\right\},$$

则 $W_T^{1,p(t)}=\widetilde{W}_T^{1,p(t)}\oplus\mathbb{R}^N$.

引理 2.1 [15] $\forall\tilde{u}\in\widetilde{W}_T^{1,p(t)}$, 存在常数 $C_0>0$, $C_1>0$, $C_2>0$, 有

$$\|\tilde{u}\|_\infty\le 2C_0\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_1, \tag{2.1}$$

$$\|\tilde{u}\|\le C_2\left[\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+1\right], \tag{2.2}$$

其中 $\|u\|_\infty=\max\limits_{0\le t\le T}|u(t)|, p^-=\min\limits_{0\le t\le T}p(t)$.

引理 2.2 [15] $\forall u\in W_T^{1,p(t)}$, $\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$, 有

$$\|u\|\to\infty\Rightarrow\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+|\bar{u}|\to+\infty.$$

引理 2.3 [16] 在 Sobolev 空间 $W_T^{1,p(t)}$ 上定义泛函 φ 如下:

$$\varphi(u)=\int_0^T\frac{1}{p(t)}|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t,\quad\forall u\in W_T^{1,p(t)},$$

则 $u\in W_T^{1,p(t)}$ 是问题 (1.3) 的周期解当且仅当 u 是泛函 φ 的临界点, 且 φ 连续可微,

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=\int_0^T(|\dot{u}(t)|^{p(t)-2}\dot{u}(t),\dot{v}(t))\mathrm{d}t+\int_0^T(\nabla F(t,u(t)),v(t))\mathrm{d}t,\quad\forall u,v\in W_T^{1,p(t)}.$$

定义 1 设 X 为 Banach 空间, 若泛函 $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足: 对任何点列 $\{u_n\}\subset X$, 由 $\{\varphi(u_n)\}$ 有界, $\varphi'(u_n)\to 0$ 蕴含 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 φ 满足 (PS) 条件.

引理 2.4 [1] (极小作用原理) 若泛函 $\varphi: X\mapsto\mathbb{R}$ 弱下半连续, 且 φ 在自反的 Banach 空间 X 中强制, 即当 $\|u\|\to\infty$ 时, 有 $\varphi(u)\to+\infty$, 则泛函 φ 在空间 X 中有极小值.

引理 2.5 [1] (鞍点定理) 设 E 是 Hilbert 空间, $E=E_1\oplus E_2$, 其中 $E_2\ne\{0\}$ 是有限维子空间. 若 $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$ 满足 (PS) 条件和以下两个条件

(i) 存在 $e\in B_\rho\cap E_2$ 和常数 $\omega>\sigma$, 使得 $\varphi|_{e+E_1}\ge\omega$;

(ii) 存在常数 σ 和 ρ, 使得 $\varphi|_{\partial B_\rho\cap E_2}\le\sigma$,

则 φ 有临界值 $c\ge\omega$ 且

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\max_{x\in B_\rho\cap E_1}\varphi(h(x)),$$

其中 $\Gamma=\{h\in C(\bar{B}_\rho\cap E_1,E): h\mid_{\partial B_\rho\cap E_1}=\mathtt{id}_{\partial B_\rho\cap E_1}\}$; id 表示恒等算子; B_ρ 是 E 中以 0 为中心半径为 r 的开球; ∂B_ρ 表示 B_ρ 的边界.

3 主要结果

定理 3.1 设 $\omega \in C([0,\infty),[0,\infty))$, 满足 (ω_1)–(ω_4). 设存在 $f,g\in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$, 使得

$$|\nabla F(t,x)| \le f(t)\omega(|x|)+g(t), \tag{3.1}$$

对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t\in[0,T]$ 成立, 且

$$\liminf_{|x|\to\infty}\frac{1}{\omega^{q^+}(|x|)}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t > \frac{1}{q^+}\left(\frac{2M_0C_0\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}, \tag{3.2}$$

其中 $\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^+}=1$, 若

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-p^+}, \tag{3.3}$$

则问题 (1.3) 在 Sobolev 空间 $W_T^{1,p(t)}$ 中至少有一个周期解.

注 定理 3.1 推广与改进了定理 A 和文献 [8] 中定理 1.5. 首先, 定理 3.1 中将对应结果推广到了非自治 $p(t)$ - 拉普拉斯系统; 另一方面, 易见式 (3.2) 中极限是下方有界的.

