

具有垂直传染和接触传染的传染病模型的稳定性研究

傅金波¹, 陈兰荪²

(1. 福建师范大学闽南科技学院, 福建 泉州 362332)

(2. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100080)

摘要: 本文研究了一类具有垂直传染和接触传染的传染病模型. 利用常微分方程定性稳定性方法, 分析了该模型非负平衡点的存在性及其局部稳定性. 同时, 利用 LaSalle 不变性原理和通过构造适当的 Lyapunov 函数, 获得了平凡平衡点、无病平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件. 结果表明当基本再生数小于等于 1 时, 所有种群趋于灭绝; 当基本再生数大于 1 和病毒主导再生数小于 1 时, 病毒很快被清除; 当基本再生数大于 1 和病毒主导再生数大于 1 以及满足一定条件时, 病毒持续流行并将成为一种地方病.

关键词: 传染病模型; 非负平衡点; 全局渐近稳定性

MR(2010) 主题分类号: 34D20; 34D23

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)06-1283-08

1 引言

生物动力系统的动力学性质历来受到学术界的重视^[1-5]. 然而, 考虑疾病对生物种群影响的相对较少. 近年来, 在生物动力系统中含有疾病影响因素的传染病模型已有了可喜的研究成果^[6-12]. 在带有常数输入率的传染病模型中, 基本再生数是一个重要的阈值, 当基本再生数小于 1 时, 疾病将趋于灭绝; 当基本再生数大于 1 时, 疾病将持续存在^[13-14]. 但在输入率不是常数情形下的传染病模型中, 系统却存在着后向分支现象^[15]. 基于上述文献的建模机理, 本文用 $N(t) = S(t) + I(t)$ 表示 t 时刻的生物种群总数, $S(t)$ 表示该种群中的易感类, $I(t)$ 表示该种群中的染病类, 建立具有垂直传染和接触传染的传染病模型如下

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = r(1 - \frac{S(t) + I(t)}{k})S(t) - dS(t) - \beta I(t)S(t) + qr(1 - \frac{S(t) + I(t)}{k})I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - (d + \mu)I(t) + (1 - q)r(1 - \frac{S(t) + I(t)}{k})I(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 r 为增长率, k 为环境容纳量, d 为自然死亡率, β 为接触的比例系数, q 为染病类中新生个体未染病的比例系数 $0 < q < 1$, $1 - q$ 为染病类中新生个体的染病速率, μ 为因病死亡率, 并且所有参数均为正数.

由 $N(t) = S(t) + I(t)$, 模型 (1.1) 可化为如下等价系统

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = (r - d)N(t) - \frac{r}{k}N^2(t) - \mu I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = [(1 - q)r - (d + \mu)]I(t) + \frac{\beta k - (1 - q)r}{k}N(t)I(t) - \beta I^2(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

*收稿日期: 2015-11-30

接收日期: 2016-06-28

基金项目: 国家自然科学基金 (11371306); 福建省教育厅自然科学基金 (JA13370; JAT160676); 福建师范大学闽南科技学院青年骨干教师重点培养对象 (mkq201006).

作者简介: 傅金波 (1978-), 男, 福建南安, 副教授, 主要研究方向: 生物数学.

易见, 系统 (1.2) 的可行域为 $D = \{(N(t), I(t)) \in R^2 | 0 \leq N(t) \leq k, 0 \leq I(t) \leq k\}$. 本文主要在可行域 D 内研究系统 (1.2) 的动力学性质.

2 平衡点的存在性

系统 (1.2) 的非负平衡点应满足下面的代数方程组

$$\begin{cases} (r-d)N(t) - \frac{r}{k}N^2(t) - \mu I(t) = 0, \\ [(1-q)r - (d+\mu)]I(t) + \frac{\beta k - (1-q)r}{k}N(t)I(t) - \beta I^2(t) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

为着以下证明, 定义基本再生数和病毒主导再生数分别为

$$R_0 = \frac{r}{d}, R = \frac{\bar{N}}{N_0} = \frac{r[(1-q)r - (d+\mu)]}{(r-d)[(1-q)r - \beta k]}$$

以及如下记号

$$\sigma_1 = \frac{(1-q)r}{\beta k}, \sigma_2 = \frac{(1-q)r}{d+\mu}, \bar{N} = \frac{k[(1-q)r - (d+\mu)]}{(1-q)r - \beta k}, \\ N_\Delta = \frac{\beta k(r-d) + \mu[(1-q)r - \beta k]}{2\beta r}, N_0 = \frac{k(r-d)}{r}.$$

由方程组 (2.1) 易得如下结论.

