Vol. 36 (2016)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类四阶非线性波动方程解的爆破与衰减

李 宁, 雷 倩, 杨 晗
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 本文研究了非线性阻尼项与源项的竞争对具有强阻尼项的四阶波动方程解的影响. 利用不动点原理和势井方法给出了方程局部弱解存在唯一性满足的条件, 证明了当 $m < p$ 且初始能量 $E(0) < 0$ 时, 解将在有限时间内爆破. 同时对 m, p 的大小关系不加任何限制但存在 t_0 使 $0 < E(t_0) < d$ 的情况下, 利用稳定集, 研究了整体解的存在性, 并得到了解的能量衰减估计. 最后借助修正的能量泛函, 指出当 $m \geq p$ 时弱解也是整体存在的, 推广并改进了文献 [1–6] 中的结果.

关键词: 强阻尼项; 四阶波动方程; 势井; 爆破; 衰减估计
MR(2010) **主题分类号:** 35L75; 35B44 **中图分类号:** O175.29
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2016)06-1299-16

1 引言

本文将研究如下具有强阻尼项的四阶非线性波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u_t + u + u_t|u_t|^{m-1} = u|u|^{p-1}, & x \in \Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,t) = 0, \quad \Delta u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $m, p > 1, \Omega$ 是 R^n 中具有光滑边界的有界区域. 问题 (1.1) 描述的是粘弹性微观物体的实际运动过程. 事实上, 物体在运动时周围的介质产生的阻尼和力源, 特别是强阻尼, 对物体内部能量的积聚起着重要的耗散作用, 因此在实际模型中需要加以考虑.

当方程 (1.1) 中的强阻尼项 Δu_t 和线性项 u 缺失时, 非线性弱阻尼项和非线性源项之间的相互作用对解的影响已被很多作者考虑过. 2002 年, Messaoudi 在文 [1] 中指出当 $m \geq p$ 时, 初始值的弱解是整体存在的, 当 $m < p$ 且初始能量 $E(0) < 0$ 时, 解将在有限时间里爆破; 同时, Messaoudi 在文 [2] 中拓展了在文 [1] 中的结果, 指出当初始数据选择合适的值时, 不需讨论 m, p 的大小关系, 得到了整体解的存在性定理和衰减估计. 2008 年, 韩献军、薛红霞在文 [3] 中得到了类似的结论, 他们利用势井理论构造了稳定集, 在初值位于稳定集时, 得到了弱解是整体存在的且具有衰减性质; 2010 年, 尹丽、薛红霞、韩献军在文 [4] 中利用势井理论构造了不稳定集, 证明了当 $m < p$ 且初始能量非负时, 解将在有限时刻发生爆破. 2009 年, Chen 和 Zhou 在文 [5] 中, 对 $m < p$ 且初始能量为正的情形, 证明了整体解的不存在性, 关于解的爆破结论与文 [4] 中的结论是一样的.

2013 年, 在文 [6] 中, Chen 和 Liu 考虑了二阶波动方程的情形, 即方程 (1.1) 中的 $\Delta^2 u$ 被 Δu 代替, 同时线性项 u 缺失时, 证明了局部解的存在唯一性, 同时利用势井法, 研究了整

*收稿日期: 2014-06-11 接收日期:2014-09-22
作者简介: 李宁 (1990–), 女, 河南鹿邑, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程.

体解的存在性, 解的多项式和指数衰减. 最后指出当初始数据足够大或 $E(0)<0$ 时, 能量将随着时间呈指数式增长.

以上文献 [1–5] 都是没有强阻尼项时的情形, 研究非线性弱阻尼项的波动方程解的存在性、爆破及衰减估计, 文献 [6] 研究了具有强阻尼项二阶的非线性波动方程. 对带有强阻尼项四阶的非线性波动方程, 目前结论很少且有很多问题有待解决. 本文将在以上文献的基础上研究具有强阻尼项的四阶非线性波动方程 (1.1) 解的存在性、爆破和能量衰减.

2 局部解的存在唯一性

为证明局部弱解的存在性, 下面先给出几个引理.

引理 2.1 设 $1<p\le\frac{n}{n-4}, n\ge 5$; $1<p<\infty, 1\le n\le 4, m\ge 1$. 则对任意 $v\in C([0,T];C_0^\infty(\Omega))$ 和 $u_0(x),u_1(x)\in C_0^\infty(\Omega)$. 方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2u-\Delta u_t+u+u_t|u_t|^{m-1}=v|v|^{p-1}, \quad x\in\Omega, \quad t\ge 0,\\ u(x,t)=0, \quad \Delta u(x,t)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\ge 0,\\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

存在唯一的解 $u(x,t)$, 并且满足

$$\begin{aligned} &u\in L((0,T);H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)), \ \ u_{tt}\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),\\ &u_t\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{m+1}((0,T)\times\Omega). \end{aligned}$$

此引理的证明类似于文献 [7] 中第一章定理 3.1 的证明, 略去证明过程.

引理 2.2 设 $1<p\le\frac{n}{n-4}, n\ge 5$; $1<p<\infty, 1\le n\le 4, m\ge 1$. 则对任意 $u_0(x)\in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x)\in L^2(\Omega), v\in C([0,T];H^3(\Omega))$. 方程 (2.1) 存在唯一的弱解 $u(x,t)$, 满足

$$\begin{aligned} &u\in C((0,T);H_0^2(\Omega)),\\ &u_t\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{m+1}((0,T)\times\Omega), \end{aligned}$$

并且成立能量等式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t^2+(\Delta u)^2+u^2)dx+\int_0^t\int_\Omega|u_t|^{m+1}dxds+\int_0^t\int_\Omega|\nabla u_t|^2dxds\\ =\ &\frac{1}{2}\int_\Omega(u_1^2+(\Delta u_0)^2+u_0^2)dx+\int_0^t\int_\Omega v|v|^{p-1}u_tdxds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

