Vol. 37 (2017)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

不同权的 Bloch 型空间之间的加权复合算子再刻画

范海霞, 席利华, 张学军
(湖南师范大学数学与计算机科学学院, 湖南 长沙 410006)

摘 要: 本文研究了单位圆中从空间 β_L 到 β_α 的加权复合算子 uC_φ 为有界算子和紧算子的条件. 利用阶估计等方法, 获得了有界性和紧性的简捷充要条件, 推广了叶善力的相应结果.

关 键 词: 有界性; 紧性; 加权复合算子; Bloch 型空间; 单位圆
MR(2010) **主题分类号**: 30D45; 47B38 **中 图 分 类 号**: O174.51; O177.2
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)01-0169-08

1 问题的引进和定义

设 D 是单位圆, $H(D)$ 表示 D 上的解析函数全体, H^∞ 表示 D 上的有界解析函数类, 并赋以范数 $||f||_\infty = \sup\{|f(z)|:\ z\in D\}$; dv 为标准体测度, 满足 $\displaystyle\int_D dv(z)=1$.

设 $\alpha>0$, α-Bloch 型空间 β_α 和对数权 Bloch 型空间 β_L 分别定义如下:

$$\beta_\alpha=\{f: f\in H(D)\ \text{且}\ ||f||_\alpha=|f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha\ |f'(z)|<\infty\};$$

$$\beta_L=\{f: f\in H(D)\ \text{且}\ ||f||_L=|f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\left(\ln\frac{2}{1-|z|}\right)|f'(z)|<\infty\} .$$

设 $\gamma>-1$ 和 $p>0$, D 上加权 Bergman 空间定义如下:

$$A^p_\gamma=\left\{f:\ f\in H(D)\ \ \text{且}\ \ ||f||_{A^p_\gamma}=\left(\int_D|f(z)|^p\ dv_\gamma(z)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\} ,$$

这里 $dv_\gamma(z)=c_\gamma(1-|z|^2)^\gamma\ dv(z)$, 常数 c_γ 满足 $\displaystyle\int_D dv_\gamma(z)=1$. 当 $\gamma=0$ 时 A^p_γ 就是 Bergman 空间 A^p.

设 $u\in H(D)$, φ 为 D 上的解析自映射, X 和 Y 为两个解析函数空间, 则 X 到 Y 的加权复合算子 uC_φ 定义如下:

$$(uC_\varphi f)(z)=u(z)f[\varphi(z)]\quad (f\in X) .$$

当 $u(z)=1$ 时就是复合算子 C_φ; 当 $\varphi(z)=z$ 时就是乘子算子 M_u .

*收稿日期: 2014-04-25 接收日期: 2015-02-11
基金项目: 湖南省自然科学基金资助 (2015JJ2095).
作者简介: 范海霞 (1989–), 女, 湖南衡阳, 硕士, 研究方向: 函数空间和算子理论.

在上世纪九十年代, Madigan 和 Matheson 在文献 [1] 和 [2] 中研究了 D 上 Lipschitz 空间、Bloch 空间和小 Bloch 空间上复合算子 C_φ 的有界性和紧性问题, 他们证明了 C_φ 在 Bloch 空间上总是有界的和 C_φ 在小 Bloch 空间上有界当且仅当 φ 在小 Bloch 空间中等结论; 在 2000 年, 史济怀先生和罗罗博士在文献 [3] 中将 Bloch 空间的结论推广到了 C^n 中的齐性域上; 接下来在 2001 年, Ohno 和赵如汉在文献 [4] 中就 Bloch 空间和小 Bloch 空间讨论了加权复合算子的有界性和紧性, 给出了比较完整的结果; 在 2003 年, 张学军在文献 [5] 中讨论了 p-Bloch 空间和 q-Bloch 空间之间加权复合算子为有界算子和紧算子的条件, 获得了较好的结果但尚不完整; 在 2007 年, 叶善力在文献 [6] 中探讨了单位圆中对数权 Bloch 型空间 β_L 与 α-Bloch 型空间 β_α 之间加权复合算子的问题, 他给出了如下结果.

