

多重时滞富营养化生态模型的稳定性与分支分析

杨纪华^{1,2}, 刘 媚¹

(1. 宁夏师范学院数学与计算机科学学院, 宁夏 固原 756000)

(2. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875)

摘 要: 本文研究了多重时滞富营养化生态模型的稳定性与分支问题. 利用特征值方法, 分别研究了具有单时滞和双时滞模型的线性稳定性. 发现当模型中的时滞经过一系列临界值时, 模型在平衡点附近经历了 Hopf 分支和 Hopf-zero 分支, 并给出 Hopf 分支和 Hopf-zero 分支存在的充分条件. 最后数值模拟验证了理论结果.

关键词: 双时滞; 稳定性; Hopf 分支; Hopf-zero 分支

MR(2010) 主题分类号: 34C23

中图分类号: O175

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)06-1222-09

1 引言

水体的富营养化可以导致一系列严重问题, 比如生态完整性遭到破坏. 它的特点是藻类大量繁殖, 其它水生物大量减少. 浙江省温州市泽雅水库处于副热带地区, 由于藻类大量繁殖造成过滤系统堵塞, 导致数以百万计的人的饮用水危机. 水体富营养化的去除主要有物理化学和生物处理两种方法^[1]. 为了更好的控制水体富营养化等污染状态出现, 有必要对水体中生态系统进行研究^[2-4]. 泽雅水库富营养化过程与水体中的藻类数量密切相关, 同时也与水体中的滤食性鱼类(如鲢鱼和鳙鱼)相关. 为了能更好的应用生物学原理控制泽雅水库的富营养化, 基于文献[5], 于恒国, 赵敏等在文献[6]中考虑了两种滤食性鱼类鲢鱼和鳙鱼, 提出了一个新的模型如下

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{k}\right) - \frac{\alpha_1 \gamma x(t)y(t)}{\delta_1 + x(t) + \rho_1 y(t)} - \frac{\alpha_2 x(t)z(t)}{\delta_2 + x(t) + \rho_2 z(t)}, \\ \frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{e_1 \alpha_1 \gamma x(t-\tau_1)}{\delta_1 + x(t-\tau_1) + \rho_1 y(t)} - m_1\right)y(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} = \left(\frac{e_2 \alpha_2 \gamma x(t-\tau_2)}{\delta_2 + x(t-\tau_2) + \rho_2 z(t)} - m_2\right)z(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $x(t)$ 表示 t 时刻藻类的数量, $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别表示 t 时刻滤食性鱼类鲢鱼和鳙鱼的数量, r 表示藻类的内禀增长率, α_i ($i = 1, 2$) 分别表示鲢鱼和鳙鱼的投放率, e_i ($i = 1, 2$) 分别表示鲢鱼和鳙鱼转化为消费者的比率, k 表示 $x(t)$ 的承受力, δ_i ($i = 1, 2$) 分别表示鲢鱼和鳙鱼的饱和常数, ρ_i ($i = 1, 2$) 分别表示鲢鱼和鳙鱼的相互影响因子, m_i ($i = 1, 2$) 分别表示鲢鱼和鳙鱼的死亡率, γ 表示鲢鱼的相对优势, τ , τ_1 和 τ_2 是正时滞.

*收稿日期: 2015-02-10

接收日期: 2015-07-06

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11361046); 宁夏自然科学基金 (NZ13213); 宁夏高等学校科研项目 (宁教高 [2014]222 号 (17); 宁教高 [2014]222 号 (16)).

作者简介: 杨纪华 (1983-), 男, 河南周口, 讲师, 主要研究方向: 微分方程的稳定性与分支理论.

在文献 [6] 中, 作者给出了方程 (1.1) 的平衡点稳定的充分条件, 并用数值模拟的方法对方程 (1.1) 进行了详细的研究. 本文中取 $\tau_1 = \tau_2 = \sigma$, 从稳定性与分支的角度研究系统 (1.1), 对该系统的平衡点稳定性、Hopf 分支和 Hopf-zero 分支的存在性进行分析.