证 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中分别取序列 $\{u_0^\mu\},\{u_1^\mu\}$, 使得 $\{u_0^\mu\},\{u_1^\mu\}$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中分别逼近于 u_0,u_1. 在 $C([0,T];C_0^\infty(\Omega))$ 中取序列 $\{v^\mu\}$, 使得在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中逼近于 v. 由引理 2.1 可知方程

$$\begin{cases} u_{tt}^\mu+\Delta^2u^\mu-\Delta u_t^\mu+u^\mu+u_t^\mu|u_t^\mu|^{m-1}=v^\mu|v^\mu|^{p-1}, \quad x\in\Omega, \quad t\ge 0,\\ u^\mu(x,t)=0, \quad \Delta u^\mu(x,t)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\ge 0,\\ u^\mu(x,0)=u_0^\mu(x), \quad u_t^\mu(x,0)=u_1^\mu(x), \quad x\in\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

存在唯一的解 $\{u^\mu\}$ 满足

$$\begin{aligned} &u^\mu\in L((0,T);H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)), \ u_{tt}^\mu\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega)),\\ &u_t^\mu\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{m+1}((0,T)\times\Omega). \end{aligned}$$

下面证明 $\{u^\mu\}$ 是

$$Y=\{u|u\in C((0,T);H_0^2(\Omega)),u_t\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))\cap L^{m+1}((0,T)\times\Omega)\}$$

中的 Cauchy 列. 为此, 令 $U=u^\mu-u^\nu, V=v^\mu-v^\nu$, 则 U 满足下面方程

$$\begin{cases} U_{tt}+\Delta^2U-\Delta U_t+U+(u_t^\mu|u_t^\mu|^{m-1}-u_t^\nu|u_t^\nu|^{m-1}) \\ =v^\mu|v^\mu|^{p-1}-v^\nu|v^\nu|^{p-1}, \qquad x\in\Omega,\quad t\geq 0, \\ U(x,t)=0,\quad \Delta U(x,t)=0, \qquad x\in\partial\Omega,\quad t\geq 0, \\ U(x,0)=U_0(x)=u_0^\mu-u_0^\nu,\quad U_t(x,0)=U_1(x)=u_1^\mu-u_1^\nu,\quad x\in\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

在方程 (2.4) 两端同时乘以 U_t, 并且在 $(0,T)\times\Omega$ 上积分得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega(U_t^2+(\Delta U)^2+U^2)dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla U_t|^2dxds \\ &+\int_0^t\int_\Omega(u_t^\mu|u_t^\mu|^{m-1}-u_t^\nu|u_t^\nu|^{m-1})U_tdxds \\ =\ &\frac{1}{2}\int_\Omega(U_1^2+(\Delta U_0)^2+U_0^2)dx+\int_0^t\int_\Omega(v^\mu|v^\mu|^{p-1}-v^\nu|v^\nu|^{p-1})U_tdxds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

下面来估计 (2.5) 式的最后一项

$$\begin{aligned} &\int_0^t\int_\Omega(v^\mu|v^\mu|^{p-1}-v^\nu|v^\nu|^{p-1})U_tdxds \\ \leq\ &\|U_t\|_2\|V\|_{\frac{2n}{n-4}}[\|v^\mu\|^{p-1}_{\frac{n(p-1)}{2}}+\|v^\nu\|^{p-1}_{\frac{n(p-1)}{2}}] \\ \leq\ &c\|U_t\|_2\|\Delta V\|_2(\|\Delta v^\mu\|_2^{p-1}+\|\Delta v^\nu\|_2^{p-1}), \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 c 是一个仅依赖于 Ω 的常数.

由 $(|\alpha|^{m-1}\alpha-|\beta|^{m-1}\beta)(\alpha-\beta)\geq c|\alpha-\beta|^m$ 及 (2.6) 式得 (2.5) 式变为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega(U_t^2+(\Delta U)^2+U^2)dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla U_t|^2dxds+c\int_0^t\int_\Omega|U_t|_{m+1}^{m+1}dxds \\ \leq\ &\frac{1}{2}\int_\Omega(U_1^2+(\Delta U_0)^2+U_0^2)dx+\Gamma\int_0^t[\|U_t\|_2^2+\|\Delta V\|_2^2]ds, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 Γ 是一个依赖于 c 和 $C([0,T];H_0^2(\Omega))$ 中包含 v^μ 和 v^ν 的球半径的正常数. 由 $\{u_0^\mu\}$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, $\{u_1^\mu\}$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的 Cauchy 列, $\{v^\mu\}$ 为 $C([0,T];H_0^2(\Omega))$ 中的 Cauchy 列, 进而可得 $\{u^\mu\}$ 为 Y 中的 Cauchy 列.

下面证明极限 $u(x,t)$ 是方程 (2.1) 在以下式子意义下的弱解: 即对每个 $\theta\in H_0^2(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t(x,t)\theta(x)dx+\int_\Omega\Delta u(x,t)\Delta\theta(x)dx+\int_\Omega\nabla u_t(x,t)\nabla\theta(x)dx \\ &+\int_\Omega u(x,t)\theta(x)dx+\int_\Omega u_t|u_t|^{m-1}(x,t)\theta(x)dx=\int_\Omega v|v|^{p-1}(x,t)\theta(x)dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

对几乎处处的 $t\in[0,T]$ 成立.

事实上, 在 (2.3) 式两端同时乘以 θ, 并在 Ω 上积分可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^\mu(x,t)\theta(x)dx+\int_\Omega \Delta u^\mu(x,t)\Delta\theta(x)dx+\int_\Omega \nabla u_t^\mu(x,t)\nabla\theta(x)dx\\&+\int_\Omega u^\mu(x,t)\theta(x)dx+\int_\Omega u_t^\mu|u_t^\mu|^{m-1}(x,t)\theta(x)dx=\int_\Omega v^\mu|v^\mu|^{p-1}(x,t)\theta(x)dx.\end{aligned}\tag{2.9}$$

令 $\mu\to\infty$, 可知在 $C([0,T])$ 中成立

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Delta u^\mu(x,t)\Delta\theta(x)dx\to\int_\Omega \Delta u(x,t)\Delta\theta(x)dx,\\&\int_\Omega u^\mu(x,t)\theta(x)dx\to\int_\Omega u(x,t)\theta(x)dx,\\&\int_\Omega v^\mu|v^\mu|^{p-1}(x,t)\theta(x)dx\to\int_\Omega v|v|^{p-1}(x,t)\theta(x)dx,\end{aligned}$$

且在 $L^1([0,T])$ 中成立

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla u_t^\mu(x,t)\nabla\theta(x)dx\to\int_\Omega \nabla u_t(x,t)\nabla\theta(x)dx,\\&\int_\Omega u_t^\mu|u_t^\mu|^{m-1}(x,t)\theta(x)dx\to\int_\Omega u_t|u_t|^{m-1}(x,t)\theta(x)dx.\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_t^\mu,\theta(x))=(u_t,\theta(x))$, $\int_\Omega u_t(x,t)\theta(x)dx$ 是 $[0,T]$ 上的一个绝对连续函数. 故 (2.8) 式对几乎处处的 $t\in[0,T]$ 成立, 同理从关于 u^μ 的能量等式出发可以证明能量等式 (2.2).