定理 2.1 系统 (1.2) 存在平凡平衡点 $O(0,0)$; 当 $R_0 > 1$ 时, 还存在无病平衡 $E_0(N_0, 0)$.

下面讨论系统 (1.2) 在域 D 内地方病平衡点的存在性. 一方面, 当 $N \neq 0, I \neq 0$ 时, 由方程组 (2.1) 的第一个方程得等倾线

$$I = f(N) = -\frac{r}{\mu k}[N - \frac{k(r-d)}{2r}]^2 + \frac{r}{\mu k}[\frac{k(r-d)}{2r}]^2.$$

可见, 当 $R_0 > 1$ 时, $f(N)$ 是过 $O(0,0)$ 和 $E_0(N_0, 0)$ 的开口向下抛物线.

由方程组 (2.1) 的第二个方程得等倾线 $I = g(N) = \frac{(1-q)r - \beta k}{\beta k}(\bar{N} - N)$. 易知直线 $g(N)$ 过点 $(\bar{N}, 0)$.

情形 1 若 $\sigma_2 > 1 > \sigma_1$ 或 $\sigma_1 > 1 > \sigma_2$, 则 $\bar{N} < 0$.

(I) 当 $R_0 > \sigma_2 > 1 > \sigma_1$ 时, 直线 $g(N)$ 的斜率为正数.

(i) 如果 $\beta k(r-d) = 2\sqrt{r\beta\mu k}[(1-q)r - (d+\mu)] + \mu[\beta k - (1-q)r]$, 则 $N_\Delta > 0, f(N_\Delta) = g(N_\Delta)$, $f(N)$ 与 $g(N)$ 有且仅有一个正交点;

(ii) 如果 $\beta k(r-d) > 2\sqrt{r\beta\mu k}[(1-q)r - (d+\mu)] + \mu[\beta k - (1-q)r]$, 则 $N_\Delta > 0, f(N_\Delta) > g(N_\Delta)$, $f(N)$ 与 $g(N)$ 有且仅有两个正交点.

(II) 当 $R_0 > \sigma_1 > 1 > \sigma_2$ 时, 直线 $g(N)$ 不在第一象限, 此时 $f(N)$ 与 $g(N)$ 没有正交点.

情形 2 若 $\sigma_i < 1$ 或 $\sigma_i > 1, i = 1, 2$, 则 $\bar{N} > 0$.

(III) 当 $R_0 > 1 > \sigma_i, i = 1, 2$ 时, 直线 $g(N)$ 的斜率为正数.

(i) 如果 $0 < \bar{N} < N_0$, 则 $f(N)$ 与 $g(N)$ 有且仅有一个正交点;

(ii) 如果 $\bar{N} > N_0$, 则 $f(N)$ 与 $g(N)$ 没有正交点.

(IV) 当 $R_0 > \sigma_i > 1, i = 1, 2$ 时, 直线 $g(N)$ 的斜率为负数.

- (i) 如果 $0 < \bar{N} < N_0$, 则 $f(N)$ 与 $g(N)$ 有且仅有一个正交点;
 (ii) 如果 $\bar{N} > N_0$ 且 $\{\beta k(r-d)\}^2 = L$, 则 $N_\Delta > 0, f(N_\Delta) = g(N_\Delta)$, $f(N)$ 与 $g(N)$ 有且仅有一个正交点;
 (iii) 如果 $\bar{N} > N_0$ 且 $\{\beta k(r-d)\}^2 > L$, 则 $N_\Delta > 0, f(N_\Delta) > g(N_\Delta)$, $f(N)$ 与 $g(N)$ 存在两个正交点;
 (iv) 如果 $\bar{N} > N_0$ 且 $\{\beta k(r-d)\}^2 < L$, 则 $N_\Delta > 0, f(N_\Delta) < g(N_\Delta)$, $f(N)$ 与 $g(N)$ 没有正交点, 其中

$$L = 4\beta r\mu k[(1-q)r - (d+\mu)] + \mu(r-d)[(1-q)r - \beta k]\{2\beta k + 3\mu[(1-q)r - \beta k]\}.$$