2 平衡点的稳定性和分支的存在性

显然, $S_0 = (0, 0, 0)$ 和 $S_1 = (k, 0, 0)$ 始终是系统 (1.1) 的平衡点. 平衡点 S_0 表示水体中藻类、鲢鱼和鳙鱼都不存在. 平衡点 S_1 表示水体中藻类存在, 而鲢鱼和鳙鱼不存在. 在一定条件下, 系统 (1.1) 还有其它平衡点.

(1) 当 $\gamma e_1 \alpha_1 > 0, k\gamma e_1 \alpha_1 > m_1(k + \delta_1)$ 时, 系统 (1.1) 存在平衡点 $S_2 = (x_2, y_2, 0)$, 其中

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-G_2 + \sqrt{G_2^2 - 4G_1G_3}}{2G_1}, y_2 = \frac{(\gamma e_1 \alpha_1 - m_1)x_2 - m_1\delta_1}{m_1\rho_1}, \\ G_1 &= r\rho_1 e_1, G_2 = k(\gamma e_1 \alpha_1 - r\rho_1 e_1 - m_1), G_3 = -km_1\delta_1. \end{aligned}$$

此时水体中只有藻类和鲢鱼存在, 鳙鱼不存在.

(2) 当 $e_2 \alpha_2 > m_2, ke_2 \alpha_2 > m_2(k + \delta_2)$ 时, 系统 (1.1) 存在平衡点 $S_3 = (x_3, 0, z_3)$, 其中

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-G_{12} + \sqrt{G_{12}^2 - 4G_{11}G_{13}}}{2G_{11}}, z_3 = \frac{(e_2 \alpha_2 - m_2)x_3 - m_2\delta_2}{m_2\rho_2}, \\ G_{11} &= r\rho_2 e_2, G_{12} = k(e_2 \alpha_2 - r\rho_2 e_2 - m_2), G_{13} = -km_2\delta_2. \end{aligned}$$

此时水体中只有藻类和鳙鱼存在, 鲢鱼不存在.

(3) 当

$$\begin{aligned} \gamma e_1 \alpha_1 &> m_1, e_2 \alpha_2 > m_2, k(m_1\delta_1 e_2 \alpha_2 + rm_2\delta_2 e_1 \rho_1) > \frac{r\rho_1 e_1 m_2^2 \delta_2^2}{e_2 \alpha_2 - m_2} + km_2\delta_2 \alpha_1 \gamma e_1, \\ k(\gamma m_2 \delta_2 e_1 \alpha_1 + rm_1\delta_1 e_2 \rho_2) &> \frac{r\rho_2 e_2 m_1^2 \delta_1^2}{\gamma e_1 \alpha_1 - m_1} + km_1\delta_1 \alpha_2 \gamma e_2 + km_1 m_2 (\delta_2 - \delta_1) \end{aligned}$$

时, 系统 (1.1) 存在平衡点 $S_4 = (x_4, y_4, z_4)$, 其中

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{-G_{22} + \sqrt{G_{22}^2 - 4G_{21}G_{23}}}{2G_{21}}, y_4 = \frac{(\gamma e_1 \alpha_1 - m_1)x_4 - m_1\delta_1}{m_1\rho_1}, \\ z_4 &= \frac{(e_2 \alpha_2 - m_2)x_4 - m_2\delta_2}{m_2\rho_2}, \\ G_{21} &= r\rho_1 \rho_2 e_1 e_2, G_{22} = k\rho_2 e_2 (\gamma e_1 \alpha_1 - m_1) + k\rho_1 e_1 (\alpha_2 e_2 - m_2) - kr\rho_1 \rho_2 e_1 e_2, \\ G_{23} &= -k(m_1\delta_1 \rho_2 e_2 + m_2\delta_2 \rho_1 e_1). \end{aligned}$$

此时水体中藻类同滤食性鱼类鲢鱼和鳙鱼共存.

