

一类时滞依赖状态的集值抽象积分微分方程的可解性

李文胜, 韩慧蓉, 周 千

(西安航空学院理学院, 陕西 西安 710077)

摘 要: 本文研究了一类时滞依赖状态的集值抽象积分微分方程的可解性问题. 利用集值映射不动点定理结合分析预解算子理论的方法, 证明了上述微分方程温和解的存在性, 推广了现有集值微分方程的结果.

关键词: 分数阶算子; 集值积分微分方程; 时滞依赖状态; 分析预解算子

MR(2010) 主题分类号: 34A60; 35R11; 45N05

中图分类号: O175.22; O175.6

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)02-0347-11

1 引言

本文考虑一类时滞依赖状态的集值抽象积分微分方程

$$\frac{d}{dt} [x(t) - F(t, x_t)] \in A \left[x(t) + \int_0^t f(t-s)x(s)ds \right] + G[t, x_{\rho(t, x_t)}],$$
$$t \in J = [0, a], \quad (1.1)$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \quad (1.2)$$

其中 A 是 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中紧分析预解算子 $R(t), t > 0$ 的无穷小生成元, $f(t), t \in J$ 是一个有界线性算子, $G: J \times \mathcal{B} \rightarrow P(X)$ 是有界闭凸值集值映射, $F: J \times \mathcal{B} \rightarrow X$, $\rho: J \times \mathcal{B} \rightarrow (-\infty, a]$ 是给定的函数, $\mathcal{B}$ 是一个抽象的相空间, $x_t: (-\infty, 0] \rightarrow X, x_t(s) = x(t+s), s \leq 0$ 属于 $\mathcal{B}$.

近年来, 时滞依赖状态的微分方程温和解的存在性引起了许多学者的兴趣^[1-3], 具有预解算子的非线性积分微分方程作为偏积分微分方程的抽象形式出现在许多物理现象中^[4-6], 该预解算子类似于 Banach 空间中抽象微分方程的半群算子, 并且可以从半群理论中提取 (见文献 [7-8]), 尽管如此, 该预解算子不满足半群性质, 受文献 [9-10] 启发, 本文旨在利用预解算子理论建立 (1.1)-(1.2) 温和解的存在性.

2 预备知识

$R(t), t > 0$ 是由 A 产生的一个紧分析预解算子. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, $L(X; Y)$ 记为从 X 映射到 Y 的所有有界线性算子构成的 Banach 空间, 并且当 $X = Y$ 时简记为 $L(X)$.

*收稿日期: 2014-09-25

接收日期: 2015-02-26

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11161027); 西安航空学院科研基金资助 (2014KY1210).

作者简介: 李文胜 (1984-), 男, 陕西咸阳, 讲师, 主要研究方向: 泛函微分方程理论.

定义 2.1 ^[11] 若每个集合 $\tilde{B}_i$ 在空间 $C([t_i, t_{i+1}]; X)$ 内是相对紧时, 则称 $B \subseteq \mathcal{PC}$ 是相对紧的.

定义 2.2 若对任意的 $x \in X$ 有 $G(x)$ 是凸(闭)的, 则称集值映射 $G: X \rightarrow P(X)$ 是凸(闭)值的. 对 X 的任一有界子集 B , 如果 $G(B) = \bigcup_{x \in B} G(x)$ 有界, 则称 G 在有界集上有界 (即 $\sup_{x \in B} \{\sup\{\|y\| : y \in G(x)\}\} < \infty$).

定义 2.3 若对任意的 $x_0 \in X$, $G(x_0)$ 是 X 的非空闭子集, 并且对包含 $G(x_0)$ 的 X 的任一开子集 Ω , 存在 x_0 的一个开邻域 V , 使得 $G(V) \subseteq \Omega$, 则称 G 在 X 中是上半连续的.

定义 2.4 如果对 X 的任一有界子集 Ω , 有 $G(\Omega)$ 是相对紧的, 则称集值映射 G 是全连续的.

引理 2.1 ^[12] 设集值映射 ^[13-14] G 是全连续的, 并且有非空紧值, 则 G 是上半连续的当且仅当 G 有闭图像 (即当 $x_n \rightarrow x_*$, $y_n \rightarrow y_*$, $y_n \in G(x_n)$ 时, 有 $y_* \in G(x_*)$).

定义 2.5 记 $\mathcal{N}$ 是 kuratowski 非紧测度 ^[15], 如果集值映射 $G: X \rightarrow P(X)$ 是上半连续的. 且对所有满足 $\mathcal{N}(B) \neq 0$ 的 X 的子集 B , 有 $\mathcal{N}(G(B)) < \mathcal{N}(B)$, 则称 G 是凝聚的 ^[13].