下证唯一性, 取 v^1,v^2, 令 u^1,u^2 分别为方程 (2.1) 相应于 v^1,v^2 的两个解. 令 $U=u^1-u^2$, 则

$$\begin{aligned}&\frac12\int_\Omega(U_t^2+(\Delta U)^2+U^2)dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla U_t|^2dxds+\int_0^t\int_\Omega(u_t^1|u_t^1|^{m-1}\\&-u_t^2|u_t^2|^{m-1})U_tdxds=\int_0^t\int_\Omega(v^1|v^1|^{p-1}-v^2|v^2|^{p-1})U_tdxds.\end{aligned}\tag{2.10}$$

若 $v^1=v^2$, 则由 (2.10) 式可知 $U=0$, 即唯一性得证.

下面给出局部弱解存在唯一性的定理.

定理 2.1 设 $1<p\le\frac{n}{n-4},n\ge5$; $1<p<\infty,1\le n\le4,m\ge1$. 若 $u_0(x)\in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x)\in L^2(\Omega)$, 则方程 (1.1) 存在唯一的弱解 $u(x,t)\in Y$, 其中 $T>0$ 充分小.

证 取 $M>0$ 充分大, 设 $X(M,T)$ 是由 Y 中满足方程 (2.1) 中的初边值条件, 并且满足下面条件的 w 组成的集合

$$\max_{o\le t\le T}\frac12\int_\Omega(w_t^2+(\Delta w)^2+w^2)dx+\int_0^T\int_\Omega|\nabla w_t|^2dxds+\int_0^T\int_\Omega w_t^{m+1}dxds\le M^2.\tag{2.11}$$

定义映射 $u=f(v):\ X(M,T)\to Y$. 其中 $u(x,t)$ 是方程 (2.1) 的唯一解.

下面证明当 M 充分大, $T>0$ 充分小时, f 是一个从 $X(M,T)$ 到 $X(M,T)$ 的映射.

由能量等式 (2.2) 知

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u_t^2+(\Delta u)^2+u^2)dx+2\int_0^t\int_\Omega |u_t|^{m+1}dxds+2\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_t|^2dxds\\ \leq\ &\int_\Omega (u_1^2+(\Delta u_0)^2+u_0^2)dx+2\int_0^t \|u_t\|_2\|\Delta v\|_2^p ds,\end{aligned}\tag{2.12}$$

因此

$$\|u\|_Y^2\leq c[\|u_1\|_2^2+\|\Delta u_0\|_2^2+\|u_0\|_2^2]+cM^pT\|u\|_Y,$$

其中 c 与 M 无关, 选取 M 充分大, $T>0$ 充分小, 使 (2.11) 式成立, 故 f 是一个从 $X(M,T)$ 到 $X(M,T)$ 的映射.

下证 f 是一个压缩映射.

令 $U=u-\bar{u}, V=v-\bar{v}$, 其中 $u=f(v), \bar{u}=f(\bar{v})$. 则 U 满足下面方程

$$\begin{cases} U_{tt}+\Delta^2U-\Delta U_t+U+(u_t|u_t|^{m-1}-\bar{u}_t|\bar{u}_t|^{m-1})\\ =v|v|^{p-1}-\bar{v}|\bar{v}|^{p-1}, & x\in\Omega,\quad t\geq 0,\\ U(x,t)=0,\quad \Delta U(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\geq 0,\\ U(x,0)=U_t(x,0)=0, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{2.13}$$

在 (2.13) 式两端同时乘以 U_t, 并在 $(0,t)\times\Omega$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (U_t^2+(\Delta U)^2+U^2)dx+\int_0^t\int_\Omega |\nabla U_t|^2dxds+\int_0^t\int_\Omega (u_t|u_t|^{m-1}-\bar{u}_t|\bar{u}_t|^{m-1})U_tdxds\\ =\ &c\int_0^t\int_\Omega (v|v|^{p-1}-\bar{v}|\bar{v}|^{p-1})U_tdxds.\end{aligned}\tag{2.14}$$

由式 (2.6) 和 (2.7) 知

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (U_t^2+(\Delta U)^2+U^2)dx+\int_0^t\int_\Omega |\nabla U_t|^2dxds+\int_0^t\int_\Omega |U_t|^{m+1}dxds\\ \leq\ &\Gamma\int_0^t \|U_t\|_2\|\Delta V\|_2(\|\Delta v\|_2^{p-1}+\|\Delta\bar{v}\|_2^{p-1})ds,\end{aligned}$$

因此

$$\|U\|_Y^2\leq \Gamma TM^{p-1}\|V\|_Y^2.\tag{2.15}$$

选取 T 充分小使 $\Gamma TM^{p-1}<1$, 则由 (2.15) 式可知 f 是一个压缩映射. 由压缩映射原理可知, 存在唯一的 $u=f(u)$, 即 u 是方程 (1.1) 的解, 并由 (2.14) 式可知解的唯一性.

3 解的爆破

先给出证明解的爆破的一个有关引理.

引理 3.1 设 $1<p\leq\frac{n}{n-4}, n\geq 5$; $1<p<\infty, 1\leq n\leq 4$. 则存在仅依赖于 Ω 的常数 $c>1$, 使得

$$\|u\|_{p+1}^s\leq c(\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_{p+1}^{p+1}),\tag{3.1}$$

其中 $u \in H_0^2(\Omega)$, $2 \le s \le p+1$.

证 由 Sobolev 嵌入定理即可证明.

为了下面证明中表达方便, 这里定义与方程 (1.1) 相关的能量泛函为

$$E(t)=E(u(t))=\tfrac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\tfrac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2+\tfrac{1}{2}\|u\|_2^2-\tfrac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}. \tag{3.2}$$

令

$$H(t)=-E(t). \tag{3.3}$$

定理 3.1 设 $1<p\le \frac{n}{n-4}, n\ge 5$; $1<p<\infty, 1\le n\le 4$. 若 $1<m<p$, $u_0(x)\in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x)\in L^2(\Omega)$, 且 $E(0)<0$, 则方程 (1.1) 的解在有限时刻发生爆破.