取 $p(t)\equiv 2$, 则 $p^-=p^+=2$, 令

$$F(t,x)=\left(\frac{3}{5}T-t\right)\ln^2(1+|x|^2)+\beta(t)\ln(1+|x|^2),\ \ \omega(|x|)=\ln(1+|x|^2),$$

其中 $\beta(t)\in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$, 则 F 满足定理 3.1 的条件, 但不满足定理 A 和文 [8] 中定理 1.5.

证 由条件 (ω_1)–(ω_3), 式 (3.1), (2.1), 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,\bar u)\mathrm{d}t\right| \\
=\ &\left|\int_0^T\int_0^1(\nabla F(t,\bar u+s\tilde u(t)),\tilde u(t))\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right| \\
\le\ &\int_0^T\int_0^1 f(t)\omega(|\bar u+s\tilde u(t)|)|\tilde u(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^1 g(t)|\tilde u(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
\le\ &\int_0^T\int_0^1 f(t)M_0[\omega(|\bar u|)+\omega(|\tilde u(t)|)]|\tilde u(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^1 g(t)|\tilde u(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
\le\ &M_0\int_0^T\int_0^1 f(t)[\omega(|\bar u|)+M_1|\tilde u(t)|^{p^--1}+M_2]|\tilde u(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^1 g(t)|\tilde u(t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
\le\ &\omega(|\bar u|)\|\tilde u\|_\infty M_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\|\tilde u\|_\infty^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \\
&+\|\tilde u\|_\infty\left[M_0M_2\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\right] \\
\le\ &\omega(|\bar u|)\left[2C_0\left(\int_0^T|\dot u(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_1\right]M_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[2C_0\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_1\right]^{p^-} M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\\
&+\left[2C_0\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_1\right]\left[M_0M_2\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\right]\\
\leq\ & (4C_0)^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+C_3\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_4\omega(|\bar{u}|)+C_5\\
&+2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\,\omega(|\bar{u}|)\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

利用 Young 不等式及 $\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^+}=1$, 有

$$
\begin{aligned}
&2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\,\omega(|\bar{u}|)\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}\\
\leq\ & \frac{1}{p^-}\left[\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{q^+}\left(\frac{2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}\omega^{q^+}(|\bar{u}|). \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

由式 (3.4) 和 (3.5) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&\varphi(u)=\int_0^T \frac{1}{p(t)}|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t\\
\geq\ & \frac{1}{p^+}\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+\left[\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,\bar{u})\mathrm{d}t\right]+\int_0^T F(t,\bar{u})\mathrm{d}t\\
\geq\ & \left[\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\
&-\frac{1}{p^-}\left[\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\
&+\left[\frac{1}{\omega^{q^+}(|\bar{u}|)}\int_0^T F(t,\bar{u})\mathrm{d}t-\frac{1}{q^+}\left(\frac{2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}\right]\omega^{q^+}(|\bar{u}|)\\
&-C_3\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}-C_4\omega(|\bar{u}|)-C_5\\
=\ & \frac{1}{p^+}\left(1-\frac{1}{p^-}\right)\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t-C_3\left(\int_0^T |\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}-C_4\omega(|\bar{u}|)-C_5\\
&+\left[\frac{1}{\omega^{q^+}(|\bar{u}|)}\int_0^T F(t,\bar{u})\mathrm{d}t-\frac{1}{q^+}\left(\frac{2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}\right]\omega^{q^+}(|\bar{u}|).
\end{aligned}
$$

由引理 1.2, $\|u\|\to\infty\Rightarrow\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+|\bar{u}|\to+\infty$, 由式 (3.2) 和 (ω_4), 并注意到 $p^->1$, 当 $\|u\|\to\infty$ 时, $\varphi(u)\to+\infty$. 注意到当 $p^->1$ 时, 空间 $W_T^{1,p(t)}$ 是自反的 Banach 空间, 泛函 φ 弱下半连续 [20], 由极小作用原理可知, 泛函 φ 至少有一个临界点, 从而得到问题 (1.3) 至少有一个周期解.

定理 3.2 设非负函数 ω 满足 (ω_1)–(ω_4), F 满足 (3.1) 和 (3.3) 式, 且

$$\limsup_{|x|\to\infty}\frac{1}{\omega^{q^+}(|x|)}\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t<-K, \tag{3.6}$$

其中

$$K=\frac{1}{q^+}\left[1+\frac{\frac{1}{p^-}\left(1+\frac{1}{p^+}\right)}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p^+p^-}\right)}\right]\left(\frac{2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}, \tag{3.7}$$

则问题 (1.3) 在 Sobolev 空间 $W_T^{1,p(t)}$ 中至少有一个周期解.