不失一般性, 本文只讨论平衡点 S_4 . 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 处的特征方程为

$$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} + (c_1 \lambda + c_0)e^{-\lambda\sigma} = 0, \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_{11} - a_{22} - a_{33}, a_1 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}, a_0 = -a_{11}a_{22}a_{33}, b_2 = -b_{11}, \\ b_1 &= a_{33}b_{11} + a_{22}b_{11}, b_0 = -a_{22}a_{33}b_{11}, c_1 = -a_{12}b_{21} - a_{13}b_{31}, c_0 = a_{12}a_{33}b_{21} + a_{13}a_{33}b_{31}, \\ a_{11} &= \frac{\alpha_1\gamma e_1 x_4 y_4 - m_1^2 y_4 (\delta_1 + \rho_1 y_4)}{\alpha_1 \gamma e_1^2 x_4^2} + \frac{\alpha_2 e_2 x_4 z_4 - m_2^2 z_4 (\delta_2 + \rho_2 z_4)}{\alpha_2 e_2^2 x_4^2}, \\ a_{12} &= -\frac{m_1^2 (\delta_1 + x_4)}{\alpha_1 \gamma e_1^2 x_4}, a_{13} = -\frac{m_2^2 (\delta_2 + x_4)}{\alpha_2 \gamma e_2^2 x_4}, a_{22} = -\frac{\rho_1 m_1^2 y_4}{\alpha_1 \gamma e_1 x_4}, a_{33} = -\frac{\rho_2 m_2^2 z_4}{\alpha_2 e_2 x_4}, \\ b_{11} &= -\frac{rx_4}{k}, b_{21} = \frac{m_1^2 y_4 (\delta_1 + \rho_1 y_4)}{\alpha_1 \gamma e_1 x_4^2}, b_{31} = \frac{m_2^2 z_4 (\delta_2 + \rho_2 z_4)}{\alpha_2 e_2 x_4^2}. \end{aligned}$$

注 特征方程 (2.1) 是一个超越方程, 研究起来比较复杂. 据作者了解, 目前还没有研究类似于方程 (2.1) 的文献.

2.1 $\tau = 0, \sigma = 0$ 的情形

此时方程 (2.1) 变为

$$\lambda^3 + (a_2 + b_2)\lambda^2 + (a_1 + b_1 + c_1)\lambda + a_0 + b_0 + c_0 = 0. \quad (2.2)$$

根据微分方程的定性理论以及 Hurwitz 判据 [7], 可得如下引理.

引理 2.1 (i) 当 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$ 时, $\lambda = 0$ 是方程 (2.2) 的根; 当 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $a_1 + b_1 + c_1 > 0$, 且 $a_2 + b_2 > 0$ 时, 方程 (2.2) 有一个零根和两个具有负实部的根. 此时, 系统 (1.1) 经历了不动点分支;

(ii) 当 $a_2 + b_2 > 0$, $a_0 + b_0 + c_0 > 0$, $(a_2 + b_2)(a_1 + b_1 + c_1) > a_0 + b_0 + c_0$ 时, 方程 (2.2) 的所有根具有负实部.

作如下假设

$$(H1) \quad a_2 + b_2 > 0, a_0 + b_0 + c_0 > 0, (a_2 + b_2)(a_1 + b_1 + c_1) > a_0 + b_0 + c_0.$$

2.2 $\sigma = 0, \tau \neq 0$ 的情形

此时方程 (2.1) 变为

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + (a_1 + c_1)\lambda + a_0 + c_0 + (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.3)$$

显然, $i\beta$ ($\beta > 0$) 是方程 (2.3) 的根当且仅当 β 满足

$$\begin{cases} a_2\beta^2 - a_0 - c_0 = (b_0 - b_2\beta^2)\cos(\beta\tau) + b_1\beta\sin(\beta\tau), \\ \beta^3 - (a_1 + c_1)\beta = (b_0 - b_2\beta^2)\sin(\beta\tau) + b_1\beta\cos(\beta\tau). \end{cases} \quad (2.4)$$

平方相加, 并令 $\xi = \beta^2$ 可得

$$g(\xi) = \xi^3 + p\xi^2 + q\xi + r = 0, \quad (2.5)$$

其中

$$p = a_2^2 - b_2^2 - 2(a_1 + c_1), q = (a_1 + c_1)^2 + 2b_0b_2 - 2a_2(a_0 + c_0) - b_1^2, r = (a_0 + c_0)^2 - b_0^2.$$

