Vol. 36 (2016)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类中心循环的有限 p - 群的自同构群的研究

王玉雷 [1], 刘合国 [2], 吴佐慧 [2]

(1. 河南工业大学数学系, 河南 郑州 450001)

(2. 湖北大学数学系, 湖北 武汉 430062)

摘 要: 本文研究了一类中心循环的有限 p - 群 G 的自同构群. 利用在 G 的导群上作用平凡的自同构以及环上的辛群和正交群, 确定了 G 的自同构群的结构, 这推广了 Bornand 的相应结果.

关键词: 有限 p - 群; 循环中心; 辛空间; 自同构群

MR(2010) **主题分类号**: 20E36; 20F28 **中图分类号**: O152.3

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)06-1273-10

1 引言和预备知识

文中 p 是一个素数, 采用的术语和符号都是标准的, 参照文献 [1].

设 G_1 和 G_2 是任意两个群, 并且 Z_1 和 Z_2 分别是 G_1 和 G_2 的中心子群, 假设 Z_1 和 Z_2 是同构的, 设 $\theta : Z_1 \to Z_2$ 是同构映射, 称 $G_1 * G_2$ 是 G_1 和 G_2 相对于 Z_1, Z_2 和 θ 的中心积, 即 $G_1 * G_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 关于正规子群 $\{(z_1, \theta(z_1)^{-1}) | z_1 \in Z_1\}$ 的商群. 特别地, 设 G 是任意一个群, 中心积 $G * G$ 是借助于中心上的恒等映射所得, 为了方便, 对于任意 $n > 1$, 用 G^{*n} 标记中心积 $G^{*(n-1)} * G$, $G^{*1} = G$ 且 $G^{*0} = 1$.

一个有限 p - 群 G 是超特殊的, 如果 $G' = \mathrm{Frat}G = \zeta G$ 都是 p 阶群. Winter[2] 给出了超特殊 p - 群的自同构群. 在文 [1] 中, 一个有限 p - 群 G 称为广义超特殊的, 如果 G 的中心是循环群且导群是 p 阶群. 在文 [3] 中, 确定了这种广义超特殊 p - 群的自同构群. 显然, 广义超特殊 p - 群的中心商群是初等 Abel 群并且幂零类是 2, 因此广义超特殊 p - 群真包含在中心循环的, 幂零类是 2 的, 并且中心商群是齐次循环的有限 p - 群中, 这样一类有限 p - 群在文献 [4] 中给出, 即 $X_3(p^m)^{*n} * \mathbb{Z}_{p^{m+r}}$, 其中 $n \geq 1$, $m \geq 1$ 和 $r \geq 0$, 且

$$X_3(p^m) = \langle x, y | x^{p^m} = y^{p^m} = 1, [x, y]^{p^m} = 1, [x, [x, y]] = [y, [x, y]] = 1 \rangle.$$

当 p 是奇素数时, 这类群的自同构群被确定, 即下面的命题.

命题 1.1 设 p 是一个奇素数, $G = X_3(p^m)^{*n} * \mathbb{Z}_{p^{m+r}}$, 其中 $n \geq 1$, $m \geq 1$ 和 $r \geq 0$. 假设

$$\mathrm{Aut}_{\zeta G} G = \{ \alpha \in \mathrm{Aut}\ G \mid \alpha \text{ 在} \zeta G \text{ 上作用平凡} \},$$

则 $\mathrm{Aut}\ G = \mathrm{Aut}_{\zeta G} G \rtimes \mathrm{Aut} \zeta G$, 并且存在下面的正合列

$$1 \to \mathrm{Inn} G \to \mathrm{Aut}_{\zeta G} G \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z}_{p^m}) \to 1.$$

*收稿日期: 2015-08-27 **接收日期**: 2015-12-03

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11301150; 11371124); 河南省自然科学基金资助 (142300410134; 162300410066).

作者简介: 王玉雷 (1979–), 男, 河南南阳, 副教授, 博士, 主要研究方向: 代数学.

在本文中, 当 p 是奇素数时, 借助导群的特点, 重新刻画该类有限 p - 群的自同构群, 进一步, 确定这类有限 2- 群的自同构群. 若 $m=1$, 则该类群是广义超特殊 p - 群. 为了不至于重复文献 [3] 中广义超特殊 p - 群的结果, 只考虑 $m\geq 2$ 的情况, 所得主要结果如下.

定理 A 设 p 是一个奇素数, $G=X_3(p^m)^{*n}*\mathbb{Z}_{p^{m+r}}$, 其中 $m\geq 2$, $n\geq 1$ 和 $r\geq 0$. 设 $\mathrm{Aut}_{G'}G=\{\ \alpha\in \mathrm{Aut}\ G\mid \alpha$ 在 G' 上作用平凡$\}$, 则

(i) $\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Aut}_{G'}G\cong \mathbb{Z}_{p^{m-1}(p-1)}$.

(ii) $\mathrm{Aut}_{G'}G/\mathrm{Inn}G\cong \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{p^m})\times \mathbb{Z}_{p^r}$.