另一方面, 由 $f(N) = g(N)$ 得代数方程 $a_2 N^2 - a_1 N + a_0 = 0$, 其中

$$a_2 = \beta r, a_1 = \beta k(r-d) + \mu[(1-q)r - \beta k], a_0 = \mu k[(1-q)r - (d+\mu)].$$

令

$$N_1 = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, N_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2},$$

记正交点为 $E(N_*, I_*)$, 记两个正交点为 $\Omega_i(N_i, I_i), i = 1, 2$. 综上所述, 有如下结论.

定理 2.2 如果满足下列条件

- (1) $R_0 > \sigma_2 > 1 > \sigma_1, \beta k(r-d) = 2\sqrt{r\beta\mu k[(1-q)r - (d+\mu)]} + \mu[\beta k - (1-q)r]$;
- (2) $R_0 > 1 > \sigma_i, R < 1, i = 1, 2$;
- (3) $R_0 > \sigma_i > 1, R < 1, i = 1, 2$;
- (4) $R_0 > \sigma_i > 1, R > 1, \{\beta k(r-d)\}^2 = L, i = 1, 2$

之一, 系统 (1.2) 在域 D 内部存在一个地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$.

如果满足下列条件

- (1) $R_0 > \sigma_2 > 1 > \sigma_1, \beta k(r-d) > 2\sqrt{r\beta\mu k[(1-q)r - (d+\mu)]} + \mu[\beta k - (1-q)r]$;
- (2) $R_0 > \sigma_i > 1, R > 1, \{\beta k(r-d)\}^2 > L, i = 1, 2$

之一, 系统 (1.2) 在域 D 内部存在两个地方病平衡点 $\Omega_i(N_i, I_i), i = 1, 2$.

推论 2.1 如果 $R_0 > \sigma_i > 1, R > 1, \{\beta k(r-d)\}^2 > L, i = 1, 2$ 或

$$R_0 > \sigma_2 > 1 > \sigma_1, \beta k(r-d) > 2\sqrt{r\beta\mu k[(1-q)r - (d+\mu)]} + \mu[\beta k - (1-q)r]$$

成立, 系统 (1.2) 在域 D 内存在一个后向分支.

3 平衡点的局部稳定性

下面讨论系统 (1.2) 的平凡平衡点、无病平衡点和地方病平衡点局部稳定性.

定理 3.1 如果 $R_0 < 1 (R_0 > 1)$, 则系统 (1.2) 在域 D 上的平凡平衡点 $O(0, 0)$ 是局部稳定 (不稳定).

证 在点 $O(0, 0)$ 处, 系统 (1.2) 的 Jacobian 矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} r-d & -\mu \\ 0 & (1-q)r - (d+\mu) \end{pmatrix}.$$

特征方程为 $(\lambda - r + d)[\lambda - (1 - q)r - (d + \mu)] = 0$, 特征值为

$$\lambda_1 = r - d, \lambda_2 = (1 - q)r - (d + \mu).$$

当 $R_0 < 1$ 时 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 平凡平衡点 $O(0, 0)$ 是局部稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 因 $\lambda_1 > 0$, 平凡平衡点 $O(0, 0)$ 是不稳定的. 证毕.

定理 3.2 当 $R_0 > 1 > \sigma_i, i = 1, 2$ 时, 若 $R > 1 (R < 1)$, 则系统 (1.2) 在域 D 上的无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是局部稳定 (不稳定); 当 $R_0 > \sigma_i > 1, i = 1, 2$ 时, 若 $R < 1 (R > 1)$, 则系统 (1.2) 在域 D 上的无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是局部稳定 (不稳定).

