

某类无穷维 Hamilton 算子的 Moore-Penrose 可逆性

海国君, 阿拉坦仓

(内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

摘 要: 设 X 是无穷维 Hilbert 空间, H 表示 $X \oplus X$ 上的有界无穷维 Hamilton 算子 $H = \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^* \end{pmatrix}$, 其中 B 和 C 为自伴算子. 本文研究了无穷维 Hamilton 算子 H 的 Moore-Penrose 广义逆. 利用空间分解等方法, 当 $B = 0$ 或 C 为 Moore-Penrose 可逆的情况下给出 H 为 Moore-Penrose 可逆的等价条件. 此外, 举例说明了结论的有效性.

关键词: 无穷维 Hamilton 算子; 算子矩阵; Moore-Penrose 可逆

MR(2010) 主题分类号: 47A10; 47B99

中图分类号: O177.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)02-0358-07

1 引言

设 X 为无穷维 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(X)$ 表示 X 上的所有有界线性算子构成的 Banach 空间, 若 $T \in \mathcal{B}(X)$, 用 $T^*, N(T), R(T)$ 表示算子 T 的共轭算子, 零空间与值域空间. 如果 $T = T^*$, T 称为自伴算子. 若 M 是 X 的线性子空间且 $T \in \mathcal{B}(X)$, $M^\perp$ 和 $\overline{M}$ 表示 M 的正交补和闭包, $T|_M$ 和 $P_{\overline{M}}$ 表示 T 在 M 上的限制和 $\overline{M}$ 上的正交投影算子.

对于 $T \in \mathcal{B}(X)$, 如果存在算子 $S \in \mathcal{B}(X)$ 满足下面的四个算子方程

$$\begin{cases} TST = T, \\ STS = S, \\ TS = (TS)^*, \\ ST = (ST)^*, \end{cases}$$

则 T 称为 Moore-Penrose 可逆, S 称为 T 的 Moore-Penrose 逆, 记为 T^+ . T 是 Moore-Penrose 可逆当且仅当 $R(T)$ 为闭的且 T 的 Moore-Penrose 逆是唯一的^[1]. 显然, T 为 Moore-Penrose 可逆当且仅当 T^* 为 Moore-Penrose 逆.

1920 年, Moore 首先提出了广义逆矩阵, 但没有引起人们的注意. 直到 1955 年, Penrose 以矩阵方程的形式给出了 Moore 广义逆矩阵的定义后, 广义逆矩阵的研究才得到发展. Hilbert 空间中线性算子的 Moore-Penrose 逆是矩阵 Moore-Penrose 逆的推广. 我们知道, 线性算子的 Moore-Penrose 可逆性在众多领域, 如矩阵理论, 统计理论等, 有着重要的应用. 对于有限维空间中的线性算子 (矩阵), 其 Moore-Penrose 可逆性在许多文章中讨论过 (见文 [2, 3] 及其中的参考文献). 对于无穷维 Hilbert 空间中的线性算子, 特别是算子矩阵而言, 其

*收稿日期: 2014-12-07

接收日期: 2015-04-08

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11371185; 11362011); 内蒙古自然科学基金重大项目资助 (2013ZD01); 内蒙古自然科学基金 (2015MS0117).

作者简介: 海国君 (1983-), 男, 蒙古族, 内蒙古通辽, 副教授, 主要研究方向: 算子理论.

谱性质的研究吸引了很多学者 (见文 [4, 5] 及其参考文献), 但有关 Moore-Penrose 可逆性的讨论还比较少. 无穷维 Hamilton 算子是具有特殊结构的算子矩阵, 因而具备了很多不同于一般算子矩阵的性质. 所以, 本文的目的是利用无穷维 Hamilton 算子的结构特性给出其 Moore-Penrose 可逆的等价条件.

2 预备知识

先给出无穷维 Hamilton 算子定义.

