Vol. 36 (2016)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

分数阶模糊时滞神经网络模型解的存在唯一性和有限时间稳定性

哈金才, 杨洪福, 张启敏

(北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川 750021)

摘 要: 本文介绍了一类分数阶模糊时滞神经网络模型. 利用压缩映射原理, 讨论了带时滞的分数阶神经网络模型解的存在性和唯一性, 并根据 Gronwall 不等式结合分数阶微分方程的性质, 证明了分数阶神经网络模型平衡点的有限时间稳定性, 给出了有限时间稳定性的判断准则. 最后, 给出数值仿真说明了理论结果的正确性.

关键词: 分数阶模糊神经网络; 存在性; 唯一性; 有限时间稳定性

MR(2010) **主题分类号**: 26A36; 35R11; 34D20; 60H15 **中图分类号**: O211.63

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)06-1261-12

1 引言

近几年来, 由于分数阶系统可应用于许多科学和工程领域, 因此分数阶微积分模型受到人们越来越多的关注 [1−10]. 文献 [3–6, 9] 表明记忆效果 (分数微分或积分算子) 用到一个神经网络系统是一个非常重要的改进.

另一方面, 微分方程的稳定性分析一直是最重要的动力学行为, 与古典的李雅普诺夫稳定相比较, 有限时间稳定更符合实际需要. 然而, 关于时滞分数阶模糊神经网络模型还没有这方面的讨论. 本文考虑如下带有时滞的分数阶模糊神经网络模型:

$$\begin{aligned} D^\alpha x_i(t) = \ & -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}\mu_j + I_i + \bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) \\ & + \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + \bigwedge_{j=1}^n T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^n H_{ij}\mu_j, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $t \in \mathbb{T} = [0, T]$, $i \in \aleph = \{1, 2, \cdots, n\}$, n 是神经元的个数, $x_i(t)$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态变量; α_{ij}, β_{ij} 分别表示模糊反馈最小和最大模块的链接权重; T_{ij} 及 H_{ij} 分别表示模糊前向最小和最大模块的联接权重; a_{ij} 表示第 j 个神经元与第 i 个神经元的联接权重; b_{ij} 表示自由向前模块; $\wedge$, $\vee$ 分别表示模糊与 (取小) 和模糊或 (取大) 算子; μ_i, I_i 分别表示第 i 个神经元的输入和偏差; $c_i > 0$ 表示网络不连通和无外部附加电压差时第 i 个神经元恢复独立静息状态的速率; $f_j(\cdot)$ 为激活函数; $\tau_j \geq 0$ 表示沿轴突的第 j 个神经元的传输延迟.

系统 (1.1) 的初始条件为

$$x_i = \phi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0], \qquad i \in \aleph, \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2015-07-03 接收日期: 2016-04-08

基金项目: 宁夏自然科学基金资助 (NZ15104); 国家自然科学基金资助 (11461053; 11261043); 宁夏高校科研项目资助 (NGY20140152).

作者简介: 哈金才 (1971–), 男, 宁夏银川, 副教授, 研究方向: 应用概率统计.

通讯作者: 杨洪福.

其中

$$\tau=\max_{i\in\aleph}\{\tau_i\},\quad \phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_n(t))^T\in C([-\tau,0],R^n),$$

这里 $C([-\tau,0],R^n)$ 表示所有从 $[-\tau,0]$ 到 R^n 的连续函数组成的全体. 定义范数为 $|||\phi|||=\sup\limits_{t\in[-\tau,0]}\|\phi(t)\|$, 其中 $\|\phi(t)\|=\sum\limits_{i=1}^{n}|\phi_i(t)|$. 为了证明方便, 定义如下符号

$$\hat{c}=\min_{j\in\aleph}\{c_j\},\quad \check{c}=\max_{j\in\aleph}\{c_j\},\quad \breve{a}_i=\max_{j\in\aleph}\{|a_{ij}|\},\quad \breve{a}=\sum_{i=1}^{n}\breve{a}_i.$$

2 预备知识

定义 2.1 [1,3] 函数 f 的 α 分数阶积分定义为

$$I^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\quad t>0,\ \alpha>0,$$

其中 $t\geq t_0$ 且 $\alpha>0,\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$.

定义 2.2 [1,5] 函数 f 的 α 阶 Caputo 分数阶微分定义为

$$D^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_{t_0}^{t}\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-m}}ds,\quad t>0,$$

其中 $t\geq t_0$. m 是一个正整数满足 $m-1<\alpha<m$. 特殊地, 当 $0<\alpha<1$ 时,

$$D^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds,\quad t>0.$$

定义 2.3 [7,8] 对任意 $t\in[0,+\infty)$, 如果常量 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T\in R^n$ 满足

$$\begin{aligned}0=\ &-c_ix_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mu_j+I_i+\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(x_j^*)\\&+\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(x_j^*)+\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j+\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j,\quad i\in\aleph,\end{aligned}$$

则称 x^* 为系统 (1.1) 的平衡点.