证 在点 $E_0(N_0, 0)$ 处, 系统 (1.2) 的 Jacobian 矩阵为

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} d - r & -\mu \\ 0 & \frac{(r - d)[\beta k - (1 - q)r] + r[(1 - q)r - (d + \mu)]}{r} \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$(\lambda + r - d)\left(\lambda - \frac{(r - d)[\beta k - (1 - q)r] + r[(1 - q)r - (d + \mu)]}{r}\right) = 0,$$

得特征值

$$\lambda_1 = d - r, \lambda_2 = \frac{(r - d)[\beta k - (1 - q)r] + r[(1 - q)r - (d + \mu)]}{r}.$$

当 $R_0 > 1 > \sigma_i, i = 1, 2$ 且 $R > 1$ 时, 总有

$$\lambda_1 = d - r < 0, \lambda_2 = \frac{[\beta k - (1 - q)r](N_0 - \bar{N})}{k} < 0,$$

或者当 $R_0 > \sigma_i > 1, i = 1, 2$ 且 $R < 1$ 时, 也总有

$$\lambda_1 = d - r < 0, \lambda_2 = \frac{[(1 - q)r - \beta k](\bar{N} - N_0)}{k} < 0,$$

故无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是局部稳定的; 当 $R_0 > 1 > \sigma_i, i = 1, 2$ 且 $R < 1$ 或 $R_0 > \sigma_i > 1, i = 1, 2$ 且 $R > 1$ 时, $\lambda_2 > 0$ 无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是不稳定的. 证毕.

定理 3.3 如果 $R_0 > \sigma_i > 1, R < 1, i = 1, 2$ 且 $r\beta(2N_* - N_0) > \mu[(1 - q)r - \beta k]$ 或 $R_0 > 1 > \sigma_i, R < 1, i = 1, 2$ 且 $2N_* > N_0$, 则系统 (1.2) 在域 D 内的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是局部稳定的; 否则, 地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是不稳定的.

证 在 $E(N_*, I_*)$ 点处, 系统 (1.2) 的 Jacobian 矩阵为

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} r - d - \frac{2r}{k}N_* & -\mu \\ \frac{\beta k - (1 - q)r}{k}I_* & -\beta I_* \end{pmatrix},$$

特征方程为 $\lambda^2 + b_1\lambda - b_0 = 0$, 其中

$$b_1 = \frac{\beta k I_* + 2r N_* - k(r - d)}{k}, b_0 = \frac{\beta[k(r - d) - 2r N_*] + \mu[(1 - q)r - \beta k]}{k},$$

特征值为

$$\lambda_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4b_0}}{2}, \lambda_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4b_0}}{2}.$$

同时, 注意 $y_1 = \lambda^2$ 是开口向上抛物线, $y_2 = -b_1\lambda + b_0$ 是直线, 如果 $R_0 > 1 > \sigma_i, R < 1, i = 1, 2$ 且 $2N_* > N_0$ 或 $R_0 > \sigma_i > 1, R < 1, i = 1, 2$ 且 $r\beta(2N_* - N_0) > \mu[(1-q)r - \beta k]$ 成立, 则 $b_1 > 0, b_0 < 0$, 进而特征方程具有两个负实根或一对带负实部的复根, 系统 (1.2) 在域 D 内的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是局部稳定的. 否则, 即不满足上述条件中任意一条, 系统 (1.2) 在域 D 内的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是不稳定的. 证毕.

4 平衡点的全局渐近稳定性

定理 4.1 如果 $R_0 \leq 1$ 且 $\sigma_i > 1, i = 1, 2$ 或 $R_0 \leq 1$ 且 $\sigma_i < 1, i = 1, 2$, 则系统 (1.2) 在域 D 内的平凡平衡点 $O(0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证 当 $R_0 \leq 1$ 且 $\sigma_i > 1, i = 1, 2$ 时, 定义 Lyapunov 函数 $V(t) = \frac{(1-q)r - (d+\mu)}{\mu} N(t) + I(t)$, 沿着系统 (1.2) 的解直接计算 $V(t)$ 的右上导数有

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{d[(1-q)r - (d+\mu)]}{\mu} (R_0 - 1)N - \frac{r[(1-q)r - (d+\mu)]}{\mu k} N^2 \\ &\quad - \frac{(1-q)r - \beta k}{k} NI - \beta I^2 \leq 0, \end{aligned}$$