定义 2.1 设 X 是 Hilbert 空间, $H = \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^* \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(X \oplus X)$. 如果 B 和 C 为自伴算子, 则 H 称为无穷维 Hamilton 算子.

下面回顾线性算子理论中的一些基本知识. 设 $T \in \mathcal{B}(X)$, 称

$$\gamma(T) = \begin{cases} \min\{\|Tx\| : \text{dist}(x, N(T)) = 1\}, & \text{如果 } T \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } T = 0 \end{cases}$$

为 T 的约化极小模. 众所周知, $\gamma(T) > 0$ 当且仅当 $R(T)$ 为闭^[4].

引理 2.1^[6] 设 X 和 Y 为 Hilbert 空间, 如果 $T \in \mathcal{B}(X \oplus Y)$ 具有矩阵形式 $T = \begin{pmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{pmatrix} : X \oplus Y \rightarrow X \oplus Y$ 并且 A 的值域在 X 中稠密, $B \neq 0$, 则 $\gamma(T) \leq \gamma(B)$.

利用引理 2.1, 容易得出下面的推论.

推论 2.1 设 X 和 Y 为 Hilbert 空间, $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y)$ 和 $C \in \mathcal{B}(Y, X)$ 为给定的算子且 $\overline{R(A)} = X$. 如果 $R\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)$ 闭, 则 $R(B)$ 也闭.

引理 2.2^[7] 设 Y 和 Z 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$, $F \subset Z$ 是有限维子空间. 如果 $R(T) + F$ 是闭的, 那么 $R(T)$ 也是闭的. 反之亦然.

3 主要结果

本文的主要结果为

定理 3.1 设 $H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ 是 $X \oplus X$ 上的有界上三角无穷维 Hamilton 算子. 如果 C 作为 $R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)}$ 上的算子具有下面的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2^* & C_3 \end{pmatrix},$$

则下面条件等价:

- (i) H 为 Moore-Penrose 可逆;
- (ii) $H_1 = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & -A_1^* \end{pmatrix} : R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \rightarrow R(A)^\perp \oplus X$ 为 Moore-Penrose 可逆, 其中 $A_1^* = A^*|_{\overline{R(A)}} : \overline{R(A)} \rightarrow X$;
- (iii) $R(C_1)$ 和 $R(C_2^*|_{N(C_1)}) + R(A)$ 均为闭子空间.

证 (i)⇒(ii) 无穷维 Hamilton 算子 H 在空间分解 $X \oplus R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \rightarrow R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \oplus X$ 下具有矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 0 & C_1 & C_2 \\ A_1 & C_2^* & C_3 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

由于

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_1 & C_2 \\ A_1 & C_2^* & C_3 \\ 0 & 0 & A_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & C_2^* & C_3 \\ 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

为 $R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \oplus X$ 上的可逆算子, 因此 H 为 Moore-Penrose 可逆当且仅当

$$\begin{pmatrix} A_1 & C_2^* & C_3 \\ 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{pmatrix}$$

是 Moore-Penrose 可逆的. 由推论 2.1, H_1 为 Moore-Penrose 可逆.

(ii)⇒(i) 假设

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

即

$$Ax_n + Cy_n \rightarrow u_0, -A^*y_n \rightarrow v_0.$$

记 $y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)}$, $y_n^{(1)} \in R(A)^\perp$, $y_n^{(2)} \in \overline{R(A)}$, $u_0 = u_0^{(1)} + u_0^{(2)}$, $u_0^{(1)} \in \overline{R(A)}$, $u_0^{(2)} \in R(A)^\perp$, 则根据 (3.1) 式有

$$A_1x_n + C_2^*y_n^{(1)} + C_3y_n^{(2)} \rightarrow u_0^{(1)}, C_1y_n^{(1)} + C_2y_n^{(2)} \rightarrow u_0^{(2)}, -A_1^*y_n^{(2)} \rightarrow v_0.$$