定义 2.4 [9,10] 若系统 (1.1) 的平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$ 关于 $\{t_0,\delta,\varepsilon,\mathbb{T},\tau\}$ 是有限时间稳定, 则对任意常数 $\varepsilon>0$, 都能找到 $0<\delta<\varepsilon$, 使得当初始值 (1.2) 满足 $|||\phi-x^*|||<\delta$ 时, 系统 (1.1) 的任意解 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$ 有 $\|x(t)-x^*\|<\varepsilon,\quad\forall t\in\mathbb{T}=[t_0,t_0+T]$.

引理 2.1 [2,4] 若 $x(t)\in C^m([0,\infty),R^n)$, 且 $m-1<\alpha<m\in Z^+$, 则有

(1) $I^\alpha I^\beta x(t)=I^{\alpha+\beta}x(t),\quad \alpha,\beta\geq 0$,

(2) $D^\alpha I^\alpha x(t)=x(t),\quad \alpha\geq 0$,

(3) $I^\alpha D^\alpha x(t)=x(t)-\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{i!}x^{(j)}(0),\quad \alpha\geq 0$.

引理 2.2 [11] 对任意的 $\alpha_{ij},\beta_{ij}\in R$ 及 $i,j\in\aleph$, 如下结论成立:

$$\begin{aligned}
&\mid \bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(x_j)-\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(y_j)\mid\leq\sum_{j=1}^{n}\mid\alpha_{ij}\mid\mid f_j(x_j)-f_j(y_j)\mid,\\
&\mid \bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(x_j)-\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(y_j)\mid\leq\sum_{j=1}^{n}\mid\beta_{ij}\mid\mid f_j(x_j)-f_j(y_j)\mid.
\end{aligned}$$

引理 2.3 [12] 若 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_d$ 是非负实数, $d\in Z^+$, 因此对任意的 $\lambda>1$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{d}\kappa_i\right)^{\lambda}\leq d^{\lambda-1}\sum_{i=1}^{d}\kappa_i^{\lambda}.$$

为了证明本文的主要结果, 对分数阶神经网络模型 (1.1) 给出如下假设:
(H1) 激活函数 $f_j(\cdot)$ 满足 Lipschitz 条件, 即存在 $L_j>0$, 使得

$$\mid f_j(u)-f_j(v)\mid\leq L_j\mid u-v\mid,\qquad u,v\in R,\ j\in\aleph.$$

(H2) 对于 $c_i,\ a_{ij},\ \alpha_{ij},\ \beta_{ij}$ 和 L_j, 满足如下不等式 $(\breve{a}+\breve{\alpha}+\breve{\beta})\breve{L}<\hat{c}$.

3 分数阶模糊神经网络模型解的存在唯一性

为了讨论分数阶神经网络系统 (1.1) 解的存在性与唯一性, 先给出如下定理.
定理 3.1 如果假设 (H1) 和 (H2) 成立, 则系统 (1.1) 存在唯一的平衡点 x^*.
证 首先, 构造一个映射 $\Theta: R^n\rightarrow R^n$ 满足

$$\begin{aligned}
\Theta_i(u_i)\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mu_j+I_i+\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})+\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})\\
&\quad+\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j+\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j,\quad i\in\aleph,
\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $\Theta(u)=(\Theta_1(u_1),\Theta_2(u_2),\cdots,\Theta_n(u_n))^T$. 对于任意两个不同的向量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^T$ 和 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^T$, 有

$$\begin{aligned}
\|\Theta(u)-\Theta(v)\|\ &=\sum_{i=1}^{n}|\Theta_i(u_i)-\Theta_i(v_i)|\\
&=\sum_{i=1}^{n}\Bigg|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(f_j(\frac{u_j}{c_j})-f_j(\frac{v_j}{c_j})\right)+\left(\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})-\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(\frac{v_j}{c_j})\right)\\
&\quad+\left(\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})-\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})\right)\Bigg|\\
&\leq\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\left|f_j(\frac{u_j}{c_j})-f_j(\frac{v_j}{c_j})\right|+\left|\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})-\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(\frac{v_j}{c_j})\right|\right.\\
&\quad\left.+\left|\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})-\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\frac{u_j}{c_j})\right|\right].
\end{aligned}$$