注 取 $p(t)\equiv\sin\frac{2\pi t}{T}+5$, 则 $p^-=4$, $q^+=\frac{4}{3}$, 令

$$F(t,x)=\left(\frac{2}{5}T-t\right)|x|^4+T^3|x|^2,\quad \omega(|x|)=|x|^3,$$

则 F 满足定理 3.2 中的条件, 但不满足文 [13–21] 中定理.

证 我们将利用鞍点定理来证明定理 3.2, $\forall u\in W_T^{1,p(t)}$, 设 $\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$, $u(t)=\tilde{u}(t)+\bar{u}$.

第 1 步 证明泛函 φ 满足 (PS) 条件, 即任何点列 $\{u_n\}\subset W_T^{1,p(t)}$, 由 $\{\varphi(u_n)\}$ 有界, $\varphi'(u_n)\to 0$, $(n\to\infty)$, 可推得 $\{u_n\}$ 有收敛子列. 首先证明 $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p(t)}$ 有界.

类似于 (3.4) 式 的证明, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T(\nabla F(t,u(t)),\tilde{u}(t))\mathrm{d}t\right|\\ \le{}&(4C_0)^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\ &+C_3\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_4\,\omega(|\bar{u}|)+C_5\\ &+2M_0C_0\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\,\omega(|\bar{u}|)\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

由式 (3.5), (3.8), 有

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{u}_n\| \geq \langle \varphi'(u_n), \tilde{u}_n \rangle \\
= \ & \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t + \int_0^T (\nabla F(t, u_n(t)), \tilde{u}_n(t)) \mathrm{d}t \\
\geq \ & \left[1 - (4C_0)^{p^-} M_0 M_1 \int_0^T f(t) \mathrm{d}t\right] \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t \\
& - \frac{1}{p^-} \left[\frac{1}{p^+} - (4C_0)^{p^-} p^- M_0 M_1 \int_0^T f(t) \mathrm{d}t\right] \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t \\
& - \frac{1}{q^+} \left(\frac{2M_0 C_0 \int_0^T f(t) \mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+} - (4C_0)^{p^-} M_0 M_1 p^- \int_0^T f(t) \mathrm{d}t}} \right)^{q^+} \omega^{q^+}(|\bar{u}_n|) \\
& - C_3 \left(\int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p^-}} - C_4\, \omega(|\bar{u}_n|) - C_5 \\
= \ & \left(1 - \frac{1}{p^+ p^-}\right) \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t - C_3 \left(\int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p^-}} - C_4\, \omega(|\bar{u}_n|) - C_5 \\
& - \frac{1}{q^+} \left(\frac{2M_0 C_0 \int_0^T f(t) \mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+} - (4C_0)^{p^-} M_0 M_1 p^- \int_0^T f(t) \mathrm{d}t}} \right)^{q^+} \omega^{q^+}(|\bar{u}_n|). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

另一方面, 由式 (2.1), 可得

$$
\|\tilde{u}_n\| \leq C_2 \left[\left(\int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p^-}} + 1 \right]. \qquad (3.10)
$$

由式 (3.9), (3.10), 有

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{q^+} \left(\frac{2M_0 C_0 \int_0^T f(t) \mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+} - (4C_0)^{p^-} M_0 M_1 p^- \int_0^T f(t) \mathrm{d}t}} \right)^{q^+} \omega^{q^+}(|\bar{u}_n|) + C_4\, \omega(|\bar{u}_n|) \\
\geq \ & \left(1 - \frac{1}{p^+ p^-}\right) \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t - C_6 \left(\int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p^-}} - C_7 \\
\geq \ & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p^+ p^-}\right) \int_0^T |\dot{u}_n(t)|^{p(t)} \mathrm{d}t - C_8, \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

其中 $C_8=-\min\limits_{s\in[0,+\infty)}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p^+p^-}\right)s^{p^-}-C_6s-C_7\right\}>0$. 由式 (3.9), 有

$$\begin{aligned}\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\le{}&\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p^+p^-}\right)}\frac{1}{q^+}\left(\frac{2M_0C_0\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}\omega^{q^+}(|\bar{u}_n|)\\&+C_9\,\omega(|\bar{u}_n|)+C_{10}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