定理 A 设 $\alpha > 0$, u 在单位圆 D 上解析, φ 是 D 上的解析自映射, 则 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的有界算子之充要条件为

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha\left(\ln\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u'(z)|<\infty$$

且

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha\left\{(1-|\varphi(z)|^2)\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right\}^{-1}|u(z)\varphi'(z)|<\infty.$$

定理 B 设 $\alpha > 0$, u 在单位圆 D 上解析, φ 是 D 上的解析自映射, uC_φ 是 β_L 到 β_α 的有界算子, 则 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的紧算子之充要条件为

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}(1-|z|^2)^\alpha\left(\ln\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u'(z)|=0$$

且

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}(1-|z|^2)^\alpha\left\{(1-|\varphi(z)|^2)\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right\}^{-1}|u(z)\varphi'(z)|=0.$$

实际上, 当 $\alpha < 1$ 时上述两定理讨论的是大空间到小空间的问题, 若 φ 为 D 上的自同构, 则 u 必须恒为 0, 真正意义较大的是 $\alpha \geq 1$ 时, 在讨论中发现, 当 $\alpha > 1$ 时定理 A 和定理 B 中的这两个条件不是独立的. 另外, 紧算子的确先是有界算子, 但有界性也是要通过 u 和 φ 满足一定条件来刻画的, 所以定理 B 中可以不必先给一个有界性的先决条件, 而是通过 u 和 φ 直接进行刻画, 如果 $||\varphi||_\infty < 1$ 的话, 定理 B 中后两个条件是不存在的, 因而紧性条件可以视 $||\varphi||_\infty < 1$ 和 $||\varphi||_\infty = 1$ 而定. 本文的主要工作就是给出了 $\alpha > 1$ 时, 定理 A 中较简捷的充要条件和定理 B 中不同的充要条件.

本文中 c、c_1、c_2、c_3 等表示与变量 z、w 等无关的常数, 为方便起见, 不同的位置可以表示不同的数.

2 引理和主要结果

引理 2.1 设 $\alpha > 1$, u 在 D 上解析, φ 是 D 上的解析自映射.

(1) 若 $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\dfrac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|=M<\infty$, 则有

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u'(z)|\leq cM.$$

(2) 若 $\lim\limits_{|z|\to 1-0}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\dfrac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|=0$, 则有

$$\lim_{|z|\to 1-0}(1-|z|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u'(z)|=0.$$

证 (1) 因为当 $0\le x<1$ 时,

$$h(x)=\ln\ln\frac{4}{1-x}\left(\ln\ln\frac{4}{1-x^2}\right)^{-1}\ge 1$$

且连续, 又

$$\lim_{x\to 1-0}\ln\ln\frac{4}{1-x}\left(\ln\ln\frac{4}{1-x^2}\right)^{-1}=1\ .$$

这样就有

$$1=\inf_{0\le x<1}h(x)<M_0=\sup_{0\le x<1}h(x)<\infty\ . \tag{2.1}$$

此外, 对任何复数 $|\xi|\ge 1$, 就对数主支 ($\ln 1=0$) 有

$$\ln|\xi|\le|\ln\xi|=\{(\ln|\xi|)^2+(\arg\xi)^2\}^{\frac{1}{2}}\le\ln|\xi|+\pi, \tag{2.2}$$

以及对任意 $z\in D$ 和 $k\ge 2$ 有

$$\left|\ln\frac{k}{1-z}\right|=\left|\ln k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right|\le\ln k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n}=\ln\frac{k}{1-|z|}\ . \tag{2.3}$$

当 $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\dfrac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|=M<\infty$ 时, 对任意 $w\in D$, 令

$$F_w(z)=\left(\ln\ln\frac{4}{1-\overline{\varphi(w)}\ \varphi(z)}\right)u(z),$$

由上式和 (2.1)–(2.3) 式知

$$|F_w(z)|\le\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|}+\pi\right)|u(z)|\le\left(1+\frac{\pi}{\ln\ln 4}\right)\frac{M_0M}{(1-|z|^2)^{\alpha-1}}\ .$$