引理 2.2 (i) 当 $r < 0$ 时, 方程 (2.5) 至少有一个正实根;
 (ii) 当 $r \geq 0$ 且 $p^2 \leq 3q$ 时, 方程 (2.5) 没有正实根;
 (iii) 当 $r \geq 0$ 且 $p^2 > 3q$ 时, 方程 (2.5) 有正实根的充要条件是 $z_* = \frac{-p+\sqrt{\Delta}}{3} > 0$ 且 $g(z_*) \leq 0$, 其中 $\Delta = p^2 - 3q$.

证 (i) 因为 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = \infty$, 所以当 $r < 0$ 时, 方程 (2.5) 至少有一个正实根.

(ii) 由 (2.5) 式可得 $\frac{dg(\xi)}{d\xi} = 3\xi^2 + 2p\xi + q$. 显然当 $\Delta < 0$ 时, 函数 $h(\xi)$ 在 $[0, \infty)$ 上单调增加, 所以当 $r > 0$ 且 $\Delta \leq 0$ 时, 方程 (2.5) 没有正实根.

(iii) 如果 $r \geq 0$ 且 $\Delta > 0$, $3\xi^2 + 2p\xi + q = 0$ 有两个实根 $z_* = \frac{-p+\sqrt{\Delta}}{3}$ 和 $\xi_* = \frac{-p-\sqrt{\Delta}}{3}$.

充分性 因为 $g''(z_*) = 2\sqrt{\Delta} > 0$, $g''(\xi_*) = -2\sqrt{\Delta} < 0$, 即 z_* 是 $g(\xi)$ 的极小值点, ξ_* 是 $g(\xi)$ 的极大值点. 又 $\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = \infty$, 所以当 $z_* > 0$ 且 $g(z_*) \leq 0$ 时, 方程 (2.5) 有正实根.

必要性 否则, 假设 $z_* \leq 0$ 或者 $z_* > 0$ 且 $g(z_*) > 0$. 因为函数 $g(\xi)$ 在 $[z_*, \infty)$ 上单调增加, 且 $g(0) = r > 0$, 所以当 $z_* \leq 0$ 时方程 (2.5) 无正实根. 矛盾. 因为 ξ_* 是 $g(\xi)$ 的极大值点, 所以 $g(z_*) < g(\xi_*)$, 且 $g(0) = r > 0$, 所以当 $z_* > 0$ 且 $g(z_*) > 0$ 时方程 (2.5) 无正实根. 矛盾. 引理 2.2 得证.

作如下假设

(H2) $r \geq 0, p^2 \leq 3q$;

(H3) $r < 0$;

(H4) $r \geq 0, p^2 > 3q, z_* = \frac{-p+\sqrt{p^2-3q}}{3} > 0$ 且 $g(z_*) \leq 0$.

不失一般性, 假设方程 (2.5) 有三个正实根 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 . 所以方程 (2.3) 有三个正实根 $\beta_k = \sqrt{\xi_k}$ ($k = 1, 2, 3$). 记

$$\tau_k^{(j)} = \frac{1}{\beta_k} \{ \arccos P + 2j\pi \} \quad k = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

其中

$$P = \frac{(b_1 - a_2 b_2) \beta_k^2 + (a_2 b_0 + b_2(a_0 + c_0) - b_1(a_1 + c_1)) \beta_k^2 - b_0(a_0 + c_0)}{b_2^2 \beta_k^4 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) \beta_k^2 + b_0^2}.$$

当 $\tau = \tau_k^{(j)}$ 时, 方程 (2.3) 有一对纯虚根 $\pm i\beta_k$. 令

$$\tau_0 = \tau_k^0 = \min_{k \in \{1, 2, 3\}} \{ \tau_k^{(0)} \}, \beta_0 = \beta_{k_0}.$$