$P_{bd, cp, cv}(X)$, $P_{bd, cl, cv}(X)$, $P_{cp, cv}(X)$ 分别表示由 X 中的所有有界紧凸, 有界闭凸, 紧凸子集组成的集类. 若存在 $x \in X$, 使得 $x \in G(x)$, 则称 x 是集值映射 G 的一个不动点 ^[16].

下面介绍相空间 $\mathcal{B}$ 的公理化定义 ^[17]. 具体来说, $\mathcal{B}$ 是由赋予半模 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ 的从 $(-\infty, 0]$ 映射到 X 的函数组成的线性空间, 并且符合以下公理:

(A) 如果 $x: (-\infty, \sigma+a) \rightarrow X$, $a > 0$, 使得 $x|_{[\sigma, \sigma+a]} \in C([\sigma, \sigma+a], X)$ 且 $x_\sigma \in \mathcal{B}$, 则对任意的 $t \in [\sigma, \sigma+a]$ 以下条件成立: (i) $x_t \in \mathcal{B}$; (ii) $\|x(t)\| \leq H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$; (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t-\sigma) \sup\{\|x(s)\| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t-\sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$, 其中 $H > 0$ 是常数; $K, M: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, K 连续, M 局部有界, 并且 H, K, M 与 $x(\cdot)$ 无关.

(A1) 对 (A) 中的函数 $x(\cdot)$, $t \rightarrow x_t$ 是从 $[\sigma, \sigma+a]$ 映射到 $\mathcal{B}$ 的连续函数.

(B) $\mathcal{B}$ 是完备的.

定义 2.6 集值映射 $G: J \times \mathcal{B} \rightarrow P_{cp, cv}(X)$ 称为 Carathéodory 集值映射, 如果

(i) 对每个 $\psi \in \mathcal{B}$, $G(\cdot, \psi): J \rightarrow X$ 是可测的;

(ii) 对任意的 $t \in J$, $G(t, \cdot): \mathcal{B} \rightarrow X$ 是上半连续的.

引理 2.2 ^[12] 若 G 为 Carathéodory 集值映射, 且对固定的 $\psi \in \mathcal{B}$, 集合 $S_{G, \psi} = \{g \in L^1(J, X) : g(t) \in G(t, \psi), \text{ a.e., } t \in J\}$ 是非空的, $\Gamma: L^1(J, X) \rightarrow C(J, X)$ 是线性连续映射, 则 $\Gamma \circ S_G: C(J, X) \rightarrow P_{cp, cv}(C(J, X))$, $y \rightarrow (\Gamma \circ S_G)(y) = \Gamma(S_{G, y})$ 是 $C(J, X) \times C(J, X)$ 上的闭图算子.

考虑如下系统

$$\frac{dx}{dt} = A \left[x(t) + \int_0^t f(t-s)x(s)ds \right]. \quad (2.1)$$

定义 2.7 ^[7] 方程 (2.1) 的预解算子 ^[4-5] 是一个有界算子泛函 $R(t) \in L(X)$, 且具有下列性质:

(i) $R(0) = I$, I 表示 X 上的恒等算子.

(ii) 对所有的 $u \in X$, $t \mapsto R(t)y$ 是连续的.

(iii) 对 $t \in J$, $R(t) \in B(Y)$, $t \in J$, 其中 Y 是赋予图像范数 $\|y\|_Y = \|Ay\| + \|y\|$ 的

Banach 空间 $D(A)$. 若 $y \in Y$, 有 $R(\cdot)y \in C^1(J, X) \cap C(J, Y)$ 并且

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R(t)y &= A \left[R(t)y + \int_0^t f(t-s)R(s)y ds \right] \\ &= R(t)Ay + \int_0^t R(t-s)AF(s)y ds, t \in J. \end{aligned}$$

令 $0 \in \rho(A)$, 当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 可以定义分数阶算子 A^α , 此算子在其定义域 $D(A^\alpha)^{[4]}$ 上是一个闭线性算子. 并且 $D(A^\alpha)$ 在 X 上凝聚. 表达式

$$\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|, x \in D(A^\alpha)$$

定义了 $D(A^\alpha)$ 上的一个范数. 此后, 用 X_α 表示 Banach 空间 $D(A^\alpha)$ 并赋予范数 $\|x\|_\alpha$.