这样对一切 $\gamma>\alpha-2$ 有 $F_w\in A^1_\gamma$, 由文献 [7] 中的定理 2.2 ($n=1$ 的情形) 知

$$F_w(z)=\int_D\frac{F_w(\xi)}{(1-\overline{\xi}z)^{2+\gamma}}\ dv_\gamma(\xi)\quad(z\in D)\ .$$

根据文献 [8] 中命题 1.4.10 ($n=1$ 的情形) 可得

$$\begin{aligned}|F'_w(z)|&=\left|\int_D\frac{(2+\gamma)\ \overline{\xi}\ F_w(\xi)}{(1-\overline{\xi}z)^{3+\gamma}}\ dv_\gamma(\xi)\right|\\&\le\int_D\frac{c_1M(1-|\xi|^2)^{\gamma-\alpha+1}}{|1-\overline{\xi}z|^{3+\gamma}}\ dv(\xi)\le\frac{c_2M}{(1-|z|^2)^{\alpha}}\ .\end{aligned} \tag{2.4}$$

在 (2.4) 式中取 $z=w$ 经过计算并结合 Pick 引理可得

$$\begin{aligned}&(1-|w|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)|u'(w)|\\ \le\ & c_2M+\frac{(1-|w|^2)\ |\varphi'(w)|}{1-|\varphi(w)|^2}\,(1-|w|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^{-1}|u(w)||\varphi(w)|\\ \le\ & c_2M+\left(\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^{-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)^{-1}M\le cM\ .\end{aligned}$$

由 w 的任意性可知

$$\sup_{w\in D}(1-|w|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)|u'(w)|\le cM\ . \tag{2.5}$$

(2) 由 $\lim\limits_{|z|\to 1-0}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\dfrac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|=0$ 知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $0<r_0<1$, 当 $r_0<|z|<1$ 时, 有

$$(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|<\varepsilon\ . \tag{2.6}$$

当 $|\xi|\le r_0$ 时, 由 (2.2)–(2.3) 式应用到 (1) 中的 F_w 可得

$$|F_w(\xi)|\le\left(\ln\ln\frac{4}{1-t_0}+\pi\right)\max_{|\xi|\le r_0}|u(\xi)|=M_1,\ 这里\ t_0=\max_{|\xi|\le r_0}|\varphi(\xi)|<1\ . \tag{2.7}$$

根据 (2.6)–(2.7) 式和文献 [8] 中命题 1.4.10 ($n=1$ 的情形) 有

$$\begin{aligned}|F_w'(z)|&\le\int_{|\xi|\le r_0}\frac{(2+\gamma)|F_w(\xi)|}{|1-z\overline{\xi}|^{3+\gamma}}dv_\gamma(\xi)+\int_{r_0<|\xi|<1}\frac{c_1\varepsilon(1-|\xi|^2)^{\gamma-\alpha+1}}{|1-\overline{\xi}z|^{3+\gamma}}\ dv(\xi)\\ &\le\frac{(2+\gamma)M_1}{(1-r_0)^{3+\gamma}}+\int_D\frac{c_1\varepsilon(1-|\xi|^2)^{\gamma-\alpha+1}}{|1-\overline{\xi}z|^{3+\gamma}}\ dv(\xi)\le\frac{(2+\gamma)M_1}{(1-r_0)^{3+\gamma}}+\frac{c_2\varepsilon}{(1-|z|^2)^{\alpha}}\ .\end{aligned}$$

当 $r_0<|w|<1$ 时, 在上式中取 $z=w$ 经整理就有

$$(1-|w|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)|u'(w)|\le c\varepsilon+\frac{(2+\gamma)M_1}{(1-r_0)^{3+\gamma}}(1-|w|^2)^{\alpha}.$$