使得 $V'(t) = 0$ 只有平凡平衡点 $O(0, 0)$, 即系统 (1.2) 的最大不变集是平凡平衡点 $O(0, 0)$ 且它是全局吸引的. 根据定理 3.1 和 LaSalle 不变性原理^[16], 系统 (1.2) 在域 D 内的平凡平衡点 $O(0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

当 $R_0 \leq 1$ 且 $\sigma_i < 1, i = 1, 2$ 时, 定义 Lyapunov 函数 $V_0(t) = \frac{\beta k - (1-q)r}{\mu} N(t) + I(t)$, 沿着系统 (1.2) 的解直接计算 $V_0(t)$ 的右上导数有

$$\begin{aligned} V'_0(t) &\leq (r-d) \frac{\beta k - (1-q)r}{\mu} N(t) - \frac{r[\beta k - (1-q)r]}{\mu k} N^2(t) \\ &\quad - [(d+\mu) - (1-q)r] I(t) - \beta I^2(t) \leq 0. \end{aligned}$$

类似于上述方法, 可知系统 (1.2) 在域 D 内的平凡平衡点 $O(0, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 4.2 如果 $R_0 > \sigma_i > 1, R < 1, i = 1, 2$ 或 $R_0 > 1 > \sigma_i, R > 1, i = 1, 2$, 则系统 (1.2) 在域 D 内的无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证 将系统 (1.2) 改写为等价系统

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = (r-d - \frac{2r}{k}N_0)(N(t) - N_0) - \frac{r}{k}(N(t) - N_0)^2 - \mu I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = [\frac{\beta k - (1-q)r}{k}N_0 + (1-q)r - (d+\mu)]I(t) - \beta I^2(t) \\ \quad + \frac{\beta k - (1-q)r}{k}(N(t) - N_0)I(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

(1) 当 $R_0 > \sigma_i > 1, R < 1, i = 1, 2$ 时, 构造 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = (1 - R^{-1}) \frac{N_0}{N} |N(t) - N_0| + \frac{\mu}{(1-q)r - (d+\mu)} I(t).$$

沿着系统 (4.1) 的解直接计算 $V_1(t)$ 的右上导数有

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= (1 - R^{-1}) \frac{N_0}{\bar{N}} \operatorname{sgn}\{N(t) - N_0\} N'(t) + \frac{\mu}{(1-q)r - (d+\mu)} I'(t) \\ &\leq - \left[\frac{\mu[(1-q)r - \beta k]}{(1-q)r - (d+\mu)} + \frac{rN_0^2}{k\bar{N}} (1 - R^{-1}) \right] |N(t) - N_0| \\ &\quad - \frac{rN_0(1 - R^{-1})}{k\bar{N}} (N(t) - N_0)^2 - \frac{\mu\beta}{(1-q)r - (d+\mu)} I^2(t) \leq 0. \end{aligned}$$

易见 $\{(N, I)^T \in D : V_1'(t) = 0\} = \{(N_0, 0)\}$, 即无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 为最大不变集, 而且它是全局吸引的. 根据定理 3.2 和 LaSalle 不变性原理^[16], 系统 (1.2) 在域 D 内的无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

(2) 当 $R_0 > 1 > \sigma_i, R > 1, i = 1, 2$ 时, 构造 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \frac{r\mu}{(r-d)^2} |N(t) - N_0| + \frac{r\mu}{(r-d)[\beta k - (1-q)r]} I(t).$$

沿着系统 (4.1) 的解直接计算 $V_2(t)$ 的右上导数有

$$\begin{aligned} V_2'(t) &= \frac{r\mu}{(r-d)^2} \operatorname{sgn}\{N(t) - N_0\} N'(t) + \frac{r\mu}{(r-d)[\beta k - (1-q)r]} I'(t) \\ &\leq - \frac{r^2\mu}{k(r-d)^2} (N(t) - N_0)^2 - \frac{r\mu\bar{N}}{k(r-d)} I(t) - \frac{r\beta\mu}{(r-d)[\beta k - (1-q)r]} I^2(t) \leq 0, \end{aligned}$$