引理 2.3 ^[4] 由上面条件可得

- (i) $A^\alpha : X_\alpha \rightarrow X_\alpha$, 则当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时, X_α 是一个 Banach 空间.
- (ii) 若预解算子 A 是紧的, 则当 $0 < \beta \leq \alpha$ 时, $X_\alpha \hookrightarrow X_\beta$ 是连续并且紧的.
- (iii) 对每个 $\alpha > 0$, 存在一个正常数 C_α 使得

$$\|A^\alpha R(t)\| \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha}, t \in J.$$

引理 2.4 ^[18] 假设 (a) 和 (b) 成立, 则存在一个常数 $H = H(a)$, 使得

$$\|R(t+h) - R(h)R(t)\|_{L(X)} \leq Hh, 0 \leq h \leq t \leq a.$$

引理 2.5 ^[7] 设 B 是 Banach 空间 X 中的有界凸子集, $\Gamma : B \rightarrow P(B)$ 是上半连续的凝聚集值映射, 如果对任意的 $x \in B$, $\Gamma(x)$ 是 B 中的闭凸子集, 则 Γ 在 B 中有一个不动点.

3 结果与证明

为了证明问题 (1.1)–(1.2) 的温和解的存在性, 假设 $\rho : J \times \mathcal{B} \rightarrow (-\infty, a]$ 连续. 另外, 假定以下条件成立:

H _{φ} 函数 $t \rightarrow \varphi_t$ 从 $\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s, \psi) : \rho(s, \psi) \leq 0, (s, \psi) \in J \times \mathcal{B}\}$ 到 $\mathcal{B}$ 上是连续的, 且存在一个连续有界函数 $J^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \rightarrow (0, \infty)$, 使得对每个 $t \in \mathcal{R}(\rho^-)$, 有 $\|\varphi_t\|_{\mathcal{B}} \leq J^\varphi(t) \|\varphi\|_{\mathcal{B}}$.

H1 存在常数 $M_1, M_2 > 0$, 使得 $\|R(t)\| \leq M_1, \|f(t)\| \leq M_2, t \in J$.

H2 $F : J \times \mathcal{B} \rightarrow X$ 是连续的, 存在 $\beta \in (0, 1)$, $L > 0$ 使得对所有的 $(t_i, \psi_i) \in J \times \mathcal{B}$, $i = 1, 2$, F 是 X_β -值并满足

$$\|A^\beta F(t_1, \psi_1) - A^\beta F(t_2, \psi_2)\| \leq L(|t_1 - t_2| + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}),$$

而且存在正常数 L_1 使得

$$\|A^\beta F(t, \psi)\| \leq L_1(\|\psi\|_{\mathcal{B}} + 1), t \in J, \psi \in \mathcal{B}.$$

H3 函数 $G : J \times \mathcal{B} \rightarrow P_{bd, cp, cv}(X)$ 满足如下性质:

- (a) 对所有的 $\psi \in \mathcal{B}$, 函数 $G(\cdot, \psi) : J \rightarrow X$ 是强可测的.
 (b) 对每个 $t \in J$, 函数 $G(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow X$ 是连续的, 且对固定的 $\psi \in \mathcal{B}$, 集合 $S_{G, \psi} = \{g \in L^1(J, X) : g(t) \in G(t, \psi), \text{ a.e., } t \in J\}$ 是非空的.
 (c) 对每个正常数 r , 存在正函数 $\Theta_r \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ 使得

$$\|G(t, \psi)\| = \sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r} \{\|g\| : g(t) \in G(t, \psi)\} \leq \Theta_r(t), \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_0^a \Theta_r(t) dt = \delta < +\infty.$$

注 3.1 ^[17] 设 $\varphi \in \mathcal{B}, t \leq 0$. φ_t 表示定义为 $\varphi_t(\theta) = \varphi(t + \theta)$ 形式的函数. 因此, 如果公理 A 中的函数 $x(\cdot)$ 满足 $x_0 = \varphi$, 则 $x_t = \varphi_t$.

定义 3.1 函数 $x : (-\infty, a] \rightarrow X$ 称为问题 (1.1)–(1.2) 的温和解, 如果对任意的 $s \in J$, 有 $x_0 = \varphi, x_{\rho(s, x_s)} \in \mathcal{B}$, 函数 $AR(t-s)F(s, x_s), s \in [0, a]$ Bochner 可积, $x(\cdot)$ 在区间 $(t_i, t_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, n)$ 上是连续的, 并且满足

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t)[\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, x_t) + \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s) ds \\ &\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau)F(\tau, x_\tau) d\tau ds + \int_0^t R(t-s)G(s, x_{\rho(s, x_s)}) ds. \end{aligned}$$

引理 3.1 ^[17] 如果 $x : (-\infty, a] \rightarrow X$ 是一个使得 $x_0 = \varphi$ 且 $x|_J \in \mathcal{PC}(J, X)$ 成立的函数, 则

$$\|x_s\|_{\mathcal{B}} \leq \left(M_a + \widetilde{J}^\varphi\right) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_a \sup\{\|x(\theta)\|; \theta \in [0, \max\{0, s\}]\}, s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup J,$$

其中 $\widetilde{J}^\varphi = \sup_{t \in \mathcal{R}(\rho^-)} J^\varphi(t), M_a = \sup_{t \in J} M(t), K_a = \max_{t \in J} K(t)$.