从而

$$\overline{\lim_{|w|\to 1}}\ (1-|w|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)|u'(w)|\le c\varepsilon\ .$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{|w|\to 1-0}(1-|w|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)|u'(w)|=0. \tag{2.8}$$

定理 2.2 设 $\alpha>1$, u 在单位圆 D 上解析, φ 是 D 上的解析自映射, 则 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的有界算子之充要条件为

$$\sup_{z\in D}\ (1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|<\infty\ . \tag{2.9}$$

证 若 (2.9) 式成立, 设

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|=M\ .$$

对任意 $f\in\beta_L$, 由文献 [6] 中的引理 2.1、Pick 引理以及 (2.9) 式和引理 2.1 中的 (2.5) 式可得

$$\begin{aligned}
&(1-|z|^2)^{\alpha}|(uC_\varphi f)'(z)|\le(1-|z|^2)^{\alpha}|f'[\varphi(z)]\varphi'(z)u(z)+f[\varphi(z)]u'(z)|\\
\le\ &\frac{(1-|z|^2)^{\alpha}}{1-|\varphi(z)|^2}\left(\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)^{-1}|\varphi'(z)u(z)|.||f||_L\\
+\ &(1-|z|^2)^{\alpha}\left(2+\ln\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)|u'(z)|.||f||_L\\
\le\ &\left(\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)^{-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{-1}M||f||_L\\
+\ &c\left(2+\ln\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{-1}M||f||_L\\
\le\ &\frac{M}{\ln 2\ln\ln 4}||f||_L+c\left(\frac{2}{\ln\ln 4}+1\right)M||f||_L\le c_1||f||_L\ .
\end{aligned}$$

这样可得

$$\begin{aligned}
||uC_\varphi f||_\alpha\ &\le\ |u(0)f[\varphi(0)]|+\frac{M}{\ln 2\ln\ln 4}||f||_L+c\left(\frac{2}{\ln\ln 4}+1\right)M||f||_L\\
&\le\ |u(0)|\left(2+\ln\ln\frac{2}{1-|\varphi(0)|}\right)||f||_L+c_1||f||_L\le c_2||f||_L\ .
\end{aligned}$$

因此 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的有界算子. 反之, 若 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的有界算子, 则 $||uC_\varphi f||_\alpha\le||uC_\varphi||.||f||_L$ 对 $f\in\beta_L$ 成立.

对任意 $w\in D$, 取

$$f_w(z)=\ln\ln\frac{4}{1-\overline{\varphi(w)}\ z}.$$

记 $t=|\varphi(w)|$ 和 $\theta=\arg\overline{\varphi(w)}$ 及 $z_1=e^{i\theta}z$, 由 (2.2) 式及文献 [6] 中的引理 2.3–2.4 得

$$\begin{aligned}
&(1-|z|^2)\ln\frac{2}{1-|z|}|f_w'(z)|=\frac{(1-|z|^2)\ |\overline{\varphi(w)}|}{|1-\overline{\varphi(w)}z|}\ln\frac{2}{1-|z|}\left|\ln\frac{4}{1-\overline{\varphi(w)}z}\right|^{-1}\\
\le\ &\frac{2(1-|z|)}{|1-\overline{\varphi(w)}z|}\ln\frac{2}{1-|z|}\left(\ln\frac{4}{|1-\overline{\varphi(w)}z|}\right)^{-1}\\
=\ &2(1-|z_1|)\ln\frac{2}{1-|z_1|}\left\{(1-|tz_1|)\ln\frac{2}{1-|tz_1|}\right\}^{-1}\\
\times\ &\left\{(1-|tz_1|)\ln\frac{2}{1-|tz_1|}\right\}\left\{|1-tz_1|\ln\frac{4}{|1-tz_1|}\right\}^{-1}\le 8.
\end{aligned}$$

这样 $||f_w||_L \le 8+\ln\ln 4$. 因此 $||uC_\varphi f_w||_\alpha \le (8+\ln\ln 4)||uC_\varphi||$. 再由文献 [5] 中引理 2.3 可得, 对一切 $z\in D$ 有

$$|[uC_\varphi f_w](z)| \le \frac{c||uC_\varphi||}{(1-|z|^2)^{\alpha-1}}. \tag{2.10}$$

在 (2.10) 式中取 $z=w$ 就有

$$(1-|w|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(w)|^2}\right)|u(w)| \le c||uC_\varphi||\ .$$

根据 w 的任意性可知 (2.9) 式成立.