由于条件 (ii) 成立, 结合 $C_1y_n^{(1)} + C_2y_n^{(2)} \rightarrow u_0^{(2)}$, $-A_1^*y_n^{(2)} \rightarrow v_0$ 可得存在唯一的 $y_0^{(2)} \in \overline{R(A)}$ 使得

$$y_n^{(2)} \rightarrow y_0^{(2)}, -A_1^*y_0^{(2)} = v_0.$$

所以

$$A_1x_n + C_2^*y_n^{(1)} \rightarrow u_0^{(1)} - C_3y_0^{(2)}, C_1y_n^{(1)} \rightarrow u_0^{(2)} - C_2y_0^{(2)}.$$

由 H_1 的 Moore-Penrose 可逆性, H_1^* 也 Moore-Penrose 可逆, 结合 $-A_1(-x_n) + C_2^*y_n^{(1)} \rightarrow u_0^{(1)} - C_3y_0^{(2)}$, $C_1y_n^{(1)} \rightarrow u_0^{(2)} - C_2y_0^{(2)}$ 可知存在 $x_0 \in X$ 和 $y_0^{(1)} \in R(A)^\perp$ 使得

$$A_1x_0 + C_2^*y_0^{(1)} = u_0^{(1)} - C_3y_0^{(2)}, C_1y_0^{(1)} = u_0^{(2)} - C_2y_0^{(2)}.$$

令 $y_0 = y_0^{(1)} + y_0^{(2)}$, 于是

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

即 H 的值域为闭的. 因此, H 为 Moore-Penrose 可逆.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 假设 H_1 为 Moore-Penrose 可逆. 因此 H_1^* 也是 Moore-Penrose 可逆. 利用推论 2.1 即可得知 $R(C_1)$ 闭, 即 C_1 为 Moore-Penrose 可逆. 此时, 在空间分解 $N(C_1) \oplus N(C_1)^\perp \oplus X \rightarrow R(C_1) \oplus R(C_1)^\perp \oplus \overline{R(A)}$ 下 H_1^* 有如下矩阵形式表示

$$\begin{pmatrix} 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & -A_1 \end{pmatrix}.$$

显然, C_{11} 为可逆算子, 故存在 $R(C_1) \oplus R(C_1)^\perp \oplus \overline{R(A)}$ 上的可逆算子 $\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -C_{22}^* C_{11}^{-1} & 0 & I \end{pmatrix}$

使得

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -C_{22}^* C_{11}^{-1} & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^* & C_{22}^* & -A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^* & 0 & -A_1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

(3.2) 式与 H_1^* 的 Moore-Penrose 可逆性即可得出 $R(A_1) + R(C_{21}^*) = R(A) + R(C_2^*|_{N(C_1)})$ 闭.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 因为 C_1 为 Moore-Penrose 可逆, 即 $R(C_1)$ 闭, 因此 (3.2) 式成立. 由条件 (iii) 可知 (3.2) 式右端算子的值域闭, 从而 H_1^* 的值域闭, 即 H_1 是 Moore-Penrose 可逆. 证毕.

由定理 3.1 可得

推论 3.1 设 $H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ 是 $X \oplus X$ 上的有界上三角无穷维 Hamilton 算子且

$R(A)^\perp$ 是有限维的, 则 H 为 Moore-Penrose 可逆当且仅当 A 是 Moore-Penrose 可逆的.

证 算子 H 具有矩阵形式 (3.1) 并且 $R(A)^\perp$ 是有限维的, 因此 (3.1) 式中的 C_1 是有限秩算子, 进而 $R(C_1)$ 闭. 显然 $R(C_2^*|_{N(C_1)})$ 是有限维空间. 因此, 利用引理 2.2 和定理 3.1 可得 H 为 Moore-Penrose 可逆当且仅当 $R(A) + R(C_2^*|_{N(C_1)})$ 闭, 即 $R(A)$ 闭.