证 由能量等式可得

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u\|_2^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1})+\|u_t\|_{m+1}^{m+1}+\|\nabla u_t\|_2^2=0,$$

则对几乎处处的 $t\in[0,T)$,

$$H'(t)=\|u_t\|_{m+1}^{m+1}+\|\nabla u_t\|_2^2, \tag{3.4}$$

故 $H(t)$ 是递增函数, 因此由式 (3.2)、(3.3) 和 $E(0)<0$ 可知, 对任意的 $t\in[0,T)$,

$$0<H(0)\le H(t)\le \tfrac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}. \tag{3.5}$$

定义

$$L(t)=H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon\int_\Omega uu_t(x,t)dx, \tag{3.6}$$

其中 ε 充分小, 将在下文中选定, 并且

$$0<\alpha\le\min\{\tfrac{p-1}{2(p+1)},\tfrac{p-m}{m(p+1)}\}. \tag{3.7}$$

对 $L(t)$ 求导, 并由方程 (1.1) 知

$$\begin{aligned}L'(t) &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\int_\Omega u_t^2(x,t)dx+\varepsilon\int_\Omega uu_{tt}(x,t)dx\\ &= (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\int_\Omega[u_t^2-(\Delta u)^2-u^2](x,t)dx\\ &\quad+\varepsilon\int_\Omega|u(x,t)|^{p+1}dx-\varepsilon\int_\Omega uu_t|u_t|^{m-1}dx-\varepsilon\int_\Omega\nabla u_t\nabla udx.\end{aligned} \tag{3.8}$$

利用 Young 不等式

$$XY\le\frac{\delta^r}{r}X^r+\frac{\delta^{-q}}{q}Y^q;\quad X,Y\ge 0,\ \ \delta>0,\ \ \frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1.$$

取 $r=m+1,\ q=\frac{m+1}{m}$, 来估计 (3.8) 式中的 $\int_\Omega uu_t|u_t|^{m-1}dx$, 可得

$$\int_\Omega |u||u_t|^m dx \le \frac{\delta^{m+1}}{m+1}\|u\|_{m+1}^{m+1}+\frac{m}{m+1}\delta^{-\frac{m+1}{m}}\|u_t\|_{m+1}^{m+1}.$$

同时

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_t\nabla u|dx &\le \frac{\sigma^{-2}}{2}\|\nabla u_t\|_2^2+\frac{\sigma^2}{2}\|\nabla u\|_2^2\\ &\le \frac{\sigma^{-2}}{2}\|\nabla u_t\|_2^2+c_1\sigma^2\|u\|_2^2+c_1\sigma^2\|\Delta u\|_2^2.\end{aligned}$$

将以上两个不等式带入 (3.8) 式得

$$\begin{aligned}L'(t) \ \ge\ & [(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)-\varepsilon\frac{m}{m+1}\delta^{-\frac{m+1}{m}}]H'(t)+\varepsilon\int_\Omega[u_t^2-(\Delta u)^2-u^2](x,t)dx\\ &+\varepsilon[(p+1)H(t)+\frac{p+1}{2}\int_\Omega(u_t^2+(\Delta u)^2+u^2)(x,t)dx]-\varepsilon\frac{\delta^{m+1}}{m+1}\|u\|_{m+1}^{m+1}\\ &+\varepsilon(\frac{m}{m+1}\delta^{-\frac{m+1}{m}}-\frac{\sigma^{-2}}{2})\|\nabla u_t\|_2^2-c_1\varepsilon\sigma^2\|\Delta u\|_2^2-c_1\varepsilon\sigma^2\|u\|_2^2. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

因为 (3.9) 式的积分是关于变量 x 的, 因此可取 $\delta^{-\frac{m+1}{m}}=K_1H^{-\alpha}(t),\sigma^{-2}=K_2H^{-\alpha}(t)$, 其中 K_1,K_2 充分大, 且 $K_1>K_2$, 将在后文中给出, 代入 (3.9) 式得

$$\begin{aligned}L'(t) \ \ge\ & [(1-\alpha)-\varepsilon\frac{m}{m+1}K_1]H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon(p+1)H(t)+\varepsilon(\frac{p+1}{2}+1)\|u_t\|_2^2\\ &+\varepsilon(\frac{p+1}{2}-1-c_1K_2^{-1}H^{-\alpha}(t))(\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2)-\varepsilon\frac{K_1^{-m}}{m+1}H^{m\alpha}(t)\|u\|_{m+1}^{m+1}\\ &+\varepsilon(\frac{m}{m+1}K_1H^{-\alpha}(t)-\frac{K_2H^{-\alpha}(t)}{2})\|\nabla u_t\|_2^2. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

由 (3.5) 式和不等式 $\|u\|_{m+1}^{m+1}\le c\|u\|_{p+1}^{m+1}$ 知

$$H^{m\alpha}(t)\|u\|_{m+1}^{m+1}\le\frac{c}{(p+1)^{m\alpha}}\|u\|_{p+1}^{m+1+m\alpha(p+1)}.$$

取 $s=m+1+m\alpha(p+1)\le p+1$, 由引理 3.1 和 (3.7), (3.10) 式知

$$\begin{aligned}L'(t) \ \ge\ & [(1-\alpha)-\varepsilon\frac{m}{m+1}K_1]H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon(p+1)H(t)+\varepsilon(\frac{p+1}{2}+1)\|u_t\|_2^2\\ &+\varepsilon(\frac{p-1}{2}-c_1K_2^{-1}H^{-\alpha}(t))(\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2)+\varepsilon(\frac{m}{m+1}K_1H^{-\alpha}(t)\\ &-\frac{K_2H^{-\alpha}(t)}{2})\|\nabla u_t\|_2^2-\varepsilon c_2K_1^{-m}(\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_{p+1}^{p+1}). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