定理 2.3 设 $\alpha>1$, u 在单位圆 D 上解析, φ 是 D 上的解析自映射, 则 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的紧算子之充要条件为: 当 $||\varphi||_\infty<1$ 时 $u\in\beta_\alpha$; 当 $||\varphi||_\infty=1$ 时 $u\in\beta_\alpha$ 且

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|=0 \tag{2.11}$$

和

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}(1-|z|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u'(z)|=0 \tag{2.12}$$

同时成立.

证 若 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的紧算子, 取 $f=1\in\beta_L$, 立即可得 $u\in\beta_\alpha$.

当 $||\varphi||_\infty=1$ 时, 设 $\{z_n\}\subset D$ 是任意一个使得 $|\varphi(z_n)|\to 1\ \ (n\to\infty)$ 的序列, 令

$$f_n(z)=\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^2}\right)^{-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-\overline{\varphi(z_n)}\ z}\right)^2\ ,$$

则 $\{f_n\}$ 在 D 的任一紧子集上一致收敛于 0, 且利用 (2.1)–(2.3) 式以及文献 [6] 中引理 2.3–2.4 经计算可得 $||f_n||_L\le 16M_0+\ln\ln 4$, 这样

$$\lim_{n\to\infty}||uC_\varphi f_n||_\alpha=0\ .$$

由文献 [5] 中引理 2.3 可得, 对一切 $z\in D$ 有

$$\begin{aligned}&|[uC_\varphi f_n](z)| \le \frac{c||uC_\varphi f_n||_\alpha}{(1-|z|^2)^{\alpha-1}} \quad\Rightarrow\quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时},\\ &(1-|z_n|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^2}\right)|u(z_n)| \le c||uC_\varphi f_n||_\alpha\to 0.\end{aligned}$$

这表明 (2.11) 式成立.

另一方面, 经计算且令 $z=z_n$ 并利用 Pick 引理及 (2.11) 式可得, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&(1-|z_n|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^2}\right)|u'(z_n)|\\ \le\ & ||uC_\varphi f_n||_\alpha+\frac{2}{\ln 4\ln\ln 4}(1-|z_n|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z_n)|^2}\right)|u(z_n)|\to 0.\end{aligned}$$

这表明 (2.12) 式成立.

反过来, 若 $u\in\beta_\alpha$, 根据文献 [5] 中的引理 2.3 知 $(1-|z|^2)^{\alpha-1}|u(z)|\le c||u||_\alpha$, 又由于 $\varphi\in H^\infty\subset\beta_1$, 故 $(1-|z|^2)|\varphi'(z)|\le||\varphi||_1$ 对一切 $z\in D$ 成立.

设 $\{f_n\}$ 是 β_L 中任一有界序列且在 D 的任一紧子集上一致收敛于 0, 则由 Cauchy 积分公式立即可得 $\{f'_n\}$ 也在 D 的任一紧子集上一致收敛于 0. 当 $||\varphi||_\infty<1$ 时, 若 $n\to\infty$, 则

$$\begin{aligned} &||uC_\varphi f_n||_\alpha=|u(0)f_n[\varphi(0)]|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha|u'(z)f_n[\varphi(z)]+u(z)f'_n[\varphi(z)]\varphi'(z)|\\ \le\ &|u(0)f_n[\varphi(0)]|+||u||_\alpha\sup_{|w|\le||\varphi||_\infty}|f_n(w)|+c||\varphi||_1||u||_\alpha\sup_{|w|\le||\varphi||_\infty}|f'_n(w)|\to0\ .\end{aligned}$$

这意味着 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的紧算子.