注 1 定理 3.1 是上三角无穷维 Hamilton 算子特有的性质, 对一般的上三角算子矩阵未必成立 (见例 1 和例 2).

假设 $X = \ell_2$, 并且用 e_i 表示 ℓ_2 中的第 i 个分量为 1, 其他分量为 0 的元素.

例 1 任意的 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$, 定义算子 $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, $B \in \mathcal{B}(\ell_2)$, $C \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 为

$$Ax = (0, 0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots),$$

$$Bx = (x_3, x_4, x_5, \dots),$$

$$Cx = (x_1, x_2, 0, 0, 0, \dots).$$

易证 $C = C^*$, $R(A)$ 不闭, $R(B)$ 闭且 $N(B) = R(A)^\perp = \text{span}\{e_1, e_2\}$. 现在考虑算子矩阵

$$T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

在空间分解 $\ell_2 \oplus N(B) \oplus N(B)^\perp \rightarrow R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \oplus \ell_2$ 下 T 有如下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

显然

$$T_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} : N(B) \oplus N(B)^\perp \rightarrow R(A)^\perp \oplus \ell_2$$

的值域闭, 即 T_1 为 Moore-Penrose 可逆, 定理 3.1 的条件 (ii) 成立.

另一方面, 因为 $R(A_1) = R(A)$ 不闭, 因此由 (3.3) 式容易看出 $R(T)$ 不闭, 即 T 不是 Moore-Penrose 可逆.

例 2 定义算子 $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, $C \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 为

$$Ax = (0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \dots), \quad Cx = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots),$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$.

下面考虑算子矩阵 $S = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$. 在空间分解 $\ell_2 \oplus N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp \rightarrow R(A)^\perp \oplus \overline{R(A)} \oplus \ell_2$ 下 S 有如下形式

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_2 \\ A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1^* \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

不难发现

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \\ 0 & -A_1^* \end{pmatrix} : N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp \rightarrow R(A)^\perp \oplus \ell_2$$

的值域闭, 满足定理 3.1 的条件 (ii).

另一方面, 容易证明 $R(A) = R(A_1)$ 不闭, 由 (3.4) 式可看出 S 的值域不闭, S 不是 Moore-Penrose 可逆.

注 2 显然, 例 1 和例 2 中的算子 T 和 S 不是上三角无穷维 Hamilton 算子, 所以定理 3.1 不成立.

例 3 算子 $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, $C \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 取为例 1 中的算子, 则 C 为自伴算子, 因此 $H = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$ 为上三角无穷维 Hamilton 算子. 显然

$$H_1 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & -A_1^* \end{pmatrix} : N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp \rightarrow R(A)^\perp \oplus \ell_2$$

的值域不闭, 即 H_1 不是 Moore-Penrose 可逆的. 由定理 3.1, H 不是 Moore-Penrose 可逆的.

下面讨论更一般的情形.

定理 3.2 设 $H = \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^* \end{pmatrix}$ 是 $X \oplus X$ 上的有界无穷维 Hamilton 算子, 其中 C 为 Moore-Penrose 可逆. 则下面两个条件等价:

(i) H 为 Moore-Penrose 可逆;

(ii) $X \oplus X$ 上的无穷维 Hamilton 算子 $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ B - A_2^* C_1^{-1} A_2 & -A'^* \end{pmatrix}$ 为 Moore-Penrose 可逆, 其中 A' 在空间分解 $X \rightarrow N(C) \oplus N(C)^\perp$ 下具有如下形式

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

并且 $A_1 = P_{N(C)} A : X \rightarrow N(C)$, $A_2 = P_{N(C)^\perp} A : X \rightarrow N(C)^\perp$, $C_1 = P_{N(C)^\perp} C|_{N(C)^\perp} : N(C)^\perp \rightarrow N(C)^\perp$.