定理 3.1 假设 H1–H3 和 H_φ 成立, 如果

$$K_a \left[\|A^{-\beta}\| L_1 + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^\beta L_1 (1 + aM_2) + M_1 \delta \right] < 1, \quad (3.1)$$

$$K_a \left[\|A^{-\beta}\| L + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^\beta L (1 + aM_2) \right] < 1, \quad (3.2)$$

则系统 (1.1)–(1.2) 至少存在一个温和解.

证 在赋予一致收敛范数的空间 $\mathbb{Y} = \{u \in \mathcal{PC} : u(0) = \varphi(0)\}$ 上定义算子 $\Gamma : \mathbb{Y} \rightarrow P(\mathbb{Y})$, 定义如下

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \left\{ u \in \mathbb{Y} : u(t) = R(t)[\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, \bar{x}_t) + \int_0^t AR(t-s)F(s, \bar{x}_s) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau)F(\tau, \bar{x}_\tau) d\tau ds + \int_0^t R(t-s)g(s, \bar{x}_{\rho(s, \bar{x}_s)}) ds, \right. \\ &\quad \left. t \in J, g \in S_{G, \bar{x}_\rho}, t \in J \right\}, \end{aligned}$$

其中

$$S_{G, \bar{x}_\rho} = \{g \in L^1(J, X) : g(t) \in G(t, \bar{x}_{\rho(t, x_t)}), \text{ a.e., } t \in J\},$$

$\bar{x} : (-\infty, a] \rightarrow X$ 满足 $\bar{x}_0 = \varphi$, 且在 J 上 $\bar{x} = x$.

设 $\bar{\varphi} : (-\infty, a) \rightarrow X$ 是 φ 的延拓使得在 J 上 $\bar{\varphi}(\theta) = \varphi(0)$, 且

$$\widetilde{J^\varphi} = \sup \{ J^\varphi(s) : s \in \mathcal{R}(\rho^-) \}.$$

由公理 A 和 $R(t)$ 的强连续性, 可知当 $x \in B_r(0, \mathbb{Y})$ 时, $\Gamma x \in \mathcal{PC}$. 又由引理 2.3、假设 H2 和引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned} \|AR(t-s)F(s, \bar{x}_s)\| &= \|A^{1-\beta}R(t-s)A^\beta F(s, \bar{x}_s)\| \\ &\leq \frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J^\varphi}) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right], \end{aligned}$$

然后由 Bocher's 定理^[19] 可知 $AR(t-s)F(s, \bar{x}_s)$ 是可积的. 所以 Γ 在 $B_r(0, \mathbb{Y})$ 上有明确定义.

分下面几步来证明温和解的存在性.

第一步 存在 $r > 0$, 使得 $\Gamma(B_r(0, \mathbb{Y})) \subset B_r(0, \mathbb{Y})$.

对任意的 $r > 0$, 易知 B_r 是 $\mathbb{Y}$ 中的一个有界闭凸子集. 下面证明存在 $r > 0$, 使得 $\Gamma(B_r) \subset B_r$, 其中 $\Gamma(B_r) = \bigcup_{x \in B_r} \Gamma(x)$. 采用反证法, 事实上, 如果上述结果不成立, 则对任意的 $r > 0$, 存在 $x^r \in B_r$, 使得 $u^r \in \Gamma(x^r)$ 但 $\|u^r\|_\infty > r$, 且对某些 $g^r \in S_{G, (\bar{x}^r)_\rho}$, 有

$$\begin{aligned} u^r(t) &= R(t)[\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, x_t) + \int_0^t AR(t-s)F(s, x_s) ds \\ &\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau)F(\tau, x_\tau) d\tau ds + \int_0^t R(t-s)G(s, x_{\rho(s, x_s)}) ds, \end{aligned}$$

故 $r < \|u^r\|_\infty = \max_{t \in J} |u^r(t)|$.