定理 B 设 $G=X_3(2^m)^{*n}*\mathbb{Z}_{2^{m+r}}$, 其中 $m\geq 2$, $n\geq 1$ 和 $r\geq 0$. 设 $\mathrm{Aut}_{G'}G=\{\ \alpha\in \mathrm{Aut}\ G\mid \alpha$ 在 G' 上作用平凡$\}$, 则

(i) $\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Aut}_{G'}G\cong \mathbb{Z}_{2^{m-2}}\times \mathbb{Z}_2$.

(ii) $\mathrm{Aut}_{G'}G/\mathrm{Inn}G\cong K\times \mathbb{Z}_{2^r}$, 其中 $K=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$ (当 $r>0$ 时) 或者 $\mathrm{O}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$ (当 $r=0$ 时).

为了得到结果, 需要下面的引理.

引理 1.1 设 m 和 r 都是正整数, 并且 $m\geq 2$ 和 $r\geq 1$. 则

(i) $(p^m+1)^{p^r}=1 \pmod{p^{m+r}}$.

(ii) $(p^m+1)^{p^{r-1}}=1+p^{m+r-1} \pmod{p^{m+r}}$.

证 根据二项式定理可得

$$(p^m+1)^i=1+\sum_{j=1}^{i}C_i^jp^{jm}\ (i\geq 1),$$

其中 $C_i^j=\frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{j!}$.

若 $j=1$ 并且 $i=p^r$, 则 $C_i^1p^m=p^rp^m\equiv 0 \pmod{p^{m+r}}$.

若 $j=1$ 并且 $i=p^{r-1}$, 则 $C_i^1p^m=p^{r-1}p^m\equiv p^{m+r-1} \pmod{p^{m+r}}$.

若 $j=2$ 并且 $i=p^{r-1}$, 则 $C_i^2p^{2m}=\frac{i(i-1)}{2}p^{2m}=\frac{p^{r-1}-1}{2}p^{2m+r-1}\equiv 0 \pmod{p^{m+r}}$ (当 p 是奇素数时) 或者 $(2^{r-1}-1)2^{2m+r-2}\equiv 0 \pmod{2^{m+r}}$ (当 $p=2$ 时).

假设 $j\geq 3$ 并且 $i=p^{r-1}$. 注意到 $j!=p^{[\frac{j}{p}]+[\frac{j}{p^2}]+\cdots+[\frac{j}{p^{r-1}}]}n'$, 其中 $3\leq j\leq p^{r-1}$ 并且 $(n',p)=1$. 则

$$\begin{aligned}&r-1+jm-([\frac{j}{p}]+[\frac{j}{p^2}]+\cdots+[\frac{j}{p^{r-1}}])\\ \geq&r-1+jm-(\frac{j}{p}+\frac{j}{p^2}+\cdots+\frac{j}{p^{r-1}})\geq r-1+jm-\frac{j}{p-1}\\ \geq&m+r+(j-1)2-1-\frac{j}{p-1}\geq m+r+j-3\\ \geq&m+r.\end{aligned}$$

从而

$$C_i^jp^{jm}=\frac{i(i-1)\cdots(i-j+1)}{j!}p^{jm}=\frac{p^{r-1}(p^{r-1}-1)\cdots(p^{r-1}-j+1)}{j!}p^{jm}\equiv 0 \pmod{p^{m+r}}.$$

同理可得, 若 $i=p^r$, 则 $C_i^jp^{jm}\equiv 0 \pmod{p^{m+r}}$, 其中 $j\geq 2$. 引理 1.1 得证.

2 定理 A 的证明

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}, y$ 是 G 的一组生成元, 并且满足

$$\begin{aligned}
&\zeta G = \langle y\rangle \cong \mathbb{Z}_{p^{m+r}},\\
&x_i^{p^m} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, 2n,\\
&[x_{2i-1}, x_{2i}] = y^{p^r}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,\\
&[x_{2i-1}, x_j] = 1, \quad j \neq 2i,\\
&[x_j, x_{2i}] = 1, \quad j \neq 2i-1.
\end{aligned}$$

定理 2.1 $\mathrm{Aut}_{G'}G \lhd \mathrm{Aut}\ G$ 并且 $\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Aut}_{G'}G \cong \mathbb{Z}_{p^{m-1}(p-1)}$.

证 显然 $\mathrm{Aut}_{G'}G \lhd \mathrm{Aut}\ G$. 由于 p 是一个奇素数, 因此 $\mathbb{Z}_{p^m}^*$ 是一个循环群. 设 v 是 $\mathbb{Z}_{p^m}^*$ 的一个生成元, 定义映射

$$\begin{aligned}
&\theta : G \longrightarrow G,\\
&x_{2i-1} \longmapsto x_{2i-1}^v,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\\
&x_{2i} \longmapsto x_{2i}, \quad\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\\
&y \longmapsto y^v.
\end{aligned}$$

容易验证 $\theta \in \mathrm{Aut}\ G$. 任取 $\alpha \in \mathrm{Aut}\ G$. 因为 $G' = \langle y^{p^r}\rangle$, 所以存在 $0 < v_1 < p^m$ 并且 $(v_1, p) = 1$ 使得 $\alpha(y^{p^r}) = (y^{p^r})^{v_1}$. 从而存在 $0 < v_2 < p^m$ 使得 $v^{v_2} \equiv v_1^{-1} \pmod{p^m}$. 由于

$$\theta^{v_2}\alpha(y^{p^r}) = \theta^{v_2}((y^{p^r})^{v_1}) = (\theta^{v_2}(y))^{v_1p^r} = (y^{v^{v_2}})^{v_1p^r} = (y^{p^r})^{v_1^{-1}v_1} = y^{p^r},$$

因此 $\theta^{v_2}\alpha \in \mathrm{Aut}_{G'}G$. 从而 $\mathrm{Aut}\ G = \langle\theta\rangle\mathrm{Aut}_{G'}G$.