由式 (3.4), (3.5), (3.12), 有

$$\begin{aligned}&\varphi(u_n)=\int_0^T\frac{1}{p(t)}|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+\int_0^T F(t,u_n(t))\mathrm{d}t\\
\le{}&\frac{1}{p^-}\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+\left[\int_0^T F(t,u_n(t))\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,\bar{u}_n)\mathrm{d}t\right]+\int_0^T F(t,\bar{u}_n)\mathrm{d}t\\
\le{}&\left[\frac{1}{p^-}+(4C_0)^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{p^-}\left[\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\
&+\int_0^T F(t,\bar{u}_n)\mathrm{d}t+\frac{1}{q^+}\left(\frac{2M_0C_0\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt[p^-]{\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1p^-\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}}\right)^{q^+}\omega^{q^+}(|\bar{u}_n|)\\
&+C_3\left(\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_4\omega(|\bar{u}_n|)+C_5\\
\le{}&\left[\frac{1}{\omega^{q^+}(|\bar{u}_n|)}\int_0^T F(t,\bar{u}_n)\mathrm{d}t+K\right]\omega^{q^+}(|\bar{u}_n|)+C_{11}\,\omega(|\bar{u}_n|)\\
&+C_{12}\,\omega^{\frac{q^+}{p^-}}(|\bar{u}_n|)+C_{13}\,\omega^{\frac{1}{p^-}}(|\bar{u}_n|)+C_{14},\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中 K 为式 (3.7) 中定义的正常数. 反设 $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p(t)}$ 中无界, 当 $n\to\infty$ 时, $\|u_n\|\to\infty$. 由引理 2.2, 当 $n\to\infty$ 时, $\|u_n\|\to\infty\Rightarrow\displaystyle\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+|\bar{u}_n|\to+\infty$.

当 $n\to\infty$ 时, $|\bar{u}_n|\to+\infty$, 由 (ω_4), 有 $\omega(|\bar{u}_n|)\to+\infty$. 由式 (3.6), (3.13), 并注意到 $p^->1$, 当 $n\to\infty$ 时, $\varphi(u_n)\to-\infty$.

当 $n\to\infty$ 时, $\displaystyle\int_0^T|\dot{u}_n(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\to+\infty$, 式 (3.12), 有 $\omega(|\bar{u}_n|)\to+\infty$. 由式 (3.6), (3.13), 并注意到 $p^->1$, 当 $n\to\infty$ 时, $\varphi(u_n)\to-\infty$.

这与 $\{\varphi(u_n)\}$ 有界矛盾! 故 $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p(t)}$ 中有界. 注意到当 $p^->1$ 时, $W_T^{1,p(t)}$ 紧嵌入 $C([0,T];\mathbb{R}^N)$ 和 $W_T^{1,p(t)}$ 的一致凸性, 类似于文献 [19] 中定理 3.2 的证明, $\{u_n\}$ 在 $W_T^{1,p(t)}$ 中有收敛子列, 故泛函 φ 满足 (PS) 条件.

第 2 步 取 $E_1=\widetilde{W}_T^{1,p(t)}$, $E_2=\mathbb{R}^N$, 则 $W_T^{1,p(t)}=\widetilde{W}_T^{1,p(t)}\oplus\mathbb{R}^N$. 我们证明鞍点定理的环绕条件成立. 对 $u\in E_1$, 类似于 (3.4) 式 的证明, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,0)\mathrm{d}t\right| &\le (4C_0)^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\\ &\quad +C_{15}\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}+C_{16}. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

由式 (3.14), 有

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_0^T\frac{1}{p(t)}|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t+\left[\int_0^T F(t,u(t))\mathrm{d}t-\int_0^T F(t,0)\mathrm{d}t\right]+\int_0^T F(t,0)\mathrm{d}t\\ &\ge \left[\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}M_0M_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right]\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t-C_{15}\left(\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p^-}}\\ &\quad -C_{16}+\int_0^T F(t,0)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对 $u\in E_1=\widetilde{W}_T^{1,p(t)}$, 由引理 2.2, $\|u\|\to\infty\Rightarrow\int_0^T|\dot{u}(t)|^{p(t)}\mathrm{d}t\to+\infty$. 由 (3.3) 式知

$$\frac{1}{p^+}-(4C_0)^{p^-}K_0K_1\int_0^T f(t)\mathrm{d}t>0,$$

故当 $\|u\|\to+\infty$ 时, 有 $\varphi(u)\to+\infty$. 对 $u\in E_1=\widetilde{W}_T^{1,p(t)}$ 成立. 显然存在常数 η, 使得 $\varphi(u)\ge\eta$.