因此对某些 $t \in [0, a]$, 有

$$\begin{aligned} r &< \|R(t)[\varphi(0) - F(0, \varphi)]\| + \|F(t, (\bar{x}^r)_t)\| \\ &\quad + \int_0^t \|AR(t-s)F(s, (\bar{x}^r)_s)\| ds \\ &\quad + \left\| \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau)F(\tau, \bar{x}^r_\tau) d\tau ds \right\| \\ &\quad + \int_0^t \|R(t-s)G(s, \bar{x}^r_{\rho(s, \bar{x}_s)})\| ds \\ &\leq M_1 [H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \|A^{-\beta}\| (L_1\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1)] \\ &\quad + \|A^{-\beta}\| L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J^\varphi}) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\beta} C_{1-\beta} a^\beta L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J^\varphi}) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right] \\ &\quad + aM_2 \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r-s)} L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J^\varphi}) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right] ds \\ &\quad + M_1 \int_0^{t^r} \Theta_{rK_a + (M_a + \widetilde{J^\varphi}) \|\varphi\|_{\mathcal{B}}} (s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_1 [H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + \|A^{-\beta}\| (L_1\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1)] \\
&\quad + \|A^{-\beta}\| L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J}^\varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{\beta} C_{1-\beta} a^\beta L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J}^\varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{\beta} C_{1-\beta} a^{1+\beta} M_2 L_1 \left[rK_a + (M_a + \widetilde{J}^\varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + 1 \right] \\
&\quad + M_1 \int_0^a \Theta_{rK_a + (M_a + \widetilde{J}^\varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{B}}} (s) ds,
\end{aligned}$$

所以

$$1 \leq K_a \left[\|A^{-\beta}\| L_1 + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^\beta L_1 (1 + aM_2) + M_1 \delta \right],$$

这与 (3.1) 式矛盾. 因此存在 $r > 0$ 使得 $\Gamma(B_r(0, \mathbb{Y})) \subset B_r(0, \mathbb{Y})$.

第二步 对每个 $x \in \mathbb{Y}$, $\Gamma(x)$ 是凸的.

如果 $u_1, u_2 \in \Gamma(x)$, 则存在 $g_1, g_2 \in S_{G, \bar{x}_\rho}$, 使得对任意的 $t \in J$, 有

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= R(t) [\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, x_t) + \int_0^t AR(t-s) F(s, x_s) ds \\
&\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau) F(\tau, x_\tau) d\tau ds + \int_0^t R(t-s) g_j(s) ds, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

设 $0 \leq \lambda \leq 1$, 则对任意的 $t \in J$, 有

$$\begin{aligned}
(\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2)(t) &= R(t) [\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, x_t) + \int_0^t AR(t-s) F(s, x_s) ds \\
&\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau) F(\tau, x_\tau) d\tau ds \\
&\quad + \int_0^t R(t-s) [\lambda g_1(s) + (1-\lambda) g_2(s)] ds.
\end{aligned}$$

因为 $S_{G, \bar{x}_\rho}$ 是凸的 (因为 G 有凸值), 所以

$$(\lambda u_1 + (1-\lambda) u_2) \in \Gamma(x).$$

第三步 对每个 $x \in \mathbb{Y}$, $\Gamma(x)$ 是闭的.

设 $\{x_n\}_{n \geq 0} \in \Gamma(y)$, 使得在 $\mathbb{Y}$ 中 $x_n \rightarrow x$, 则 $x \in \mathbb{Y}$, 且存在 $g_n \in S_{G, \bar{x}_\rho}$, 使得

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= R(t) [\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, x_t) + \int_0^t AR(t-s) F(s, x_s) ds \\
&\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau) F(\tau, x_\tau) d\tau ds + \int_0^t R(t-s) g_n(s) ds.
\end{aligned}$$

由于 G 有非空紧值, 则在 $L^1(J, X)$ 中存在一个序列 g_n 使得 $g_n \rightarrow g$, 则 $g \in S_{G, \bar{x}_\rho}$. 故

$$\begin{aligned}
x_n(t) \rightarrow x(t) &= R(t) [\varphi(0) - F(0, \varphi)] + F(t, x_t) + \int_0^t AR(t-s) F(s, x_s) ds \\
&\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau) F(\tau, x_\tau) d\tau ds + \int_0^t R(t-s) g(s) ds,
\end{aligned}$$

从而得到 $x \in \Gamma(x)$.

第四步 从 $B_r(0, \mathbb{Y})$ 到 $B_r(0, \mathbb{Y})$ 上, Γ 是凝聚映射.

为证明 Γ 是凝聚映射, 令 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, 其中

$$\begin{aligned}\Gamma_1 x(t) &= F(t, \bar{x}_t) - R(t)F(0, \varphi) + \int_0^t AR(t-s)F(s, \bar{x}_s)ds \\ &\quad + \int_0^t AR(t-s) \int_0^s f(s-\tau)F(\tau, \bar{x}_\tau) d\tau ds, \quad t \in J, \\ \Gamma_2 x &= \left\{ u \in \mathbb{Y} : u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)g(s)ds, \quad g \in S_{G, \bar{x}_\rho} \right\}.\end{aligned}$$