根据引理 2.2 和假设 (H1), 可得

$$\begin{aligned}\|\Theta(u)-\Theta(v)\| &\le \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j\frac{|u_j-v_j|}{c_j}+\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\left|f_j(\tfrac{u_j}{c_j})-f_j(\tfrac{v_j}{c_j})\right|\right.\\&\quad\left.+\sum_{j=1}^{n}|\beta_{ij}|\left|f_j(\tfrac{u_j}{c_j})-f_j(\tfrac{v_j}{c_j})\right|\right]\\&\le \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j\frac{|u_j-v_j|}{c_j}+\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|L_j\frac{|u_j-v_j|}{c_j}+\sum_{j=1}^{n}|\beta_{ij}|L_j\frac{|u_j-v_j|}{c_j}\right]\\&\le \frac{(\check{a}+\check{\alpha}+\check{\beta})\check{L}}{\hat{c}}\sum_{j=1}^{n}|u_j-v_j|.\end{aligned}$$

从假设条件 (H2), 有

$$\|\Theta(u)-\Theta(v)\|\le\|u-v\|. \tag{3.2}$$

由 (3.2) 式可知 $\Theta: R^n\to R^n$ 是压缩映射. 故存在唯一不动点 $u^*\in R^n$ 使得 $\Theta(u^*)=u^*$. 即

$$\begin{aligned}u_i^* &= \sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(\tfrac{u_j^*}{c_j})+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mu_j+I_i+\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(\tfrac{u_j^*}{c_j})+\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(\tfrac{u_j^*}{c_j})\\&\quad+\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j+\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j,\quad i\in\aleph.\end{aligned}\tag{3.3}$$

设 $c_ix_i^*=u_i^*$, $i\in\aleph$, 有

$$\begin{aligned}0= &-c_ix_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mu_j+I_i+\bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(x_j^*)+\bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(x_j^*)\\&+\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j+\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j,\quad i\in\aleph.\end{aligned}\tag{3.4}$$

因为 u^* 是唯一的不动点, 因此分数阶系统 (1.1) 有唯一的平衡点 x^*.

定理 3.2 如果定理 3.1 中的假设成立, 且系统 (1.1) 的解 $x(t)\in C([0,T],R^n)$ 满足初始条件, 则系统 (1.1) 存在唯一解 $x(t)$.

证 证明与定理 3.1 类似, 略.

4 分数阶模糊神经网络模型的有限时间稳定性

本节应用定理 3.1 和定理 3.2 讨论分数阶神经网络系统 (1.1) 解的稳定性.

定理 4.1 当 $0.5\le\alpha<1$ 时, 如果假设 (H1) 和 (H2) 成立, 并且满足不等式

$$\sqrt{\frac{6+(3N+MN+2M)e^{(N+2)t}}{N+2}}<\frac{\varepsilon}{\delta},\quad 0<\varepsilon,\ 0<\delta<\varepsilon,\ t\in\mathbb{T}, \tag{4.1}$$

其中

$$M=\frac{3\Gamma(2\alpha-1)\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2(1-e^{-2\tau})}{4^{\alpha}\Gamma^2(\alpha)},\ N=\frac{6\Gamma(2\alpha-1)}{4^{\alpha}\Gamma^2(\alpha)}\left[\left(\check{c}+\check{L}\check{a}\right)^2+\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2\right],$$

则 (1.1) 式的唯一平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 关于 $\{t_0=0,\delta,\varepsilon,\mathbb{T}=[0,T],\tau\}$ 是有限时间稳定.

证　设 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^T$ 是系统 (1.1) 的任意解, 因此有

$$\begin{aligned}D^\alpha(x_i(t)-x_i^*)= & -c_i\left(x_i(t)-x_i^*\right)+\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(f_j(x_j(t))-f_j(x_j^*)\right)\\ & +\left(\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j))-\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j^*(t))\right)\\ & +\left(\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j))-\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j^*)\right).\end{aligned}$$

通过引理 2.1, 可得出如下方程

$$\begin{aligned}x_i(t)-x_i^* &= D^{-\alpha}\left[-c_i\left(x_i(t)-x_i^*\right)+\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(f_j(x_j(t))-f_j(x_j^*)\right)\right.\\ &\quad+\left(\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j))-\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j^*)\right)\\ &\quad\left.+\left(\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j))-\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j^*)\right)\right]\\ &= \phi_i(0)-x_i^*+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[-c_i\left(x_i(s)-x_i^*\right)\right.\\ &\quad+\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(f_j(x_j(s))-f_j(x_j^*)\right)\\ &\quad+\left(\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j(s-\tau_j))-\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j^*)\right)\\ &\quad\left.+\left(\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j(s-\tau_j))-\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j^*)\right)\right]ds.\end{aligned}$$