其中 $c_2=\frac{c}{(m+1)(p+1)^{m\alpha}}$. 又 $H(t)=\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}-\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2-\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{2}\|u\|_2^2$, 则 (3.11) 式变为

$$\begin{aligned}L'(t) \geq\ & [(1-\alpha)-\varepsilon\frac{m}{m+1}K_1]H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon(\frac{p+3}{2}-c_2K_1^{-m}\frac{p+1}{2})\|u_t\|_2^2\\ &+\varepsilon(\frac{p-1}{2}-c_1K_2^{-1}H^{-\alpha}(t)-c_2K_1^{-m}\frac{p+1}{2}-c_2K_1^{-m})\|\Delta u\|_2^2+\varepsilon(\frac{p-1}{2}\\ &-c_1K_2^{-1}H^{-\alpha}(t)-c_2K_1^{-m}\frac{p+1}{2})\|u\|_2^2+\varepsilon[(p+1)-c_2K_1^{-m}(p+1)]H(t)\\ &+\varepsilon(\frac{m}{m+1}K_1H^{-\alpha}(t)-\frac{K_2H^{-\alpha}(t)}{2})\|\nabla u_t\|_2^2.\end{aligned}\tag{3.12}$$

选取 K_1,K_2 充分大, 且 $K_1>K_2$, 使 $\|u_t\|_2^2$, $\|\Delta u\|_2^2$, $\|u\|_2^2$, $H(t)$, $\|\nabla u_t\|_2^2$ 在 (3.12) 式中系数为正, 则可得

$$\begin{aligned}L'(t) \geq\ & [(1-\alpha)-\varepsilon\frac{m}{m+1}K_1]H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\gamma[H(t)+\|u_t\|_2^2\\ &+\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2],\end{aligned}\tag{3.13}$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma =\ & \min\{\frac{p+3}{2}-c_2K_1^{-m}\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}-c_1K_2^{-1}H^{-\alpha}(t)-c_2K_1^{-m}\frac{p+1}{2},\\ &(p+1)-c_2K_1^{-m}(p+1),\frac{m}{m+1}K_1H^{-\alpha}(t)-\frac{K_2H^{-\alpha}(t)}{2}\quad\}>0.\end{aligned}$$

当 K_1 取定时, 选取 ε 充分小使得 $(1-\alpha)-\varepsilon\frac{m}{m+1}K_1\geq 0$, 且

$$L(0)=H^{1-\alpha}(0)+\varepsilon\int_\Omega u_0u_1(x,t)dx>0.$$

故由 (3.13) 式知

$$L'(t)\geq\varepsilon\gamma[H(t)+\|u_t\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\nabla u_t\|_2^2].\tag{3.14}$$

因此可知

$$L(t)\geq L(0)>0,\quad\forall t\geq 0.$$

下面来估计 (3.6) 式中的第二项

$$|\int_\Omega uu_t(x,t)dx|\leq\|u\|_2\|u_t\|_2\leq c\|u\|_{p+1}\|u_t\|_2,$$

由 Young 不等式可知

$$|\int_\Omega uu_t(x,t)dx|^{\frac{1}{1-\alpha}}\leq c[\|u\|_{p+1}^{\frac{\mu}{1-\alpha}}+\|u_t\|_2^{\frac{\theta}{1-\alpha}}],\tag{3.15}$$

其中 $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\theta}=1$, 取 $\theta=2(1-\alpha)$, 则由 (3.7) 式可知

$$\frac{\mu}{1-\alpha}=\frac{2}{1-2\alpha}\leq p+1.$$

由 (3.15) 式可知

$$|\int_\Omega uu_t(x,t)dx|^{\frac{1}{1-\alpha}} \le c[\|u\|_{p+1}^s + \|u_t\|_2^2],$$

其中 $s = \frac{2}{1-2\alpha} \le p+1$. 由引理 3.1 可知

$$\begin{aligned}|\int_\Omega uu_t(x,t)dx|^{\frac{1}{1-\alpha}} &\le c[\|\Delta u\|_2^2 + \|u\|_{p+1}^{p+1} + \|u_t\|_2^2] \\ &\le c[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \|u\|_2^2]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

因此可得

$$\begin{aligned} L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) &= (H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_\Omega uu_t(x,t)dx)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}(H(t) + |\int_\Omega uu_t(x,t)dx|^{\frac{1}{1-\alpha}}) \\ &\le c[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|\nabla u_t\|_2^2], \end{aligned} \tag{3.17}$$

由 (3.14), (3.17) 式可知

$$L'(t) \ge \Gamma L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \tag{3.18}$$

其中 Γ 是一个依赖于 c, γ, ε 的常数. 令 (3.18) 式在 $(0,t)$ 上积分得

$$L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \ge \frac{1}{L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \Gamma t \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \tag{3.19}$$

则 $L(t)$ 在时刻 $T^* \le \frac{1-\alpha}{\Gamma\alpha L(0)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$ 发生爆破.

4 整体解的存在性及其能量衰减估计

4.1 准备工作

此部分先引入势井, 同时给出相关引理.

定义与方程 (1.1) 相关的能量泛函为

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

记

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1},$$

势井深度

$$d = \inf_{u\in H_0^2(\Omega)\setminus\{0\}} \sup_{\lambda\in R} J(\lambda u),$$

稳定集

$$W^i = \{u \in H_0^2(\Omega) | K(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{0\},$$

其中

$$K(u)=\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_2^2-\|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

引理 4.1 $d=\frac{p-1}{2p+2}(c_*^{\frac{2p+2}{p-1}})^{-1}$, 其中 $c_*=\sup\frac{\|u\|_p}{\|\Delta u\|}$.

证 由 d 的定义及微分知识可得到证明.

引理 4.2 W^i 为 H_0^2 中的有界集.

证 直接由 W^i 的定义可得到证明.

引理 4.3 设 $1<p\le\frac{n}{n-4},n\ge 5$; $1<p<\infty,1\le n\le 4,m\ge 1$. 初始值 $u_0(x)\in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x)\in L^2(\Omega)$. $u(x,t)$ 是问题 (1.1) 在 $[0,T_{\max})$ 上的局部解. 如果存在 $t_0\in[0,T_{\max})$ 满足 $u(t_0,\cdot)\in W^i$, 并且 $E(t_0)<d$, 那么对任意 $t\in[t_0,T_{\max})$, 问题 (1.1) 的解 $u(x,t)$ 必在 W^i 中.