下面证明 Γ_1 压缩且 Γ_2 是全连续算子. 为了证明 Γ_1 压缩, 任取 $x^*, x^{**} \in B_r(0, \mathbb{Y})$, 对每个 $t \in J$, 有

$$\begin{aligned}\|(\Gamma_1 x^*)(t) - (\Gamma_1 x^{**})(t)\| &\leq \|F(t, \bar{x}_t^*) - F(t, \bar{x}_t^{**})\| \\ &\quad + \left\| \int_0^t AR(t-s) [F(s, \bar{x}_s^*) - F(s, \bar{x}_s^{**})] ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^t AR(t-s) \int_0^s M_1 [F(\tau, \bar{x}_\tau^*) - F(\tau, \bar{x}_\tau^{**})] d\tau ds \right\| \\ &\leq \|A^{-\beta}\| L \|\bar{x}_t^* - \bar{x}_t^{**}\|_{\mathcal{B}} + L \int_0^t \frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^\beta} \|\bar{x}_s^* - \bar{x}_s^{**}\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\quad + aM_2 L \int_0^t \frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^\beta} \|\bar{x}_s^* - \bar{x}_s^{**}\|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \|A^{-\beta}\| LK_a \sup \{ \|\bar{x}^*(\theta) - \bar{x}^{**}(\theta)\|, \quad 0 \leq \theta \leq t \} \\ &\quad + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^\beta LK_a \sup \{ \|\bar{x}^*(\theta) - \bar{x}^{**}(\theta)\|, \quad 0 \leq \theta \leq t \} \\ &\quad + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^{\beta+1} M_2 LK_a \sup \{ \|\bar{x}^*(\theta) - \bar{x}^{**}(\theta)\|, \quad 0 \leq \theta \leq t \} \\ &\leq L^* \sup_{0 \leq s \leq a} \|\bar{x}^*(s) - \bar{x}^{**}(s)\| \\ &= L^* \sup_{0 \leq s \leq a} \|x^*(s) - x^{**}(s)\| \quad (\text{since } \bar{x} = x \text{ on } J),\end{aligned}$$

其中

$$L^* = K_a \left[\|A^{-\beta}\| L + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^\beta L (1 + aM_2) \right] < 1$$

(见 (3.2) 式). 因此

$$\|\Gamma_1 x^* - \Gamma_1 x^{**}\|_{\mathcal{PC}} \leq L^* \|x^* - x^{**}\|_{\mathcal{PC}},$$

即 Γ_1 是压缩的.

下面证明 Γ_2 是全连续的.

(i) 显然 $\Gamma_2(B_r(0, \mathbb{Y})) = \{\Gamma_2 x : x \in B_r(0, \mathbb{Y})\}$ 是有界的.

(ii) $\Gamma_2(B_r(0, \mathbb{Y})) = \{\Gamma_2 x : x \in B_r(0, \mathbb{Y})\}$ 是等度连续的.

令 $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$. 设 $x \in B_r, u \in \Gamma_2(x)$, 则存在 $g \in S_{G, \bar{x}_\rho}$, 使得

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^t R(t-s)g(s)ds,$$

则

$$\begin{aligned} \|u(t_2) - u(t_1)\| &\leq \| [R(t_2) - R(t_1)]\varphi(0) \| \\ &\quad + \left\| \int_0^{t_1-\varepsilon} [R(t_2-s) - R(t_1-s)]G(s, \bar{x}_{\rho(s, \bar{x}_s)})ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} [R(t_2-s) - R(t_1-s)]G(s, \bar{x}_{\rho(s, \bar{x}_s)})ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t_1}^{t_2} R(t_2-s)G(s, \bar{x}_{\rho(s, \bar{x}_s)})ds \right\| \\ &\leq \| [R(t_2) - R(t_1)]\varphi(0) \| \\ &\quad + \int_0^{t_1-\varepsilon} \|R(t_2-s) - R(t_1-s)\| \Theta_{r^*}(s)ds \\ &\quad + 2M_1 \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \Theta_{r^*}(s)ds + M_1 \int_{t_1}^{t_2} \Theta_{r^*}(s)ds, \end{aligned}$$

其中

$$r^* = (M_a + \widetilde{J}^\varphi) \|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_a r.$$

因为 $R(t)$ 是紧且解析的, 所以 $R(t)$ 在 $(0, a]$ 上是一致算子拓扑连续的. 又因 $t_2 \rightarrow t_1$ 且 ε 充分小, 所以上述不等式的右端趋于零且与 $x \in B_r$ 无关.

(iii) $(\Gamma_2 B_r(0, \mathbb{Y}))(t) = \{\Gamma_2 x(t) : x \in B_r(0, \mathbb{Y})\}$ 是相对紧的 $t \in J$.