根据引理 2.2, 再由假设 (H1) 和范数 $\|\cdot\|$ 的性质, 显然有

$$\begin{aligned}&\|x(t)-x^*\|=\sum_{i=1}^n|x_i(t)-x_i^*|\\ \le\ & \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^n\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[c_i|x_i(s)-x_i^*|+\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\left|f_j(x_j(s))-f_j(x_j^*)\right|\right.\\ &\left.+\left|\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j(s-\tau_j))-\bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij}f_j(x_j^*)\right|+\left|\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j(s-\tau_j))-\bigvee_{j=1}^n \beta_{ij}f_j(x_j^*)\right|\right]ds\\ \le\ & \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^n\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[c_i\left|x_i(s)-x_i^*\right|+\sum_{j=1}^n|a_{ij}|L_j\left|x_j(s)-x_j^*\right|\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^n|\alpha_{ij}|L_j\left|x_j(s-\tau_j)-x_j^*\right|+\sum_{j=1}^n|\beta_{ij}|L_j\left|x_j(s-\tau_j)-x_j^*\right|\right]ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)\|x(s)-x^*\|+(\check{\alpha}+\check{\beta})\check{L}\,\|x(s-\tau_j)-x^*\|\right]ds\\
&= \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^s\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)e^{-s}\|x(s)-x^*\|\,ds\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^s\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)\check{L}e^{-s}\,\|x(s-\tau_j)-x^*\|\,ds. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

对 (4.2) 式应用 Cauchy-Schwartz 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|x(t)-x^*\|\\
&\leq \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{2\alpha-2}e^{2s}ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s)-x^*\|^2\,ds\right)^{1/2}\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{2\alpha-2}e^{2s}ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s-\tau_j)-x^*\|^2\,ds\right)^{1/2}\\
&= \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{2\alpha-2}e^{2s}ds\right)^{1/2}\left[\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s)-x^*\|^2\,ds\right)^{1/2}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^t\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s-\tau_j)-x^*\|^2\,ds\right)^{1/2}\right]. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

另一方面, 有

$$
\begin{aligned}
\int_0^t(t-s)^{2\alpha-2}e^{2s}ds &= \int_0^t z^{2\alpha-2}e^{2(t-z)}dz=e^{2t}\int_0^t z^{2\alpha-2}e^{-2z}dz\\
&= \frac{e^{2t}}{2^{2\alpha-1}}\int_0^{2t}u^{2\alpha-2}e^{-u}du<\frac{2e^{2t}}{4^\alpha}\Gamma(2\alpha-1). \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

把 (4.4) 式带入 (4.3) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|x(t)-x^*\|\\
&\leq \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{2e^{2t}}{4^\alpha}\Gamma(2\alpha-1)\right)^{1/2}\left[\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s)-x^*\|^2\,ds\right)^{1/2}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^t\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s-\tau_j)-x^*\|^2\,ds\right)^{1/2}\right]. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

把引理 2.3 中 $\lambda=2$ 和 $d=3$ 应用到 (4.5) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-x^*\|^2 &\leq 3\|\phi(0)-x^*\|^2+\frac{6e^{2t}\Gamma(2\alpha-1)}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s)-x^*\|^2\,ds\right.\\
&\quad\left.+\int_0^t\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s-\tau_j)-x^*\|^2\,ds\right)\\
&\leq 3\|\phi(0)-x^*\|^2+\frac{6e^{2t}\Gamma(2\alpha-1)}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2e^{-2s}\,\|x(s)-x^*\|^2\,ds\right.\\
&\quad\left.+\int_{-\tau_j}^t\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2\tau_j}e^{-2s}\,\|x(s)-x^*\|^2\,ds\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 3\|\phi(0)-x^*\|^2+\frac{6e^{2t}\Gamma(2\alpha-1)}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2\tau_j}\int_{-\tau_j}^{0}e^{-2s}\left\|x(s)-x^*\right\|^2ds\\
&\quad+\frac{6e^{2t}\Gamma(2\alpha-1)}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\left(\int_0^t\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2+\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2\tau_j}\right]e^{-2s}\left\|x(s)-x^*\right\|^2ds\right).
\end{aligned}
$$

因为当 $t\in[-\tau,0]$ 时, 有 $x(t)=\phi(t)$, 在结合范数 $|||\phi-x^*|||=\sup\limits_{t\in[-\tau,0]}\|\phi(t)-x^*\|$, 有

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-x^*\|^2\ &\leq\ \left[3+\frac{3e^{2t}\Gamma(2\alpha-1)\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2(1-e^{-2\tau_j})}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\right]|||\phi-x^*|||^2\\
&\quad+\frac{6e^{2t}\Gamma(2\alpha-1)}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2+\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2e^{-2\tau_j}\right]\int_0^te^{-2s}\left\|x(s)-x^*\right\|^2ds.
\end{aligned}\tag{4.6}
$$