如果 $\theta^u \in \langle\theta\rangle \cap \mathrm{Aut}_{G'}G$, 那么

$$y^{p^r} = \theta^u(y^{p^r}) = (\theta^u(y))^{p^r} = (y^{v^u})^{p^r} = y^{v^up^r}.$$

因此 $p^r(v^u - 1) \equiv 0 \pmod{p^{m+r}}$, 即 $v^u - 1 \equiv 0 \pmod{p^m}$. 从而 $p^{m-1}(p-1) \mid u$. 显然 $\theta^{p^{m-1}(p-1)} \in \mathrm{Aut}_{G'}G$, 这说明 $\langle\theta\rangle \cap \mathrm{Aut}_{G'}G = \langle\theta^{p^{m-1}(p-1)}\rangle$. 结果可得 $\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Aut}_{G'}G \cong \langle\theta\rangle/\langle\theta^{p^{m-1}(p-1)}\rangle \cong \mathbb{Z}_{p^{m-1}(p-1)}$. 定理 2.1 得证.

注意到 $G/\zeta G \cong \mathbb{Z}_{p^m} \times \mathbb{Z}_{p^m} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^m}$ 是一个 $\mathbb{Z}_{p^m}$ - 模. 定义映射

$$f : G/\zeta G \times G/\zeta G \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^m};\ (a\zeta G, b\zeta G) \longmapsto t,$$

其中 $[a, b] = (y^{p^r})^t$, $0 \leq t < p^m$. 容易验证 f 是一个交错双线性型. 令 $\bar{x}_i := x_i\zeta G$, 显然, $G/\zeta G$ 的一组基 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{2n-1}, \bar{x}_{2n}$ 满足

$$\begin{aligned}
&f(\bar{x}_{2i-1}, \bar{x}_{2i}) = 1,\ i = 1, 2, \cdots, n,\\
&f(\bar{x}_j, \bar{x}_{2i}) = 0,\ j \neq 2i-1,\\
&f(\bar{x}_{2i-1}, \bar{x}_j) = 0,\ j \neq 2i.
\end{aligned}$$

因此 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{2n-1}, \bar{x}_{2n}$ 是 $G/\zeta G$ 的一组辛基.

设 $\Psi:\mathrm{Aut}_{G'}G\longrightarrow\mathrm{Aut}(G/\zeta G)$ 和 $\Phi:\mathrm{Aut}_{G'}G\longrightarrow\mathrm{Aut}\zeta G$ 是自然诱导同态. 定义一个同态映射

$$\Theta:\mathrm{Aut}_{G'}G\longrightarrow\mathrm{Aut}(G/\zeta G)\times\mathrm{Aut}\zeta G,$$
$$\alpha\longmapsto(\Psi(\alpha),\Phi(\alpha)).$$

对于任意 $\alpha\in\mathrm{Aut}_{G'}G$, 有 $[\alpha(a),\alpha(b)]=\alpha[a,b]=[a,b]$, 其中 $a,b\in G$, 从而

$$f(\Psi(\alpha)(\bar a),\Psi(\alpha)(\bar b))=f(\bar a,\bar b),$$

其中 $\bar a=a\zeta G,\bar b=b\zeta G$. 由此可得 $\mathrm{Im}\Psi\le\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{p^m})$. 从而 Θ 是 $\mathrm{Aut}_{G'}G$ 到 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{p^m})\times\mathrm{Aut}\zeta G$ 的一个同态映射.

定理 2.2 $\mathrm{Ker}\Theta=\mathrm{Inn}G$.

证 显然, $\mathrm{Inn}G\le\mathrm{Ker}\Theta$. 任取 $\alpha\in\mathrm{Ker}\Theta$, 假设 $\alpha(x_i)=x_iy^{s_i}$, $\alpha(y)=y$, 其中 $0\le s_i<p^{m+r}$, $i=1,2,\cdots,2n$. 由于

$$1=\alpha(x_i)^{p^m}=(x_iy^{s_i})^{p^m}=x_i^{p^m}y^{s_ip^m}=y^{s_ip^m},\ \ i=1,2,\cdots,2n,$$

因此 $p^r|s_i$. 从而 $|\mathrm{Ker}\Theta|\le p^{2nm}$. 显然 $|\mathrm{Inn}G|=p^{2nm}$, 因此 $\mathrm{Ker}\Theta=\mathrm{Inn}G$. 定理 2.2 得证.

定理 2.3 $\mathrm{Im}\Psi=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{p^m})$.

证 任取 $T\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{p^m})$. 设 T 在 $G/\zeta G$ 的一组基 $\{\bar x_i\mid \bar x_i=x_i\zeta G,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ 上对应的矩阵是 $A=(a_{ij})$.