当 $t = 0$ 时, 易证 $\Gamma_2(B_r)(t)$ 是相对紧的. 令 $0 < t \leq a$ 是固定的, 且 $0 < \epsilon < t$, 对 $y \in B_r, u \in \Gamma_2(x)$, 存在泛函 $g \in S_{G, \bar{x}_\rho}$, 使得

$$u(t) = R(t)\varphi(0) + \int_0^{t-\epsilon} R(t-s)g(s)ds + \int_{t-\epsilon}^t R(t-s)g(s)ds.$$

当 $t = 0$ 时, 显然 $\Gamma_2(B_r)(t)$ 在 X 中是相对紧的. 假如 $0 < t \leq a$ 是固定的且 $0 < \epsilon < t$, 对任意的 $z \in B_r$ 和 $\mathcal{K}_1 \in \Gamma_2(x)$, 存在 $g \in S_{G, z_\rho}$, 使得

$$\mathcal{K}_1(t) = \int_0^t R(t-s)g(s)ds.$$

显然, 即需要证明集合

$$U(t) = \left\{ \int_0^t R(t-s)g(s)ds \right\}$$

在 X 中是相对紧的.

由引理 2.4 和算子 $R(\epsilon)$ 的紧性可知

$$U_\epsilon(t) = \left\{ R(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} R(t-s-\epsilon)g(s)ds \right\}$$

在 X 中是相对紧的, 而且由引理 2.4, 有

$$\begin{aligned} & \left\| R(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} R(t-s-\epsilon) g(s) ds - \int_0^{t-\epsilon} R(t-s) g(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^{t-\epsilon} R(\epsilon) R(t-s-\epsilon) g(s) ds - \int_0^{t-\epsilon} R(t-s) g(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{t-\epsilon} \|R(\epsilon) R(t-s-\epsilon) - R(t-s)\|_{L(X)} \|g(s)\| ds \\ &\leq \epsilon H \int_0^{t-\epsilon} \|g(s)\| ds. \end{aligned}$$

所以集合 $\left\{ \int_0^{t-\epsilon} R(t-s) g(s) ds \right\}$ 在 X 中是相对紧的. 对任意的 $t \in J$, 有

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t R(t-s) g(s) ds - \int_0^{t-\epsilon} R(t-s) g(s) ds \right\| &= \left\| \int_{t-\epsilon}^t R(t-s) g(s) ds \right\| \\ &\leq M_1 \int_{t_1-\epsilon}^{t_1} \Theta_{r^*}(s) ds, \end{aligned}$$

不等式右端当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 一致收敛于零. 由此可知存在相对紧集序列任意逼近于集合 $\left\{ \int_0^t R(t-s) g(s) ds \right\}$. 所以集合 $\left\{ \int_0^t R(t-s) g(s) ds \right\}$ 是 X 中的相对紧集.

(iv) Γ_2 有闭图. 设 $y^n \rightarrow y^*$, $y^n \in B_r$, $u_n \in \Gamma_2(y^n)$ 及 $u_n \rightarrow u^*$, 需要证明 $u^* \in \Gamma_2(y^*)$. 事实上, 若 $u_n \in \Gamma_2(y^n)$, 则存在 $f_n \in S_{G, (\overline{y^n})_\rho}$, 使得对任意的 $t \in J$, 有

$$u_n(t) = R(t) \varphi(0) + \int_0^t R(t-s) g_n(s) ds.$$

下面证明存在 $g^* \in S_{G, (\overline{y^*})_\rho}$, 使得

$$u^*(t) = R(t) \varphi(0) + \int_0^t R(t-s) g^*(s) ds.$$

易知当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\| [u_n - R(t) \varphi(0)] - [u^* - R(t) \varphi(0)] \| \rightarrow 0.$$

考虑如下线性连续算子

$$\Gamma^*: L^1(J, X) \rightarrow C(J, X), \quad f \rightarrow \Gamma^*(g)(t) = \int_0^t R(t-s) g(s) ds.$$

由引理 2.2 可得 $\Gamma^* \circ S_G$ 是闭图算子, 且有

$$u_n(t) - R(t) \varphi(0) \in \Gamma^* \left(S_{G, (\overline{y^n})_\rho} \right).$$

由于 $y^n \rightarrow y^*$, 从引理 2.2 可得

$$u^*(t) - R(t)\varphi(0) \in \Gamma^* \left(S_{G, (\overline{y^*})_\rho} \right).$$

即一定存在 $g^*(t) \in S_{G, (\overline{y^*})_\rho}$, 使得

$$u^*(t) - R(t)\varphi(0) = \Gamma^*(g^*(t)) = \int_0^t R(t-s)g^*(s)ds.$$

所以 Γ_2 是上半连续的. 从而 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 是上半连续且凝聚的. 由引理 2.5 知具有分数阶算子的时滞依赖状态的脉冲多值积分微分方程问题 (1.1)–(1.2) 至少有一个温和解.