根据 (4.6) 式, 可以有

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-x^*\|^2e^{-2t}\ &\leq\left[3e^{-2t}+\frac{3\Gamma(2\alpha-1)\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2(1-e^{-2\tau})}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\right]|||\phi-x^*|||^2\\
&\quad+\frac{6\Gamma(2\alpha-1)}{4^\alpha\Gamma^2(\alpha)}\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^2+\check{L}^2\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^2\right]\int_0^te^{-2s}\left\|x(s)-x^*\right\|^2ds\\
&\leq\left(3e^{-2t}+M\right)|||\phi-x^*|||^2+N\int_0^te^{-2s}\left\|x(s)-x^*\right\|^2ds.
\end{aligned}
$$

应用 Gronwall 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\|x(t)-x^*\|^2e^{-2t}\\
\leq\ &\left(3e^{-2t}+M\right)|||\phi-x^*|||^2+\int_0^tN\left(3e^{-2t}+M\right)|||\phi-x^*|||^2\exp\left(\int_s^tNdu\right)ds\\
=\ &\left(3e^{-2t}+M+\frac{3Ne^{Nt}-3Ne^{-2t}}{N+2}+Me^{Nt}-M\right)|||\phi-x^*|||^2\\
=\ &\frac{6e^{-2t}+(3N+MN+2M)e^{Nt}}{N+2}|||\phi-x^*|||^2.
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\|x(t)-x^*\|\leq\sqrt{\frac{6+(3N+MN+2M)e^{(N+2)t}}{N+2}}|||\phi-x^*|||.
$$

由此可知当 $|||\phi-x^*|||<\delta$ 时, 并且 (4.1) 式成立, 则 $\|x(t)-x^*\|<\varepsilon$. 根据定义 2.4, 可知系统 (1.1) 中当 $0.5\leq\alpha<1$ 时平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$ 关于 $\{t_0=0,\delta,\varepsilon,\mathbb{T}=[0,T],\tau\}$ 是有限时间稳定.

定理 4.2 当 $0<\alpha<0.5$ 时, 如果假设 (H1) 和 (H2) 成立, 并且满足不等式

$$
\sqrt[q]{\frac{q\cdot3^{q-1}+(3^{q-1}\tilde{N}+q\tilde{M}+\tilde{M}\tilde{N})e^{(\tilde{N}+q)t}}{q+\tilde{N}}}<\frac{\varepsilon}{\delta},\quad 0<\varepsilon,\ 0<\delta<\varepsilon\ t\in\mathbb{T},\tag{4.7}
$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= 3^{q-1}\left(\frac{\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\frac{\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q\left(1-e^{-q\tau}\right)}{q},\\ \tilde{N} &= 3^{q-1}\left(\frac{\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q+\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q\right],\end{aligned}$$

$p=1+\alpha,\ q=1+1/\alpha$, 则系统 (1.1) 的唯一平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$ 关于 $\{t_0=0,\delta,\varepsilon,\mathbb{T}=[0,T],\tau\}$ 是有限时间稳定.

证 类似于定理 4.1, 对系统 (1.1) 有如下估计

$$\begin{aligned}\|x(t)-x^*\| &\le \|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^s\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)e^{-s}\|x(s)-x^*\|ds\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^s\check{L}\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)e^{-s}\|x(s-\tau_j)-x^*\|ds.\end{aligned}\tag{4.8}$$

设 $p=1+\alpha$, $q=1+1/\alpha$, 显然, $p,q>1$ 且 $1/p+1/q=1$. 利用 Höder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}&\|x(t)-x^*\|\\ \le\ &\|\phi(0)-x^*\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{p\alpha-p}e^{ps}ds\right)^{1/p}\left[\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds\right)^{1/q}\right.\\ &\left.+\left(\int_0^t\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q e^{-qs}\|x(s-\tau_j)-x^*\|^q ds\right)^{1/q}\right].\end{aligned}\tag{4.9}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\int_0^t(t-s)^{p\alpha-p}e^{ps}ds &= e^{pt}\int_0^t u^{p\alpha-p}e^{-pu}du=\frac{e^{pt}}{p^{p(\alpha-1)+1}}\int_0^{pt}z^{p\alpha-p}e^{-z}dz\\ &< \frac{e^{pt}}{p^{p(\alpha-1)+1}}\Gamma(p(\alpha-1)+1).\end{aligned}\tag{4.10}$$