同样地, 系统 (1.2) 在域 D 内的无病平衡点 $E_0(N_0, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 4.3 如果 (1) $R_0 > \sigma_i > 1, R < 1, i = 1, 2, r\beta(2N_* - N_0) > \mu[(1-q)r - \beta k]$ 且 $\bar{N} > N_*, 2k\beta I_* r(2N_* - N_0) \geq [(1-q)r - \beta k][r(2N_* - N_0)(\bar{N} - N_*) + \mu k^2]$ 或 (2) $R_0 > 1 > \sigma_i, R < 1, i = 1, 2, 2N_* > N_0$ 且 $[(d+\mu) - (1-q)r] + 2\beta I_* \geq [\beta k - (1-q)r] \frac{r(2N_* - N_0)N_* + \mu k^2}{rk(2N_* - N_0)}$, 则系统 (1.2) 在域 D 内的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是全局渐近稳定的.

证 将系统 (1.2) 改写为如下等价系统

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = (r - d - \frac{2rN_*}{k})(N(t) - N_*) - \frac{r}{k}(N(t) - N_*)^2 - \mu(I(t) - I_*), \\ \frac{dI(t)}{dt} = [(1-q)r - (d+\mu) - 2\beta I_* + \frac{\beta k - (1-q)r}{k} N_*](I(t) - I_*) \\ \quad + \frac{\beta k - (1-q)r}{k} I(t)(N(t) - N_*) - \beta(I(t) - I_*)^2. \end{cases} \quad (4.2)$$

在条件 (1) 下, 定义 Lyapunov 函数

$$V_3(t) = [(1-q)r - \beta k] |N(t) - N_*| + \frac{r(2N_* - N_0)}{k} |I(t) - I_*|,$$

沿着系统 (4.2) 的解计算 $V_3(t)$ 的右上导数有

$$\begin{aligned} V_3'(t) &= [(1-q)r - \beta k] \operatorname{sgn}\{N(t) - N_*\} N'(t) + \frac{r(2N_* - N_0)}{k} \operatorname{sgn}\{I(t) - I_*\} I'(t), \\ &\leq - \frac{r[(1-q)r - \beta k]}{k} (N(t) - N_*)^2 - \frac{\beta r(2N_* - N_0)}{k} (I(t) - I_*)^2 \\ &\quad + \frac{[(1-q)r - \beta k][r(2N_* - N_0)(\bar{N} - N_*) + \mu k^2] - 2k\beta I_* r(2N_* - N_0)}{k^2} |I(t) - I_*| \leq 0, \end{aligned}$$

可见, 使得 $V_3'(t) = 0$ 只有地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$, 故它是最大不变集, 而且是全局吸引的. 根据定理 3.3 和 LaSalle 不变性原理^[16], 系统 (1.2) 在域 D 内的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是全局渐近稳定的.

在条件 (2) 下, 定义 Lyapunov 函数

$$V_4(t) = \frac{k[\beta k - (1-q)r]}{r(2N_* - N_0)} |N(t) - N_*| + |I(t) - I_*|.$$

沿着系统 (4.2) 的解计算 $V_4(t)$ 的右上导数有

$$\begin{aligned} V_4'(t) &= \frac{k[\beta k - (1-q)r]}{r(2N_* - N_0)} \operatorname{sgn}\{N(t) - N_*\} N'(t) + \operatorname{sgn}\{I(t) - I_*\} I'(t) \\ &= -\frac{\beta k - (1-q)r}{2N_* - N_0} (N(t) - N_*)^2 - a_2 \beta (I(t) - I_*)^2 - P_0 |I(t) - I_*| \leq 0, \end{aligned}$$

其中在条件 (2) 下

$$P_0 = [(d + \mu) - (1-q)r] + 2\beta I_* - [\beta k - (1-q)r] \frac{r(2N_* - N_0)N_* + \mu k^2}{rk(2N_* - N_0)} > 0.$$

同样地, 在条件 (2) 下系统 (1.2) 在域 D 内的地方病平衡点 $E(N_*, I_*)$ 是全局渐近稳定的.

5 结论

研究表明: 基本再生数是该系统中生物种群持续生存的阈值, 病毒主导再生数是疾病在该系统中是否流行的阈值. 如果满足定理 4.1 的条件, 则该系统中的生物种群将趋于灭绝; 如果满足定理 4.2 的条件, 则该系统中的病毒很快将被清除; 如果满足定理 4.3 的条件, 则该系统的易感类和染病类均将持续存在, 并将趋于一组稳定的定值上, 此时流行性疾病成为一种地方病. 关于有两个地方病平衡点情况不予讨论, 显然它们是不稳定的. 据此, 在生物动力系统的流行病学分析中, 要持续关注基本再生数和疾病流行的阈值, 尤其是垂直传染和接触传染等影响因素.