定义映射

$$\phi:\ G\longrightarrow G,$$
$$(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{a_i})y^c\longmapsto[\prod_{i=1}^{2n}(\prod_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{a_i}]y^c,$$

其中 $0\le a_i<p^m,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n,\ 0\le c<p^{m+r}$.

注意到 (a_{ij}) 是一个非奇异矩阵. 容易验证 ϕ 是一个双射. 因此 ϕ 是 G 的一个自同构当且仅当 ϕ 是一个同态映射. 根据 ϕ 的定义, 下面的结论成立.

(1) $\phi(x_i^{a_i})=(\prod\limits_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{a_i}=\phi(x_i)^{a_i}$;

(2) $\phi[(\prod\limits_{i=1}^{2n}x_i^{a_i})y^c]=[\prod\limits_{i=1}^{2n}(\prod\limits_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{a_i}]y^c=[\prod\limits_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i}]y^c$;

(3) $f(\overline{\phi(g_1)},\overline{\phi(g_2)})=f(T(\bar g_1),T(\bar g_2))=f(\bar g_1,\bar g_2)$, 其中 $\overline{\phi(g_i)}=\phi(g_i)\zeta G,\ \bar g_i=g_i\zeta G,\ i=1,\ 2$, 即 $[\phi(g_1),\phi(g_2)]=[g_1,g_2]$;

(4) $\phi(y)=y$,

称上面的 ϕ 是 T 在 G 上的诱导映射.

任意 $g_1,\ g_2\in G$, 假设 $g_1=(\prod\limits_{i=1}^{2n}x_i^{a_i})y^{c_1}$ 和 $g_2=(\prod\limits_{i=1}^{2n}x_i^{b_i})y^{c_2}$, 则

$$\begin{aligned}g_1g_2&=(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{a_i})(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{b_i})y^{c_1+c_2}=(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{a_i+b_i})(\prod_{j=1}^{2n-1}\prod_{k=j+1}^{2n}[x_k^{a_k},x_j^{b_j}])y^{c_1+c_2}\\&=(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{a_i+b_i})y^e,\end{aligned}$$

其中 $y^e=(\prod\limits_{j=1}^{2n-1}\prod\limits_{k=j+1}^{2n}[x_k^{a_k},x_j^{b_j}])y^{c_1+c_2}$, $e\in\mathbb{N}$.

设 $a_i+b_i=r_i+p^m s_i$ 且 $e=t_1+tp^{m+r}$, 其中 $0\le r_i<p^m$, $s_i\in\mathbb{Z}$, $0\le t_1<p^{m+r}$, $t\in\mathbb{Z}$, 则

$$\begin{aligned}\phi(g_1g_2)&=\phi[(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{a_i+b_i})y^e]=\phi[(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{r_i+p^m s_i})y^{t_1}]\\&=\phi[(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{r_i})y^{t_1}]=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{r_i})y^{t_1},\\ \phi(g_1)\phi(g_2)&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i})(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{b_i})y^{c_1+c_2}\\&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i+b_i})(\prod_{j=1}^{2n-1}\prod_{k=j+1}^{2n}[\phi(x_k)^{a_k},\phi(x_j)^{b_j}])y^{c_1+c_2}\\&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i+b_i})(\prod_{j=1}^{2n-1}\prod_{k=j+1}^{2n}[\phi(x_k^{a_k}),\phi(x_j^{b_j})])y^{c_1+c_2}\\&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i+b_i})(\prod_{j=1}^{2n-1}\prod_{k=j+1}^{2n}[x_k^{a_k},x_j^{b_j}])y^{c_1+c_2}\\&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i+b_i})y^e.\end{aligned}$$

由于

$$\phi(x_i)^{p^m}=(\prod_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{p^m}=\prod_{j=1}^{2n}x_j^{p^m a_{ij}}=1,$$

因此

$$\begin{aligned}\phi(g_1)\phi(g_2)&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i+b_i})y^e=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{r_i+p^m s_i})y^{t_1+tp^{m+r}}\\&=(\prod_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{r_i})y^{t_1}=\phi(g_1g_2).\end{aligned}$$

从而 $\phi\in\mathrm{Aut}_{G'}\,G$, 并且 $\Psi(\phi)=T$. 结果可得 $\mathrm{Im}\Psi=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{p^m})$. 定理 2.3 得证.

定理 2.4 $\mathrm{Im}\Phi\cong\mathbb{Z}_{p^r}$.

证 定义映射

$$\begin{aligned}\sigma:\ G&\longrightarrow G,\\ x_{2i-1}&\longmapsto x_{2i-1}^{p^m+1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\\ x_{2i}&\longmapsto x_{2i},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\\ y&\longmapsto y^{p^m+1}.\end{aligned}$$

容易验证 σ 是 G 的一个自同构. 因为 $G' = \langle y^{p^r} \rangle$ 和 $\sigma(y^{p^r}) = \sigma(y)^{p^r} = (y^{p^m+1})^{p^r} = y^{p^r}$, 所以 $\sigma \in \mathrm{Aut}_{G'}G$.

若 $r = 0$, 则 $\zeta G = G'$, 那么 σ 是恒等自同构. 下面不妨假设 $r > 0$.