将 (4.10) 式代入 (4.9) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\|x(t)-x^*\|\\ &\le\|\phi(0)-x^*\|+\left(\frac{e^{pt}\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{1/p}\left[\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds\right)^{1/q}\right.\\ &\quad\left.+\left(\int_0^t\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q e^{-qs}\|x(s-\tau_j)-x^*\|^q ds\right)^{1/q}\right].\end{aligned}\tag{4.11}$$

把引理 2.3 中 $\lambda=q$ 和 $d=3$ 应用到 (4.11) 式, 可知

$$
\begin{aligned}
&\|x(t)-x^*\|^q\\
&\leq 3^{q-1}\|\phi(0)-x^*\|^q+3^{q-1}\left(\frac{e^{pt}\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\\
&\quad\times\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds+\int_0^t\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q e^{-qs}\|x(s-\tau_j)-x^*\|^q ds\right)\\
&\leq 3^{q-1}\|\phi(0)-x^*\|^q+3^{q-1}\left(\frac{e^{pt}\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\\
&\quad\times\left(\int_0^t\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds+\int_{-\tau_j}^t\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q e^{-q\tau_j}e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds\right)\\
&\leq\left[3^{q-1}+3^{q-1}\left(\frac{e^{pt}\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\frac{\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q(1-e^{-q\tau})}{q}\right]|||\phi-x^*|||^q\\
&\quad+3^{q-1}\left(\frac{e^{pt}\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q+\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q\right]\int_0^t e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds,
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&\|x(t)-x^*\|^q e^{-qt}\\
&\leq\left[3^{q-1}e^{-qt}+3^{q-1}\left(\frac{\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\frac{\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q(1-e^{-q\tau})}{q}\right]|||\phi-x^*|||^q\\
&\quad+3^{q-1}\left(\frac{\Gamma(p(\alpha-1)+1)}{\Gamma^p(\alpha)p^{p(\alpha-1)+1}}\right)^{q/p}\left[\left(\check{c}+\check{a}\check{L}\right)^q+\check{L}^q\left(\check{\alpha}+\check{\beta}\right)^q\right]\int_0^t e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds\\
&\leq\left(3^{q-1}e^{-qt}+\tilde{M}\right)|||\phi-x^*|||^q+\tilde{N}\int_0^t e^{-qs}\|x(s)-x^*\|^q ds.
\end{aligned}
$$

应用 Gronwall 不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
\|x(t)-x^*\|^q e^{-qt}&\leq\left(3^{q-1}e^{-qt}+\tilde{M}\right)|||\phi-x^*|||^q+\int_0^t\tilde{N}\left(3^{q-1}e^{-qt}+\tilde{M}\right)|||\phi-x^*|||^q e^{\tilde{N}(t-s)}ds\\
&\leq\frac{q\cdot 3^{q-1}e^{-qt}+\left(3^{q-1}\tilde{N}+q\tilde{M}+\tilde{M}\tilde{N}\right)e^{\tilde{N}t}}{q+\tilde{N}}|||\phi-x^*|||^q,
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\|x(t)-x^*\|\leq\sqrt[q]{\frac{q\cdot 3^{q-1}+(3^{q-1}\tilde{N}+q\tilde{M}+\tilde{M}N)e^{(\tilde{N}+q)t}}{q+\tilde{N}}}|||\phi-x^*|||. \tag{4.12}
$$

由此可知当 $|||\phi-x^*|||<\delta$ 且 (4.7) 式成立, 则 $\|x(t)-x^*\|<\varepsilon$, 根据定义 2.4, 可得出系统 (1.1) 中当 $0<\alpha<0.5$ 时平衡点 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$ 关于 $\{t_0=0,\delta,\varepsilon,\mathbb{T}=[0,T],\tau\}$ 是有限时间稳定.

5 数值仿真算法

因为大部分的分数阶微分方程不能求出解析解, 所以在研究分数阶微分方程时, 近似的数值方法是必要的. 在文献 [13] 中, 作者提出了一个数值算法 (预估方法) 求解分数阶微分方程. 该方法是 Adams-Bashforth-Moulton 的方法的推广, 考虑如下形式的分数阶微分方程

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = F(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{T},\ 0 < \alpha < 1,\ \mathbb{T} = [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

故方程 (5.1) 可以等价表示为

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s, x(s)) ds. \tag{5.2}$$

在本文中

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) = \ & -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}\mu_j + I_i + \bigwedge_{j=1}^n \alpha_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) \\ & + \bigvee_{j=1}^n \beta_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + \bigwedge_{j=1}^n T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^n H_{ij}\mu_j. \end{aligned}$$

设 $h = T/N$, $t_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \cdots, N \in Z^+$, 因此 (5.2) 式可写成

$$x_h(t_{k+1}) = x_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} F(t_{k+1}, X_h(t_{k+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{p=0}^k \bar{a}_{p,k+1} F(t_p, x_h(t_p)), \tag{5.3}$$