证 由于 C 是 Moore-Penrose 可逆的自伴算子, 于是 $N(C)^\perp = R(C)$, 因此无穷维 Hamilton 算子 H 在空间分解 $X \oplus N(C) \oplus N(C)^\perp \rightarrow N(C) \oplus N(C)^\perp \oplus X$ 下具有如下算子矩阵形式

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & C_1 \\ B & -A_1^* & -A_2^* \end{pmatrix}.$$

显然, C_1 是可逆的自伴算子. 此时存在 $N(C) \oplus N(C)^\perp \oplus X$ 上的可逆算子

$$U = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -A_2^* C_1^{-1} & I \end{pmatrix}$$

与 $X \oplus N(C) \oplus N(C)^\perp$ 上的可逆算子

$$V = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -C_1^{-1} A_2 & 0 & I \end{pmatrix}$$

使得

$$U \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & C_1 \\ B & -A_1^* & -A_2^* \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \\ B - A_2^* C_1^{-1} A_2 & -A_1^* & 0 \end{pmatrix}.$$

故 H 为 Moore-Penrose 可逆当且仅当

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \\ B - A_2^* C_1^{-1} A_2 & -A_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

是 Moore-Penrose 可逆的, 即 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B - A_2^* C_1^{-1} A_2 & -A_1^* & 0 \end{pmatrix}$ 为 Moore-Penrose 可逆.

其次, 由于 C_1 是自伴算子, 于是 C_1^{-1} 也是自伴算子, 再注意到 B 的自伴性即可得知 $B - A_2^* C_1^{-1} A_2$ 为自伴算子. 此外, 记 $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 那么 $-A'^* = (-A_1^*, 0)$, 故 $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ B - A_2^* C_1^{-1} A_2 & -A'^* \end{pmatrix} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$ 也是无穷维 Hamilton 算子. 证毕.

注 3 定理 3.2 说明了无穷维 Hamilton 算子 H 中的元素算子 C 为 Moore-Penrose 可逆, 那么其 Moore-Penrose 可逆性化为三角无穷维 Hamilton 算子的 Moore-Penrose 可逆性.

参 考 文 献

- [1] Du H K, Deng C Y. The representation and characterization of Drazin inverse of operators on a Hilbert space[J]. Linear Algebra Appl., 2005, 407: 117–124.
- [2] 章里程, 廖祖华. 分块算子矩阵的 Moore-Penrose 逆 [J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(8): 168–172.
- [3] Shao J Y, He J L. Matrices with doubly signed generalized inverse[J]. Linear Algebra Appl., 2002, 355(1): 71–84.
- [4] 王玉红, 侯国林, 阿拉坦仓. 一类上三角算子矩阵的点谱和剩余谱 [J]. 数学杂志, 2014, 34: 931–940.
- [5] Dong Z Q, Cao X H, Zhao H Y. The helton class operators and the single valued extension property[J]. J. Math., 2014, 34: 1033–1043.
- [6] Apostol C. The reduced minimum modulus[J]. Michigan Math. J., 1985, 32: 279–294.
- [7] Müller V. Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebra[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

MOORE-PENROSE INVERTIBILITY FOR SOME CLASS OF INFINITE DIMENSIONAL HAMILTONIAN OPERATORS

HAI Guo-jun, Alatan Cang

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: Let X be an infinite dimensional Hilbert space, we denote by H the bounded infinite dimensional Hamiltonian operator acting on $X \oplus X$ of the form $H = \begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^* \end{pmatrix}$, where B and C are self-adjoint operators. In this paper, we consider the Moore-Penrose invertibility of the infinite dimensional Hamiltonian operator. In the case when $B = 0$ or C is Moore-Penrose invertible, by using space decomposition method, the equivalent conditions for H is Moore-Penrose invertible are given. Furthermore, some examples that illustrate the effectiveness of our results are given.

Keywords: infinite dimensional Hamilton operator; operator matrices; Moore-Penrose invertibility

2010 MR Subject Classification: 47A10; 47B99