参 考 文 献

- [1] 崔景安. 时滞 Lotka-Volterra 系统的持久性和周期解 [J]. 数学学报, 2000, 47(1): 511-519.
- [2] 惠静, 陈兰荪. 脉冲时滞微分方程的周期性和稳定性 [J]. 数学学报, 2005, 48(6): 1137-1144.
- [3] Chen Fengde, Shi Jinlin, Chen Xiaoxing. Periodicity in a Lotka-Volterra Facultative Mutualism system with several delays[J]. Chinese J. Engin. Math., 2004, 21(3): 1005-3085.
- [4] 叶丹, 范猛. 具有脉冲的三种捕食者 - 食饵链系统正周期解的存在性 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2004, 36(4): 1-10.
- [5] 赵明, 程荣福. 一类具生物控制和比率型功能反应的食物链系统周期解的存在性 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2009, 47(4): 730-736.
- [6] Ma Zhien, Liu Jiangping, Li Jia. Stability analysis for differential infectivity epidemic models[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2003, 4: 841-856.
- [7] Wang Wendi, Ruan S. Bifurcation in an epidemic model with constant removal rate of the infectives[J]. Math. Anal. Appl., 2004, 291: 775-793.

- [8] Huang Yunjin, Chen Fengde, Li Zhong. Stability analysis of a prey-predator model with holling type III response function incorporating a prey refuge[J]. Appl. Math. Comput., 2006, 182(1): 672–683. 47(5): 511–517.
- [9] Wang Wendi. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment[J]. Math. Bios., 2006, 201: 58–71.
- [10] Cui Jingam, Mu Xiaoxia, Wan Hui. Saturation recovery leads to multiple endemic equilibria and backward bifurcation[J]. J. The. Biol., 2008, 254: 275–283.
- [11] Chen Liujuan, Chen Fengde. Qualitative analysis of a predator–prey model with Holling type II functional response incorporating a constant prey refuge[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2010, 11(1): 246–252.
- [12] 刘细宪, 李必文, 陈伯山. 食饵带疾病的捕食模型的全局稳定性 [J]. 数学杂志, 2015, 35(1): 85–94.
- [13] Ma Zhien, Liu Jiangping, Li Jia. Stability analysis for differential infectivity epidemic models[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2003, 4: 841–856.
- [14] 朱玘, 李维德, 朱凌峰. 基于 SIR 传染病模型的不同控制策略比较 [J]. 北京大学学报 (自然科学版), 2011, 12(3): 265–269.
- [15] 唐晓明, 薛亚奎. 具有饱和和治疗函数与密度制约的 SIS 传染病模型的后向分支 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(24): 241–246.
- [16] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

ON THE STABILITY PROPERTY OF A EPIDEMIC MODEL WITH VERTICAL TRANSMISSION AND CONTACT TRANSMISSION

FU Jin-bo¹, CHEN Lan-sun²

(1. *Minnan Science and Technology Institute Fujian Normal University, Quanzhou 362332, China*)

(2. *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, China*)

Abstract: In this paper, a class of epidemic model with vertical transmission and contact transmission is established. By means of qualitative method and stability method of ordinary differential equations, the model and the existence of nonnegative equilibrium point are analyzed. And by constructing proper Lyapunov function and LaSalle invariance principle, sufficient conditions of the global asymptotic stability of the trivial equilibrium point, disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point are obtained. The results show that when the basic reproduction number is less than or equal to 1, all populations tend to be extinct; when the basic reproduction number is greater than 1 and virus dominant reproduction number is less than 1, the viruses was quickly cleared; when the basic reproduction number is greater than 1 and virus dominant reproduction number is greater than 1 and satisfy certain conditis, the viruses continue to prevail and will become a local disease.

Keywords: epidemic model; nonnegative equilibrium point; global asymptotic stability

2010 MR Subject Classification: 34D20; 34D23