其中

$$\begin{aligned} X_h(t_{k+1}) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{p=0}^k \bar{b}_{p,k+1} F(t_p, x_h(t_p)), \quad \bar{b}_{p,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha}((k+1-p)^\alpha - (k-p)^\alpha), \\ \bar{a}_{p,k+1} &= \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(N+1)^\alpha, & p = 0, \\ (k-p+2)^{\alpha+1} + (k-p)^{\alpha+1} - 2(k-p+1)^{\alpha+1}, & 1 \le p \le k, \\ 1, & p = k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

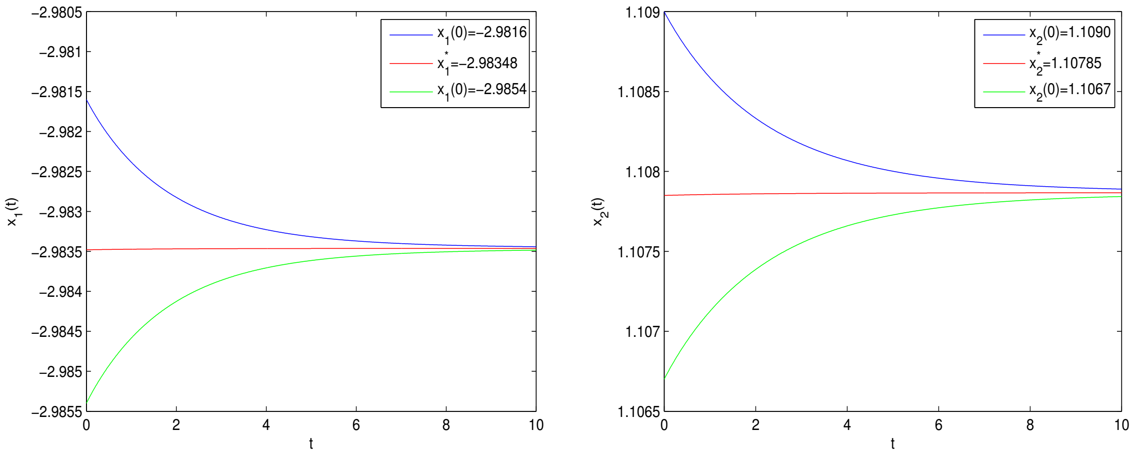
此数值方法的误差为 $\max\limits_{k=0,1,\cdots,N} |x(t_k) - x_h(t_k)| = O(h^{1+\alpha})$. 基于此方法, 给出分数阶模糊神经网络模型的数值解.

6 数值算例

本节将根据第 5 节的数值仿真算法, 并通过一个数值算例来验证本文理论结果的正确性和有效性.

考虑如下带有变时滞的分数阶模糊神经网络模型:

$$\begin{aligned} D^\alpha x_i(t) = \ & -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^2 a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{ij}\mu_j + I_i + \bigwedge_{j=1}^2 \alpha_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) \\ & + \bigvee_{j=1}^2 \beta_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j)) + \bigwedge_{j=1}^2 T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^2 H_{ij}\mu_j, \end{aligned} \tag{6.1}$$



(a) 不同初始值下 $x_1(t)$ 的状态轨迹. (b) 不同初始值下 $x_2(t)$ 的状态轨迹.

图 6.1 当 $\alpha = 0.98$ 和 $h = 0.01$ 时, 分数阶模糊神经网络系统 (6.1) 的状态轨迹.

其中 $\alpha = 0.98$, 并且有 $c_1 = 0.55$, $c_2 = 0.45$, $a_{11} = 0.4$, $a_{12} = -0.01$, $a_{21} = 0.01$, $a_{22} = 0.1$, $\alpha_{11} = -0.01$, $\alpha_{12} = -0.4$, $\alpha_{21} = -0.01$, $\alpha_{22} = -0.01$, $\beta_{11} = 0.01$, $\beta_{12} = -0.01$, $\beta_{21} = -0.1$, $\beta_{22} = 0.01$, $T_{11} = 0.02$, $T_{12} = 0.01$, $T_{21} = -0.01$, $T_{22} = 0.05$, $H_{11} = 0.06$, $H_{12} = 0.01$, $H_{21} = -0.01$, $H_{22} = 0.1$, $I_1 = -0.8$, $I_2 = 0.3$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.1$, $\tau_j = 0.5$, $f_2(x_2(t)) = \frac{1}{2}(\mid x_2(t) + 1 \mid + \mid x_2(t) - 1 \mid)$, $f_1(x_1) = \tanh(x_1)$.