证 假设存在 $t_1\in[t_0,T_{\max})$ 使得 $t\in[t_0,t_1)$ 时, $u(x,t)\in W^i$, 而 $u(x,t_1)\notin W^i$. 由 W^i 的定义及 $J(u)$ 和 $K(u)$ 关于 t 的连续性知

(1) $J(u(t_1,\cdot))=d$ 或

(2) $K(u(t_1,\cdot))=0$.

根据 $E(t_0)<d$ 和能量等式 $E(t_1)=E(t_0)-\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}[\|\nabla u_t\|_2^2+\|u_t\|_{m+1}^{m+1}]$ 得

$$J(u(t_1,\cdot))\le E(t_1)\le E(t_0)<d.$$

显然 $J(u(t_1,\cdot))=d$ 是不可能的, 即 (1) 式不成立.

若 $K(u(t_1,\cdot))=0$. 则

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u(t_1,\cdot))|_{\lambda=1}=\lambda(1-\lambda^{p-1})\|u(t_1,\cdot)\|_{p+1}^{p+1}|_{\lambda=1}=0,\\&\frac{d^2}{d\lambda^2}J(\lambda u(t_1,\cdot))|_{\lambda=1}=(1-p)\|u(t_1,\cdot)\|_{p+1}^{p+1}|_{\lambda=1}<0,\quad(p>1),\end{aligned}$$

从而 $\sup\limits_{\lambda\ge 0}J(\lambda u(t_1,\cdot))=J(\lambda u(t_1,\cdot))|_{\lambda=1}=J(u(t_1,\cdot))<d$. 这与 d 的定义矛盾, 因此 (2) 式不成立. 所以对任意 $t\in[t_0,T_{\max})$, $u(x,t)\in W^i$.

引理 4.4 在引理 4.3 的假设下, 对任意 $t\in[t_0,T_{\max})$, 问题 (1.1) 的解 $u(x,t)$ 成立如下不等式

$$J(u)\ge\frac{p-1}{2p+2}(\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2)\ge\frac{p-1}{2p+2}\|u\|_{p+1}^{p+1}.\tag{4.1}$$

其中 $t\in[t_0,T_{\max})$.

证 根据引理 4.3 得, 对任意 $t\in[t_0,T_{\max})$, $K(u)=\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2+\|u\|_{p+1}^{p+1}\ge 0$, 则

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\\&\ge\frac{p-1}{2p+2}(\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2)\\&\ge\frac{p-1}{2p+2}\|u\|_{p+1}^{p+1},\end{aligned}$$

其中 $t \in [t_0, T_{\max})$.

引理 4.5 在引理 4.4 的条件下, 有

$$c_*^{p+1}\left(\frac{2p+2}{p-1}E(t_0)\right)^{\frac{p-1}{2}} < 1, \tag{4.2}$$

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq (1-\theta)\|\Delta u\|_2^2, \quad \forall t \in [t_0, T_{\max}), \tag{4.3}$$

其中 $\theta = 1 - c_*^{p+1}(\frac{2p+2}{p-1}E(t_0))^{\frac{p-1}{2}} > 0$. 进一步有

$$K(u) \geq \|u\|_2^2 + \theta\|\Delta u\|_2^2 \geq \|u\|_2^2 + \frac{\theta}{1-\theta}\|u\|_{p+1}^{p+1},\ \forall t \in [t_0, T_{\max}).$$

证 由 d 的定义可得 (4.2) 式成立. 由引理 4.4 知

$$\begin{aligned} d &> E(t_0) \geq E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + J(u) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{p-1}{2p+2}(\|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2) \\ &\geq \frac{p-1}{2p+2}(\|u_t\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2), \end{aligned} \tag{4.4}$$

则由 Sobolev 嵌入定理及 (4.4) 式得

$$\begin{aligned} \|u\|_{p+1}^{p+1} &\leq c^{p+1}\|\Delta u\|_2^{p+1} = c^{p+1}\|\Delta u\|_2^{p-1}\|\Delta u\|_2^2 \\ &\leq c^{p+1}\left(\frac{2p+2}{p-1}E(t_0)\right)^{\frac{p-1}{2}}\|\Delta u\|_2^2 \\ &\leq (1-\theta)\|\Delta u\|_2^2, \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} K(u) &= \|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1} \geq \|u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 - (1-\theta)\|\Delta u\|_2^2 \\ &= \|u\|_2^2 + \theta\|\Delta u\|_2^2 \geq \|u\|_2^2 + \frac{\theta}{1-\theta}\|u\|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

引理 4.6 设 $F: R^+ \to R^+$ 为一个非增函数, 若存在 $p \geq 1,\ A > 0$, 使得

$$\int_S^{+\infty} F^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq AF(S),\ \ 0 \leq S < +\infty,$$

则

$$F(t) \leq cF(0)(1+t)^{\frac{-2}{p-1}},\ \forall t \geq 0, p > 1; \quad F(t) \leq cF(0)e^{-\lambda t},\ \forall t \geq 0, p = 1,$$

其中 c, λ 是不依赖于 $F(0)$ 的正常数.

此引理的证明见文献 [8].

注 引理 4.5 和引理 4.6 在能量衰减估计中有重要作用.

4.2 整体解的存在性及其能量衰减估计

首先给出整体解的存在性定理.

定理 4.1 设 $1<p\leq\frac{n}{n-4},n\geq 5;\ 1<p<\infty,1\leq n\leq 4,m\geq 1$. 初始值 $u_0(x)\in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x)\in L^2(\Omega)$, $u(x,t)$ 是问题 (1.1) 在 $[0,T_{\max})$ 上的局部解. 如果存在 $t_0\in[0,T_{\max})$ 满足 $u(t_0,\cdot)\in W^i$, 并且 $E(t_0)<d$, 那么 $T_{\max}=\infty$.

证 由引理 4.4 和 $E'(t)<0$ 得

$$\begin{aligned} d &> E(t_0)\geq E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+J(u)\\ &\geq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{p-1}{2p+2}(\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2)\\ &\geq \frac{p-1}{2p+2}(\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\|\Delta u\|_2^2), \end{aligned}\tag{4.5}$$

其中 $t\in[t_0,T_{\max})$, 由上式和连续性原理 [9] 得到整体解, 即 $T_{\max}=\infty$. 故整体解的存在性得证.

下面作整体解的能量衰减估计.