由引理 1.1 可得 $(p^m+1)^{p^r} \equiv 1 \pmod{p^{m+r}}$ 和 $(p^m+1)^{p^{r-1}} \equiv 1 + p^{m+r-1} \pmod{p^{m+r}}$. 由于

$$\Phi(\sigma)^{p^r}(y) = \sigma^{p^r}(y) = y^{(p^m+1)^{p^r}} = y,$$
$$\Phi(\sigma)^{p^{r-1}}(y) = \sigma^{p^{r-1}}(y) = y^{(p^m+1)^{p^{r-1}}} \neq y,$$

因此 $\Phi(\sigma)$ 的阶是 p^r.

任取 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{G'}G$, 则 $\alpha(y^{p^r}) = y^{p^r}$. 设 $\alpha(y) = y^u$, 其中 $0 \le u < p^{m+r}$. 因为 $y^{p^r} = \alpha(y^{p^r}) = \alpha(y)^{p^r} = y^{up^r}$, 所以 $p^{m+r} \mid p^r(u-1)$, 即 $p^m \mid (u-1)$. 设 $u = 1 + p^m u'$, 其中 $u' \in \mathbb{Z}$. 根据引理 1.1, 容易验证 $u^{p^r} = (1+p^m u')^{p^r} \equiv 1 \pmod{p^{m+r}}$, 因此 $\Phi(\alpha)^{p^r}(y) = \alpha^{p^r}(y) = y^{u^{p^r}} = y$, 这表明 $\Phi(\alpha)$ 是一个 p - 元素, 从而 $\mathrm{Im}\Phi$ 是一个幂指数为 p^r 的 p - 群. 由于 $\mathrm{Aut}\zeta G$ 是 $p^{m+r-1}(p-1)$ 阶循环群, 从而 $\mathrm{Im}\Phi = \langle \Phi(\sigma) \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^r}$. 定理 2.4 得证.

3 定理 B 的证明

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}, y$ 是 G 的一组生成元, 并且满足

$$\begin{aligned}
&\zeta G = \langle y \rangle \cong \mathbb{Z}_{2^{m+r}},\\
&x_i^{2^m} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, 2n,\\
&[x_{2i-1}, x_{2i}] = y^{2^r}; \quad i = 1, 2, \cdots, n,\\
&[x_{2i-1}, x_j] = 1; \quad j \neq 2i,\\
&[x_j, x_{2i}] = 1; \quad j \neq 2i-1.
\end{aligned}$$

定理 3.1 $\mathrm{Aut}_{G'}G \lhd \mathrm{Aut}\ G$ 并且 $\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Aut}_{G'}G \cong \mathbb{Z}_{2^{m-2}} \times \mathbb{Z}_2$.

证 由于 $G' = \langle y^{2^r} \rangle$, 因此 $\mathrm{Aut}G' \cong \mathbb{Z}_{2^m}^*$. 由 $\mathrm{Aut}G$ 到 $\mathrm{Aut}G'$ 的诱导同态可得 $\mathrm{Aut}G/\mathrm{Aut}_{G'}G$ 同构于 $\mathbb{Z}_{2^m}^*$ 的一个子群.

根据 $\mathbb{Z}_{2^m}^* \cong \mathbb{Z}_{2^{m-2}} \times \mathbb{Z}_2$, 假设 $\mathbb{Z}_{2^m}^* = \langle r_1 \rangle \times \langle r_2 \rangle$, 其中 $r_1 := 3$ 和 $r_2 := 2^m - 1$ 的阶分别是 2^{m-2} 和 2.

定义映射

$$\begin{aligned}
\theta_1:\ G &\longrightarrow G,\\
x_{2i-1} &\longmapsto x_{2i-1}^{r_1};\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\\
x_{2i} &\longmapsto x_{2i};\quad\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\\
y &\longmapsto y^{r_1}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\theta_2:\ G &\longrightarrow G,\\
x_{2i-1} &\longmapsto x_{2i-1}^{r_2};\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\\
x_{2i} &\longmapsto x_{2i};\quad\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\\
y &\longmapsto y^{r_2}.
\end{aligned}$$

容易验证 θ_1 和 θ_2 都是 G 的自同构.

如果 $m=2$, 那么 $\theta_1=\theta_2$. 任取 $\alpha\in \mathrm{Aut}\ G$. 因为 $G'=\langle y^{2^r}\rangle$, 所以存在 $0<t<4$ 并且 $(t,2)=1$ 使得 $\alpha(y^{2^r})=(y^{2^r})^t$. 从而存在 $0<t_1<4$ 使得 $r_1^{t_1}\equiv t^{-1}\ (\mathrm{mod}\ 4)$. 由于

$$\theta_1^{t_1}\alpha(y^{2^r})=\theta_1^{t_1}((y^{2^r})^t)=(\theta_1^{t_1}(y))^{t2^r}=(y^{r_1^{t_1}})^{t2^r}=(y^{2^r})^{t^{-1}t}=y^{2^r},$$

因此 $\theta_1^{t_1}\alpha\in \mathrm{Aut}_{G'}G$. 从而 $\mathrm{Aut}\ G=\langle\theta_1\rangle\mathrm{Aut}_{G'}G$.