显然, 可以得出激活函数 $f_j(x_j(t))$ $(j = 1, 2)$ 满足假设条件 (H1) 并且可得 $L_j = 1$ $(j = 1, 2)$. 选取 $\delta = 0.036$, $\varepsilon = 1$, 当 $\alpha = 0.98$ 时, 可以得到 $M = 0.131887442012802$, $N = 1.839513983297748$. 从不等式

$$\sqrt{\frac{6 + (3N + MN + 2M)e^{(N+2)t}}{N + 2}} < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

中可以估计出时间 $T = 1.6137$, 在根据定理 3.1 和定理 4.1 可知, 系统 (6.1) 有唯一的平衡点 $(x_1^*, x_2^*) = (-2.98348, 1.10785)$, 并且关于 $\{t_0 = 0, \delta = 0.036, \varepsilon = 1, \mathbb{T} = [0, 1.6137], \tau = 0.5\}$ 是有限时间稳定的. 根据第 5 节的数值仿真, 考虑如下情况.

情况 1 系统 (6.1) 的初始值为 $(x_1, x_2) = (-2.9816, 1.1090)$.

情况 2 系统 (6.1) 的初始值为 $(x_1^*, x_2^*) = (-2.98348, 1.10785)$.

情况 3 系统 (6.1) 的初始值为 $(x_1, x_2) = (-2.9854, 1.1067)$.

根据图 6.1 知当时间步长 $h = 0.01$ 时, 对于情况 1–3 可得出系统 (6.1) 的唯一平衡点是 $(x_1^*, x_2^*) = (-2.98348, 1.10785)$, 并关于 $\{t_0 = 0, \delta = 0.036, \varepsilon = 1, \mathbb{T} = [0, 1.6137], \tau = 0.5\}$ 是有限时间稳定的. 说明了理论结果的正确性.

参 考 文 献

[1] Shu X B, Lai Y, Chen Y. The existence of mild solutions for impulsive fractional partial differential

equations[J]. Nonl. Anal. TMA, 2011, 74: 2003–2011.

[2] Li C P, Deng W H. Remarks on fractional derivatives[J]. Appl. Math. Comput., 2007, 187: 777–784.

[3] Chen L P, Chai Y, Wu R C, Ma T D, Zhai H Z. Dynamic analysis of a class of fractional-order neural networks with delay[J]. Neurocomputing, 2013, 11: 190–194.

[4] 蒋和平, 蒋威. 一类非线性分数阶泛函微分方程正解的存在性 (英文)[J]. 数学杂志, 2014, 36(1): 43–50.

[5] Chen J, Zeng Z, Jiang P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. Neural Net., 2014, 51: 1–8.

[6] Yu J, Hu C, Jiang H. α-Stability and α-synchronization for fractional-order neural networks[J]. Neural Net., 2012, 35: 82–87.

[7] Li Y, Chen Y, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability[J]. Comput. Math. Appl., 2010, 59: 1810–1821.

[8] Delavari H, Baleanu D, Sadati J. Stability analysis of Caputo fractional-order nonlinear systems revisited[J]. Nonl. Dyn., 2012, 67: 2433–2439.

[9] Ke Y, Miao C. Stability analysis of fractional-order Cohen-Grossberg neural networks with time delay[J]. Int. J. Comput. Math., 2015, 92(6): 1102–1113.

[10] 刘可为, 蒋威. 分数阶中立型微分方程的有限时间稳定 (英文)[J]. 数学杂志, 2014, 34(1): 43–50.

[11] Yang L B, Wu C W, Chua L O. Fuzzy cellular neural networks: theory[J]. Proc. IEEE Intern. Work. Cell. Neural Net. Appl., 1996: 181–186.

[12] Kuczma M. An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 2009.

[13] Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. Nonl. Dyn., 2002, 29(1-4): 3–22.

EXISTENCE, UNIQUENESS AND FINITE TIME STABILITY OF FRACTIONAL ORDER FUZZY NEURAL NETWORKS WITH DELAY

HA Jin-cai, YANG Hong-fu, ZHANG Qi-min

(*School of Mathematics and Information Science, Beifang University for Nationalities, Yinchuan* 750021*, China*)

Abstract: In this paper, we introduce a class of fractional-order fuzzy neutral network system. According to Gronwall inequality, contraction mapping principle and the properties of fractional differential equation, the existence, uniqueness and finite time stability of fractional-order fuzzy neural networks with delay are researched. Finally, the numerical simulation is studied to illustrate the theory.

Keywords: fractional-order fuzzy neutral network; existence; uniqueness; finite time stability

2010 MR Subject Classification: 26A36; 35R11; 34D20; 60H15