定理 4.2 在定理 4.1 的假设下, 若 $1\leq m\leq\frac{n+4}{n-4},n\geq 5;\ 1\leq m<\infty,1\leq n\leq 4$, 则问题 (1.1) 的整体解的能量衰减估计为

$$E(t)\leq C(1+t)^{\frac{-2}{m-1}},m>1;\quad E(t)\leq Ce^{-\lambda t},m=1,$$

其中 C, λ 是正常数, 且 C 依赖于 $E(t_0)$.

证 以下要证明

$$\int_S^\infty E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt\leq cE(S),\quad \forall S\in[t_0,\infty)\tag{4.6}$$

成立, 进而利用引理 4.6, 可得结论成立.

用 $E(t)^{\frac{m-1}{2}}u$ 乘方程 (1.1) 两端, 并在 $\Omega\times[S,T]$ 上积分, 其中 $t_0\leq S\leq T<\infty$,

$$\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}u[u_{tt}+\Delta^2u-\Delta u_t+u+u_t|u_t|^{m-1}-u|u|^{p-1}]dxdt=0,\tag{4.7}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}uu_{tt}dxdt &= \int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}uu_tdx|_S^T-\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}|u_t|^2dxdt\\ &\quad -\frac{m-1}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-3}{2}}E'(t)uu_tdxdt.\end{aligned}$$

将上式代入 (4.7) 式得

$$\begin{aligned}&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}(|u_t|^2+|\Delta u|^2+|u|^2-|u|^{p+1})dxdt\\ =&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}(2|u_t|^2-uu_t|u_t|^{m-1}+u\Delta u_t)dxdt\\ &+\frac{m-1}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-3}{2}}E'(t)uu_tdxdt-\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}uu_tdx|_S^T.\end{aligned}\tag{4.8}$$

由 $E'(t) \le 0$ 及 (4.5) 式得

$$\begin{aligned}
&|\frac{m-1}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-3}{2}}E'(t)uu_tdxdt| \\
\le\ & \frac{m-1}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{m-3}{2}}|E'(t)|(\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2)dt \\
\le\ & -\frac{m-1}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{m-3}{2}}E'(t)(\frac{(p+1)c^2}{p-1}\frac{p-1}{2p+2}\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2)dt \\
\le\ & -\frac{m-1}{2}\max(\frac{(p+1)c^2}{p-1},\frac{p+1}{p-1})\int_S^T E(t)^{\frac{m-1}{2}}E'(t)dt \\
=\ & -\frac{m-1}{m+1}\max(\frac{(p+1)c^2}{p-1},\frac{p+1}{p-1})E(t)^{\frac{m+1}{2}}|_S^T \\
\le\ & cE(S)^{\frac{m+1}{2}}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

类似的

$$\begin{aligned}
|-\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}uu_tdx|_S^T| \ &\le\ E(t)^{\frac{m-1}{2}}(\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2)|_S^T \\
&\le\ E(t)^{\frac{m-1}{2}}(\frac{c^2}{2}\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2)|_S^T \\
&\le\ \max(\frac{(p+1)c^2}{p-1},\frac{p+1}{p-1})E(t)^{\frac{m+1}{2}}|_S^T \\
&\le\ cE(S)^{\frac{m+1}{2}}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

又注意到 $0<\theta<1$, 由引理 4.5 得

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}(|u_t|^2+|\Delta u|^2+|u|^2-|u|^{p+1})dxdt \\
=\ & \int_S^T E(t)^{\frac{m-1}{2}}(\|u_t\|_2^2+K(u))dt \\
\ge\ & \int_S^T E(t)^{\frac{m-1}{2}}(\|u_t\|_2^2+\|u\|_2^2+\theta\|\Delta u\|_2^2)dt \\
\ge\ & 2\theta\int_S^T E(t)^{\frac{m-1}{2}}(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|u\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2)dt \\
\ge\ & 2\theta\int_S^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

将 (4.9)–(4.11) 式代入 (4.8) 式得

$$\begin{aligned}
2\theta\int_S^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt \ \le\ & \int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}(2|u_t|^2-uu_t|u_t|^{m-1} \\
& +u\Delta u_t)dxdt+cE(S)^{\frac{m+1}{2}}. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

由 Young 不等式及 $E'(t)=-\|u_t\|_{m+1}^{m+1}-\|\nabla u_t\|_2^2$ 得

$$\begin{aligned}
&2\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}|u_t|^2dxdt\\
\leq\ &\int_S^T\int_\Omega(\varepsilon_1E(t)^{\frac{m+1}{2}}+c(\varepsilon_1)|u_t|^{m+1})dxdt\\
\leq\ &\varepsilon_1|\Omega|\int_S^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt+c(\varepsilon_1)\int_S^T\|u_t\|_{m+1}^{m+1}dt\\
=\ &\varepsilon_1|\Omega|\int_S^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt-c(\varepsilon_1)(E(T)-E(S))-\int_S^T\|\nabla u_t\|_2^2dt\\
\leq\ &\varepsilon_1|\Omega|\int_S^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt+cE(S).
\end{aligned}\tag{4.13}$$

又由 Young 不等式, (4.5) 式及 $E'(t)\leq 0$ 得

$$\begin{aligned}
&-\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}uu_t|u_t|^{m-1}dxdt\\
\leq\ &\int_S^T E(t)^{\frac{m-1}{2}}(\varepsilon_2\|u\|_{m+1}^{m+1}+c(\varepsilon_2)\|u_t\|_{m+1}^{m+1})dt\\
\leq\ &\varepsilon_2c^{m+1}E(t_0)^{\frac{m-1}{2}}\int_S^T\|\Delta u\|_2^{m+1}dt+c(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{m-1}{2}}\int_S^T\|u_t\|_{m+1}^{m+1}dt\\
\leq\ &\varepsilon_2c^{m+1}E(t_0)^{\frac{m-1}{2}}\int_S^T(\frac{2p+2}{p-1}E(t))^{\frac{m+1}{2}}dt+c(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{m-1}{2}}(E(S)-E(T))-\int_S^T\|\nabla u_t\|_2^2dt\\
\leq\ &\varepsilon_2c^{m+1}E(t_0)^{\frac{m-1}{2}}(\frac{2p+2}{p-1})^{\frac{m+1}{2}}\int_S^T(E(t))^{\frac{m+1}{2}}dt+c(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{m+1}{2}},
\end{aligned}\tag{4.14}$$

这里 $c(\varepsilon_1)$, $c(\varepsilon_2)$ 是依赖于 ε_1, ε_2 的正常数.