当 $||\varphi||_\infty=1$ 时, 若还有 (2.11)–(2.12) 式成立, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\delta<1$, 当 $\delta<|\varphi(z)|<1$ 时,

$$(1-|z|^2)^{\alpha-1}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u(z)|<\varepsilon, \tag{2.13}$$

$$(1-|z|^2)^{\alpha}\left(\ln\ln\frac{4}{1-|\varphi(z)|^2}\right)|u'(z)|<\varepsilon \tag{2.14}$$

同时成立.

记 $K=\sup||f_n||_L$, 则由文献 [6] 中的引理 2.1、Pick 引理以及 (2.13)–(2.14) 式可得

$$\begin{aligned} &||uC_\varphi f_n||_\alpha=|u(0)f_n[\varphi(0)]|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)^\alpha|u'(z)f_n[\varphi(z)]+u(z)f'_n[\varphi(z)]\varphi'(z)|\\ \le\ &|u(0)f_n[\varphi(0)]|+||u||_\alpha\sup_{|w|\le\delta}|f_n(w)|+c_1||\varphi||_1||u||_\alpha\sup_{|w|\le\delta}|f'_n(w)|\\ &+\sup_{\delta<|\varphi(z)|<1}(1-|z|^2)^\alpha\left(2+\ln\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)|u'(z)|.||f_n||_L\\ &+\sup_{\delta<|\varphi(z)|<1}(1-|z|^2)^{\alpha-1}|u(z)|\left(\ln\frac{2}{1-|\varphi(z)|}\right)^{-1}\frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}||f_n||_L\\ \le\ &|u(0)f_n[\varphi(0)]|+||u||_\alpha\sup_{|w|\le\delta}|f_n(w)|+c_1||\varphi||_1||u||_\alpha\sup_{|w|\le\delta}|f'_n(w)|+c_2K\varepsilon,\end{aligned}$$

这样就有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,||uC_\varphi f_n||_\alpha\le c_2K\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{n\to\infty}||uC_\varphi f_n||_\alpha=0.$$

这意味着 uC_φ 是 β_L 到 β_α 的紧算子.

参 考 文 献

[1] Madigan K, Matheson A. Compact composition operators on the Bloch Space [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1995, 347: 2679–2687.

[2] Madigan K. Composition operators on analytic Lipschitz spaces[J]. Pro. Amer. Math. Soc., 1993, 119(2): 465–473.

[3] Shi J H, Luo L. Composition operators on the Bloch space of several complex variables[J]. Acta. Math. Sin. (English Series), 2000, 16: 85–98.

[4] Ohno S, Zhao R H. Weighted composition operators on the Bloch space[J]. Bull. Austral. Math. Soc., 2001, 63: 177–185.

[5] 张学军. p-Bloch 空间上的复合算子和加权复合算子 [J]. 数学年刊, 2003, 24A(6): 711–720.

[6] 叶善力. 不同权的 Bloch 型空间之间的加权复合算子 [J]. 数学学报, 2007, 50(4): 927–942.

[7] Zhu K H. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer-Verlag (GTM 226), 2005.

[8] Rudin W. Function theory in the unit ball of $\mathbf{C^n}$ [M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[9] 赵艳辉. 单位球上 F(p,q,s) 空间到 β_L 空间的加权 Cesaro 算子 [J]. 数学杂志, 2011, 31(4): 722–728.

CHARACTERIZATION OF WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS BETWEEN DIFFERENT WEIGHTED BLOCH TYPE SPACES AGAIN

FAN Hai-xia, XI Li-hua, ZHANG Xue-jun

(*College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410006, China*)

Abstract: In the paper, the authors discuss the conditions that the weighted composition operator uC_φ is a bounded operator or compact operator from the space β_L to the space β_α in the disc. By the way of order's estimation, the briefly sufficient condition and necessary conditions are given, which extend Ye Shanli's results.

Keywords: boundedness; compactness; weighted composition operator; Bloch type space; unit disc

2010 MR Subject Classification: 30D45; 47B38