如果 $\theta_1^l\in\langle\theta_1\rangle\cap\mathrm{Aut}_{G'}G$, 那么 $y^{2^r}=\theta_1^l(y^{2^r})=(\theta_1^l(y))^{2^r}=(y^{r_1^l})^{2^r}=y^{r_1^l2^r}$. 因此 $2^r(r_1^l-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2^{2+r})$, 即 $r_1^l-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$. 从而 $2\mid l$. 显然 $\theta_1^2\in\mathrm{Aut}_{G'}G$, 这说明 $\langle\theta_1\rangle\cap\mathrm{Aut}_{G'}G=\langle\theta_1^2\rangle$. 结果可得 $\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Aut}_{G'}G\cong\langle\theta_1\rangle/\langle\theta_1^2\rangle\cong\mathbb{Z}_2$.

假设 $m\geq 3$, 容易验证 θ_1 与 θ_2 可交换.

任取 $\alpha\in\mathrm{Aut}G$, 则 $\alpha(y^{2^r})=y^{2^rs}$, 其中 $s\in\mathbb{Z}_{2^m}^*$. 从而存在 $0\leq s_1<2^{m-2}$ 和 $0\leq s_2<2$ 使得 $r_1^{s_1}r_2^{s_2}\equiv s^{-1}\ (\mathrm{mod}\ 2^m)$. 由于

$$\theta_1^{s_1}\theta_2^{s_2}\alpha(y^{2^r})=\theta_1^{s_1}\theta_2^{s_2}(y^{2^rs})=\theta_1^{s_1}(y^{r_2^{s_2}})^{2^rs}=(\theta_1^{s_1}(y))^{r_2^{s_2}2^rs}=((y^{2^r})^{r_1^{s_1}r_2^{s_2}})^s=(y^{2^r})^{s^{-1}s}=y^{2^r},$$

因此 $\theta_1^{s_1}\theta_2^{s_2}\alpha\in\mathrm{Aut}_{G'}G$. 从而 $\mathrm{Aut}G=\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle\mathrm{Aut}_{G'}G$.

如果 $\theta_1^{u_1}\theta_2^{u_2}\in\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle\cap\mathrm{Aut}_{G'}G$, 其中 $0\leq u_1<2^{m-2}$ 和 $0\leq u_2<2$, 那么由 $y^{2^r}=\theta_1^{u_1}\theta_2^{u_2}(y^{2^r})=(y^{2^r})^{r_1^{u_1}r_2^{u_2}}$ 可得 $r_1^{u_1}r_2^{u_2}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2^m)$, 因此 $2^{m-2}\mid u_1$ 和 $2\mid u_2$, 从而 $\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle\cap\mathrm{Aut}_cG=\langle\theta_1^{2^{m-2}},\theta_2^2\rangle$. 结果可得 $\mathrm{Aut}G/\mathrm{Aut}_cG=\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle/\langle\theta_1^{2^{m-2}},\theta_2^2\rangle\cong\mathbb{Z}_{2^{m-2}}\times\mathbb{Z}_2$. 定理 3.1 得证.

为了方便, 不至于引起混淆, 仍用定理 A 中的记号, 定义同态映射

$$\Theta:\mathrm{Aut}_{G'}G\longrightarrow\mathrm{Aut}(G/\zeta G)\times\mathrm{Aut}\zeta G$$
$$\alpha\longmapsto(\Psi(\alpha),\Phi(\alpha)),$$

其中 $\Psi:\mathrm{Aut}_{G'}G\longrightarrow\mathrm{Aut}(G/\zeta G)$ 和 $\Phi:\mathrm{Aut}_{G'}G\longrightarrow\mathrm{Aut}\zeta G$ 是自然诱导同态.

根据定理 2.2, 同理可得 $\mathrm{Ker}\Theta=\mathrm{Inn}G$.

定理 3.2 若 $r>0$, 则 $\mathrm{Im}\Psi=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$.

证 定义 $\mathbb{Z}_{2^m}$ - 模 $G/\zeta G$ 上的交错双线性型 $f:G/\zeta G\times G/\zeta G\longrightarrow\mathbb{Z}_{2^m}$; $(a\zeta G,b\zeta G)\longmapsto t$, 其中 $[a,b]=(y^{2^r})^t$, $0\leq t<2^m$. 根据定理 A, 同理可得 $\mathrm{Im}\Psi\leq\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$.

任取 $T\in\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$. 设 T 在 $G/\zeta G$ 的一组基 $\{\bar{x}_i\mid\bar{x}_i=x_i\zeta G,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ 上对应的矩阵是 $A=(a_{ij})$.

定义映射

$$\phi:\ G\longrightarrow G,$$
$$(\prod_{i=1}^{2n}x_i^{a_i})y^c\longmapsto[\prod_{i=1}^{2n}(\prod_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{a_i}]y^{c'},$$

其中 $0\leq a_i<2^m,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n, 0\leq c<2^{m+r}$, 并且 $c'\equiv c+\sum\limits_{i=1}^{2n}2^{r-1}a_i(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})$ $(\mathrm{mod}\ 2^{m+r})$.