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{m-1}{2}}u\Delta u_tdxdt\\
=\ &[-\frac{1}{2}E(t)^{\frac{m-1}{2}}\|\nabla u(t)\|_2^2]|_S^T+\frac{1}{2}\int_S^T\|\nabla u(t)\|_2^2dE(t)^{\frac{m-1}{2}}\\
\leq\ &c\frac{p+1}{p-1}E(S)^{\frac{m+1}{2}}+c\frac{(m-1)(p+1)}{2(p-1)}\int_S^T E(t)^{\frac{m-1}{2}}dE(t)\\
\leq\ &cE(S)^{\frac{m+1}{2}}.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

在 (4.13), (4.14) 式中令 ε_1, ε_2 充分小使得

$$\varepsilon_1|\Omega|+\varepsilon_2c^{m+1}E(t_0)^{\frac{m-1}{2}}(\frac{2p+2}{p-1})^{\frac{m+1}{2}}<2\theta.\tag{4.16}$$

因此由 (4.12)–(4.15) 式得

$$\begin{aligned}
\int_S^T E(t)^{\frac{m+1}{2}}dt\ &\leq\ cE(S)+cE(S)^{\frac{m+1}{2}}\\
&\leq\ c(1+E(t_0)^{\frac{m-1}{2}})E(S),
\end{aligned}\tag{4.17}$$

即 (4.6) 式成立, 故由引理 4.6 得

$$E(t) \le C(1+t)^{\frac{-2}{m-1}}, m>1; \quad E(t) \le Ce^{-\lambda t}, m=1,$$

其中 C, λ 是正常数, $t \in [t_0, \infty)$, 且 C 依赖于 $E(t_0)$.

注 在定理 4.1 中并没有限制 m, p 的大小关系, 给出了整体解的存在性. 下面将给出当 $m \ge p$ 时, 定理 2.1 中给出的局部解也是整体存在的.

定理 4.3 设 $1 < p \le \frac{n}{n-4}, n \ge 5$; $1 < p < \infty, 1 \le n \le 4$. 若 $p \le m$ 且 $u_0(x) \in H_0^2(\Omega)$, $u_1(x) \in L^2(\Omega)$. 则方程 (1.1) $\forall T > 0$ 存在唯一的整体弱解 $u(x,t)$, 使得 $u \in Y$.

证 考虑通常的能量函数

$$e(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2,$$

仅利用 $e(t)$ 很难估计强阻尼项、非线性阻尼项和源项对整体解的影响, 为此引进修正的能量函数

$$F(t) = e(t) + \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

由能量等式知

$$e'(t) = -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} - \|\nabla u_t\|_2^2 + \int_\Omega u u_t |u|^{p-1} dx. \tag{4.18}$$

故

$$F'(t) = -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} - \|\nabla u_t\|_2^2 + 2\int_\Omega u u_t |u|^{p-1} dx. \tag{4.19}$$

由 Young 不等式和 $m \ge p$ 可知

$$\begin{aligned} F'(t) &\le -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} - \|\nabla u_t\|_2^2 + 2c(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1} + 2\varepsilon\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \\ &\le -\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + c(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1} + c(\Omega)\varepsilon\|u_t\|_{m+1}^{p+1}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

这里讨论两种情况: 当 $\|u_t\|_{m+1} > 1$ 时, 选取 ε 充分小使得

$$-\|u_t\|_{m+1}^{m+1} + c(\Omega)\varepsilon\|u_t\|_{m+1}^{p+1} \le 0,$$

故 $F'(t) \le c(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1}$. 当 $\|u_t\|_{m+1} \le 1$ 时, 可得 $F'(t) \le \varepsilon c(\Omega) + c(\varepsilon)\|u\|_{p+1}^{p+1}$. 因此

$$F'(t) \le c + c_1 F(t).$$

故

$$F(t) \le (F(0) + \frac{c}{c_1})e^{c_1 t}.$$

由连续性原理可知定理 4.2 成立.

参 考 文 献

[1] Messaoudi S A. Global existense and nonexistence in a system of Petrovsky[J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 265(2): 296–308.

[2] Messaoudi S A. Global existence and decay of solutions to a system of Petrovsky[J]. Math. Sci. Res. J., 2002, 6(11): 534–541.

[3] 韩献军, 薛红霞. 一类具有非线性阻尼和源项的 Petrovsky 方程整体解的存在性和渐进性 [J]. 高校应用数学学报 (A 辑), 2008, 23(2): 153–158.

[4] 尹丽, 韩献军, 薛红霞. 一类具有非线性阻尼和源项的 Petrovsky 方程的初边值问题解的爆破 [J]. 数学实践与认识, 2010, 40(4): 168–174.

[5] Chen Wenying, Zhou Yong. Global nonexistence for a semilinear Petrovsky equation[J]. Nonl. Anal., 2009, 70(9): 3230–3208.

[6] Chen Hua, Liu GongWei. Global existence, uniform decay and exponential growth for a class of semilinear wave equation with strong damping[J]. Acta Math. Sci., 2013, 33B(1): 41–58.

[7] Lions J L. Quelques methods de resolution des problemes aux limits nonlineaires[M]. Paris: Dunod, 1969.

[8] Komornik V. Exact controllability and stabilization. The multiplier method[M]. Pairs: Mason John Wiley, 1994.

[9] Sattinger D H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations[J]. Arch. Rat. Mech. Anal., 1968, 30(2): 148–172.

FINITE TIME BLOW UP AND DECAY ESTIMATES OF SOLUTION FOR A CLASS OF FOURTH ORDER NONLINEAR WAVE EQUATION

LI Ning, LEI Qian, YANG Han

(*School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China*)

Abstract: In this paper, we consider the fourth order wave equation with nonlinear damping and source term. We prove the existence of a local weak solution and show that this solution blow up in finite time if $m < p$ and the energy is negative. Furthermore, we discuss, for the evolution of solution enters into the stable set, the solution is global as well as a decay result regardless of any relations between m and p. At last we also show that the solution is global if $m \geq p$, which extends and improves the results in [1–6].

Keywords: strong damping; forth order wave equation; potential wells; blow-up; decay estimate

2010 MR Subject Classification: 35L75; 35B44