另一方面, 对 $y\in E_2=\mathbb{R}^N$, 由式 (3.6), $\forall\varepsilon>0$, 当 $|y|$ 充分大时, 有

$$\varphi(y)=\int_0^T F(t,y)\mathrm{d}t\le(-K+\varepsilon)\,\omega^{q^+}(|y|).$$

令 ε 充分小, 当 $|y|\to+\infty$ 时, $\omega(|y|)\to+\infty$, 则 $\varphi(y)\to-\infty$. 因此存在正常数 ρ, 使得 $\varphi|_{\partial B_\rho\cap E_2}\le\eta-1=\sigma$.

参 考 文 献

[1] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. NewYork: Springer Verlag, 1989.

[2] Tang C L. Periodic solutions of non-autonomous second order systems with sublinear nonlinearity[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, 126(11): 3263–3270.

[3] Zhao F K, Wu X. Existence of periodic solutions for nonautonmous second order systems with linear nonlinearity[J]. Nonl. Anal., 2005, 60(7): 325–335.

[4] Tang X H, Meng Q. Solutions of a second-order Hamiltonian system with periodic boundary conditions[J]. Nonl. Anal., 2010, 11: 3722–3733.

[5] 张申贵. 一类非自治二阶系统的多重周期解 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2011, 46(11): 64–69.

[6] Chen P, Tang X H. Existence of solutions for a class of second-order p-Laplacian systems with impulsive effects[J]. Appl. Math., 2014, 59(5): 543–570.

[7] 吴越, 安天庆. 一类非自治二阶哈密顿系统的周期解 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2013, 51(1): 57–63.

[8] Wang Z Y, Zhang J H. Periodic solutions of a class of second order non-autonomous Hamiltonian systems[J]. Nonl. Anal., 2010, 72(12): 4480–4487.

[9] Zhang Q F, Tang X H. Periodic solutions for second order systems[J]. Appl. Math., 2012, 41(5), 303–310.

[10] 彭艳芳. $\mathbb{R}^3$ 中一类 Kirchhoff 型方程变号解的存在性及集中性 [J]. 数学杂志, 2015, 35(1): 75–84.

[11] 敖恩, 张国伟. 关于二阶半线性椭圆方程的 Dirichlet 边值问题一个注记 [J]. 数学杂志, 2014, 34(1): 37–42.

[12] 张克玉, 徐家发. 一类二阶差分方程边值问题解的存在性 [J]. 数学杂志, 2014, 34(5): 857–862.

[13] Ge B, Xue X P, ZHOU Q M. Existence of periodic solutions for a differential inclusion systems involving the $p(t)$-Laplacian[J]. Acta Math. Sci., 2011, 31B(5): 1786–1802.

[14] Fan X L. A Knobloch-type result for $p(t)$-Laplacian systems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 282(3): 453–464.

[15] Zhang L, Tang X H, Chen J. Infinitely many periodic solutions for some second-order differential systems with $p(t)$-Laplacian[J]. Boundary Value Problems, 2011, 33(2): 1–15.

[16] Wang X J, Yuan R. Existence of periodic solutions for $p(t)$-Laplacian systems[J]. Nonl. Anal., 2009, 70(1): 866–880.

[17] 张申贵. 一类超线性 $p(t)$-Laplacian 系统的无穷多周期解 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2014, 52(1): 34–38.

[18] Zhang L, Tang X H. Existence and multiplicity of periodic solutions for some second order differential systems with p(t)-Laplacian[J]. Math. Slovaca, 2013, 63(6): 1269–1290.

[19] Zhang L, Tang X H. Subharmonic solutions for some nonautonomous Hamiltonian systems with $p(t)$-Laplacian[J]. Bull. Belg. Math. Soc. (2), 2011, 18(2): 385–400.

[20] Zhang L, Chen Y. Existence of periodic solutions of $p(t)$-Laplacian systems[J]. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2), 2012, 35(1): 25–38.

[21] Chen P, Tang X H, Agarwal R. Existence of homoclinic solutions for $p(n)$-Laplacian Hamiltonian systems on orlicz sequence space[J]. Math. Comput. Model., 2012, 55(3): 989–1002.

EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR NON-AUTONOMOUS $P(t)$-LAPLACIAN SYSTEMS

ZHANG Shen-gui, MU Jia

(*College of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030, China*)

Abstract: In this paper, we investigate a class of non-autonomous $p(t)$-Laplacian system. By using saddle point theorem and the least action principle, some sufficient conditions for the existence of periodic solutions are obtained, which generalize and improve the resuls in [8].

Keywords: periodic solutions; $p(t)$-Laplacian systems; critical point

2010 MR Subject Classification: 34B15; 34C25