注意到 (a_{ij}) 是一个非奇异矩阵. 容易验证 ϕ 是一个双射. 因此 ϕ 是 G 的一个自同构当且仅当 ϕ 是一个同态映射. 根据 ϕ 的定义, 下面的结论成立.

(1) $\phi(x_i^{a_i})=(\prod\limits_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{a_i}y^{(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{r-1}a_i}=[(\prod\limits_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})y^{(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{r-1}}]^{a_i}=\phi(x_i)^{a_i}$.

(2) $\phi[(\prod\limits_{i=1}^{2n}x_i^{a_i})y^c]=\prod\limits_{i=1}^{2n}[(\prod\limits_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})^{a_i}y^{(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{r-1}a_i}]y^c=[\prod\limits_{i=1}^{2n}\phi(x_i)^{a_i}]y^c$.

(3) $f(\overline{\phi(g_1)},\overline{\phi(g_2)})=f(T(\bar{g}_1),T(\bar{g}_2))=f(\bar{g}_1,\bar{g}_2)$, 其中 $\overline{\phi(g_i)}=\phi(g_i)\zeta G$, $\bar{g}_i=g_i\zeta G$, $i=1,\ 2$, 即 $[\phi(g_1),\phi(g_2)]=[g_1,g_2]$.

(4) $\phi(y)=y$.

(5)

$$
\begin{aligned}
\phi(x_i)^{2^m}&=[(\prod_{j=1}^{2n}x_j^{a_{ij}})y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{r-1}}]^{2^m}\\
&=\prod_{j=1}^{n}(x_{2j-1}^{a_{2j-1}}\cdot x_{2j}^{a_{i,2j}})^{2^m}\cdot y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{m+r-1}}\\
&=(\prod_{j=1}^{n}x_{2j-1}^{2^m a_{i,2j-1}}\cdot x_{2j}^{2^m a_{i,2j}}[x_{2j-1}^{a_{i,2j-1}},x_{2j}^{a_{i,2j}}]^{2^{m-1}})\cdot y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{m+r-1}}\\
&=\prod_{j=1}^{n}[x_{2j-1},x_{2j}]^{2^{m-1}a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j}}\cdot y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{m+r-1}}\\
&=\prod_{j=1}^{n}y^{2^{m+r-1}a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j}}\cdot y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{m+r-1}}\\
&=y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{m+r-1}}\cdot y^{\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{i,2j-1}\cdot a_{i,2j})2^{m+r-1}}\\
&=1.
\end{aligned}
$$

根据定理 2.3 的证明, 同理可得 $\phi\in\mathrm{Aut}_{G'}G$, 并且 $\Psi(\phi)=T$. 结果可得 $\mathrm{Im}\Psi=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$. 定理 3.2 得证.

如果 $r=0$, 那么 $G=X_3(2^m)^{*n}$, 此时, $G'=\zeta G=\langle y\rangle\cong\mathbb{Z}_{2^m}$, 在 $\mathbb{Z}_{2^m}$ - 模 $G/\zeta G$ 上定义一个二次型, 对任意 $\bar{x}:=x\zeta G\in G/\zeta G$, 有

$$q(\bar{x})=2^{m-1}\bar{c},\ \text{其中}\ \bar{c}=0\ \text{或者}\ 1,\ x^{2^m}=y^{2^{m-1}c},\ \bar{c}\equiv c\pmod 2.$$

显然 $q(\bar{x}_1^{c_1}\bar{x}_2^{c_2}\cdots\bar{x}_{2n-1}^{c_{2n-1}}\bar{x}_{2n}^{c_{2n}})=2^{m-1}(\bar{c}_1\bar{c}_2+\cdots+\bar{c}_{2n-1}\bar{c}_{2n})$. 令

$$\mathrm{O}(2n,\mathbb{Z}_{2^m}):=\{T\in\mathrm{Aut}(G/\zeta G),q(T(\bar{x}))=q(\bar{x}),\bar{x}=x\zeta G\},$$

则有下面的定理.

定理 3.3 若 $r=0$, 则 $\mathrm{Im}\Psi=\mathrm{O}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$.

证 任意 $\alpha\in\mathrm{Aut}_{G'}G$, $x\in G$, 则 $\alpha(x)^{2^m}=\alpha(x^{2^m})=x^{2^m}$, 因此 $q(\overline{\alpha(x)})=q(\bar{x})$, 即 $q(\Psi(\alpha)(\bar{x}))=q(\bar{x})$, 因此 $\Psi(\alpha)\in\mathrm{O}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$, 由此可得 $\mathrm{Im}\Psi\le\mathrm{O}(2n,\mathbb{Z}_{2^m})$.

任取 $T \in \mathrm{O}(2n, \mathbb{Z}_{2^m})$. 设 T 在 $G/\zeta G$ 的一组基 $\{\bar{x}_i \mid \bar{x}_i = x_i\zeta G,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$ 上对应的矩阵是 $A = (a_{ij})$.

定义映射

$$\begin{aligned} \phi:\ G &\longrightarrow G \\ (\prod_{i=1}^{2n} x_i^{a_i})y^c &\longmapsto [\prod_{i=1}^{2n}(\prod_{j=1}^{2n} x_j^{a_{ij}})^{a_i}]y^c, \end{aligned}$$

其中 $0 \le a_i < 2^m,\ \ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n,\ 0 \le c < 2^{m+r}$.