推论 3.1 假设 H1, H2, H3(a)–H3(b), H_φ 以及下面条件成立

H3(c') 存在一个可积函数 $m: J \rightarrow [0, +\infty)$ 和常数 $v \in [0, 1)$ 使得

$$\|G(t, \psi)\| \leq m(t)(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}}^v) \text{ 对每一个 } (t, \psi) \in J \times \mathcal{B},$$

则当

$$K_a \left[\max\{L, L_1\} \left(\|A^{-\beta}\| + (1 + aM_2) \frac{C_{1-\beta}}{\beta} \right) \right] < 1$$

时, 问题 (1.1)–(1.2) 至少存在一个温和解.

参 考 文 献

- [1] Hernández E M, McKibben M A. On state-dependent delay partial neutral functional-differential equations[J]. Appl. Math. Comput., 2007, 186(1): 294–301.
- [2] Li W S, Chang Y K, Nieto J J. Solvability of impulsive neutral evolution differential inclusions with state-dependent delay[J]. Math. Comput. Model., 2009, 49(9-10): 1920–1927.
- [3] Dabas J, Chauhan A. Existence and uniqueness of mild solution for an impulsive neutral fractional integro-differential equation with infinite delay[J]. Math. Comput. Model., 2013, 57(3-4): 754–763.
- [4] Grimmer R, Pritchard A J. Analytic resolvent operators for integral equations in a Banach space[J]. J. Differ. Equ., 1983, 50(2): 234–259.
- [5] Oka H. Integrated resolvent operators[J]. J. Integ. Equ., 1995, 7(2): 193–232.
- [6] 张林丽, 刘安平, 马晴霞等. 一阶脉冲时滞积分微分方程边值问题 [J]. 数学杂志, 2014, 34(2): 265–271.
- [7] Grimmer R. Resolvent operators for integral equations in a Banach space[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 273(1): 333–349.
- [8] Pruss J. On resolvent operators for linear integrodifferential equations of Volterra type[J]. J. Integ. Equations, 1983, 5: 211–236.
- [9] Anguraj A, Mallika Arjunan M, Hernández E M. Existence results for an impulsive neutral functional differential equation with state-dependent delay[J]. Appl. Anal., 2007, 86(7): 861–872.
- [10] Hernández E, Prokopczyk A, Luiz Ladeira. A note on partial functional differential equations with state-dependent delay[J]. Nonl. Anal. RWA, 2006, 7(4): 510–519.
- [11] Hernández E, Pierri M, Goncalves G. Existence results for an impulsive abstract partial differential equation with state-dependent delay[J]. Comput. Appl. Math., 2006, 52(3-4): 411–420.

- [12] Lasota A, Opial Z. An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations[J]. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences. Mathematiques, Astronomiques et Physiques, 1965, 13: 781–786.
- [13] Deimling K. Multivalued differential equation[M]. Berlin: De Gruyter, 1992.
- [14] Dhage B C. Multi-valued mapping and fixed points, II[J]. Tamkang J. Math., 2006, 37(1): 27–46.
- [15] Banas J, Goebel K. Measure of noncompactness in Banach spaces[M]. New York: Marcel Dekker, 1980.
- [16] Hu S, Papageorgiou N. Handbook of multivalued analysis[M]. Boston: Kluwer Dor drecht, 1997.
- [17] Hernandez E M. Existence results for partial neutral integrodifferential equations with unbounded delay[J]. J. Math. Anal. Appl., 2004, 292(1): 194–210.
- [18] Liang J, Liu J H, Xiao T J. Nonlocal impulsive problems for nonlinear differential equations in Banach spaces[J]. Math. Comput. Model., 2009, 49(3-4): 798–804.
- [19] Marle C M. Mesures et probabilités[M]. Paris: Hermam, 1974.

EXISTENCE RESULTS OF MULTI-VALUED ABSTRACT INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH STATE-DEPENDENT DELAY VIA FRACTIONAL OPERATORS

LI Wen-sheng, HAN Hui-rong, ZHOU Qian

(*School of Science, Xi'an Aeronautical University, Xi'an 710077, China*)

Abstract: This paper is concerned with the existence of mild solutions for a multi-valued abstract integro-differential equations with state-dependent delay via fractional operators. By using the theories of a fixed point theorem for multivalued version combined with analytic resolvent operators, some existence theorems are proved. The result of multi-valued differential equations are extended.

Keywords: via fractional operators; multi-valued integro-differential equations; state-dependent delay; analytic resolvent

2010 MR Subject Classification: 34A60; 35R11; 45N05