由于 $q(\overline{\phi(x_i)}) = q(T(\bar{x}_i)) = q(\bar{x}_i)$, 因此 $\phi(x_i)^{2^m} = x_i^{2^m} = 1$. 由于 $q(\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2) = q(\bar{g}_1) + q(\bar{g}_2) + f(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$, 其中 $\overline{\phi(g_i)} = \phi(g_i)\zeta G,\ \bar{g}_i = g_i\zeta G,\ i = 1,\ 2$, 根据定理 3.2 中定义的交错双线性型, 有

$$\begin{aligned} f(\overline{\phi(g_1)}, \overline{\phi(g_2)}) &= f(T(\bar{g}_1), T(\bar{g}_2)) = q(T(\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2)) - q(T(\bar{g}_1)) - q(T(\bar{g}_2)) \\ &= q(\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2) - q(\bar{g}_1) - q(\bar{g}_2) = f(\bar{g}_1, \bar{g}_2), \end{aligned}$$

从而 $[\phi(g_1), \phi(g_2)] = [g_1, g_2]$.

类似于定理 2.3 的证明, 同理可得 $\phi \in \mathrm{Aut}_{G'}G$, 并且 $\Psi(\phi) = T$. 总之, $\mathrm{Im}\Psi = \mathrm{O}(2n, \mathbb{Z}_{2^m})$.

定理 3.4 $\mathrm{Im}\Phi \cong \mathbb{Z}_{2^r}$.

证 定义映射

$$\begin{aligned} \sigma_1:\ G &\longrightarrow G, \\ x_{2i-1} &\longmapsto x_{2i-1}^{2^m+1},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n; \\ x_{2i} &\longmapsto x_{2i},\quad\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n; \\ y &\longmapsto y^{2^m+1}. \end{aligned}$$

容易验证 σ_1 是 G 的一个自同构. 因为 $G' = \langle y^{2^r}\rangle$ 和 $\sigma_1(y^{2^r}) = \sigma_1(y)^{2^r} = (y^{2^m+1})^{2^r} = y^{2^r}$, 所以 $\sigma_1 \in \mathrm{Aut}_{G'}G$.

由引理 1.1 可得 $(2^m+1)^{2^r} \equiv 1 \pmod{2^{m+r}}$ 和 $(2^m+1)^{2^{r-1}} \equiv 1 + 2^{m+r-1} \pmod{2^{m+r}}$. 由于

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_1)^{2^r}(y) &= \sigma_1^{2^r}(y) = y^{(2^m+1)^{2^r}} = y, \\ \Phi(\sigma_1)^{2^{r-1}}(y) &= \sigma_1^{2^{r-1}}(y) = y^{(2^m+1)^{2^{r-1}}} \neq y, \end{aligned}$$

因此 $\Phi(\sigma_1)$ 的阶是 2^r.

任取 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{G'}G$, 则 $\alpha(y^{2^r}) = y^{2^r}$. 设 $\alpha(y) = y^u$, 其中 $0 \le u < 2^{m+r}$. 因为 $y^{2^r} = \alpha(y^{2^r}) = \alpha(y)^{2^r} = y^{u2^r}$, 所以 $2^{m+r} \mid 2^r(u-1)$, 即 $2^m \mid (u-1)$. 设 $u = 1 + 2^m u'$, 其中 $u' \in \mathbb{Z}$. 从而 $\Phi(\alpha)(y) = y^{2^m u'+1}$, 其中 $0 \le u' < 2^r$, 因此 $|\mathrm{Im}\Phi| \le 2^r$, 结果可得 $\mathrm{Im}\Phi = \langle\Phi(\sigma_1)\rangle \cong \mathbb{Z}_{2^r}$. 定理 3.4 得证.

参 考 文 献

[1] Robinson D J S. A course in the theory of groups (2nd ed.)[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

[2] Winter D. The automorphism group of an extraspecial p-group [J]. Rocky Mountain J. Math., 1972, 2: 159–168.

[3] Liu H G, Wang Y L. The automorphism group of a generalized extraspecial p-group[J]. Sci. China Math., 2010, 53(2): 315–334.

[4] Bornand D. Elementary abelian subgroups in p-groups of class 2[D]. Lausanne: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.

[5] 海进科, 王玉雷. 有限群的 Coleman 外自同构群是 p' - 群的一些充分条件 [J]. 数学杂志, 2008, 28(6): 653–658.

A STUDY ON THE AUTOMORPHISM GROUP OF A CLASS OF A FINITE P-GROUP WITH A CYCLIC CENTER

WANG Yu-lei[1], LIU He-guo[2], WU Zuo-hui[2]

(*1.Department of Mathematics, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China*)

(*2.Department of Mathematics, Hubei University, Wuhan 430062, China*)

Abstract: In this article, the automorphism group of a class of a finite p-group G with a cyclic center is researched. With the automorphisms which act trivially on the derived subgroup of G, symplectic group and orthogonal group over a ring, the structure of the automorphism group of G is determined, which generalizes the related results of Bornand.

Keywords: finite p-group; cyclic center; symplectic space; automorphism group

2010 MR Subject Classification: 20E36; 20F28