引理 2.3 [8] 设

$$\begin{aligned} p(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, e^{-\lambda\tau_2}, \dots, e^{-\lambda\tau_m}) &= \lambda^n + p_1^{(0)} \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(0)} \lambda + p_n^{(0)} \\ &\quad + (p_1^{(1)} \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(1)} \lambda + p_n^{(1)}) e^{-\lambda\tau_1} + \dots \\ &\quad + (p_1^{(m)} \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}^{(m)} \lambda + p_n^{(m)}) e^{-\lambda\tau_m}, \end{aligned}$$

其中 $\tau_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $p_j^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 是常数, 则当 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ 变化时, $p(\lambda, e^{-\lambda\tau_1}, e^{-\lambda\tau_2}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})$ 位于右半平面的零点重数之和只有当虚轴上出现零点或有零点穿过虚轴时才发生变化.

由引理 2.2 和引理 2.3 可得下面引理.

引理 2.4 假设 (H1) 成立.

(i) 如果 (H2) 成立, 则当 $\tau \geq 0$ 时, 方程 (2.3) 的根都具有负实部;

(ii) 如果 (H3) 或 (H4) 成立, 则当 $\tau = \tau_k^{(j)}$ 时, 方程 (2.3) 有一对简单纯虚根 $\pm i\beta_k$, 且当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 方程 (2.3) 的根都具有负实部, 其中 $\tau_k^{(j)}$ 如 (2.6) 式定义.

由隐函数定理, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得当 $|\tau - \tau_k^{(j)}| < \varepsilon_0$ 时, 方程 (2.3) 有一对虚根 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm i\beta(\tau)$, 且满足 $\alpha(\tau_k^{(j)}) = 0$, $\beta(\tau_k^{(j)}) = \beta_k$ ($k = 1, 2, 3$).

引理 2.5 如果 $g'(\beta_k^2) \neq 0$, 则 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau} \neq 0$. 而且 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau} \neq 0$ 与 $g'(\beta_k^2)$ 有相同的符号.

证 把 $\lambda(\tau)$ 代入方程 (2.3) 并对 τ 求导可得

$$\left[\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}\right]^{-1} = \frac{3\beta_k^4 + 2(a_2^2 - 2(a_1 + c_1))\beta_k^2 + b_1^2 - 2a_2(a_0 + c_0)}{(\beta_k^3 - (a_1 + c_1)\beta_k)^2 + (a_0 + c_0 - a_2\beta_k^2)^2} - \frac{2b_2^2\beta_k^2 + b_1^2 - 2b_0b_2}{b_1^2\beta_k^2 + (b_0 - b_2\beta_k^2)^2}.$$

由 (2.4) 式可得

$$(\beta_k^3 - (a_1 + c_1)\beta_k)^2 + (a_0 + c_0 - a_2\beta_k^2)^2 = b_1^2\beta_k^2 + (b_0 - b_2\beta_k^2)^2.$$

因此

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}\right]^{-1} &= \operatorname{Re}\left[\frac{3\beta_k^2 + 2(a_2^2 - b_2^2 - 2(a_1 + c_1))\beta_k^2 + (a_1 + c_1)^2 + 2b_0b_2 - 2a_2(a_0 + c_0) - b_1^2}{b_1^2\beta_k^2 + (b_0 - b_2\beta_k^2)^2}\right] \\ &= \frac{g'(\beta_k^2)}{b_1^2\beta_k^2 + (b_0 - b_2\beta_k^2)^2}. \end{aligned}$$

显然, $\left[\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}\right]^{-1}$ 与 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}$ 符号相同. 所以当 $g'(\beta_k^2) \neq 0$ 时, $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau} \neq 0$. 而且 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau_k^{(j)})}{d\tau}$ 与 $g'(\beta_k^2)$ 符号相同. 引理 2.5 得证.

定理 2.1 假设 (H1) 成立.

(i) 如果 (H2) 成立, 则当 $\tau \geq 0$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的;

(ii) 如果 (H3) 或者 (H4) 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的. 而且如果 $g'(\beta_k^2) \neq 0$, 则当 $\tau = \tau_k^{(j)}$ 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 处经历了 Hopf 分支.

证 由引理 2.3 可得 (i) 和 (ii) 的前半部分正确. 由文献 [9] 中关于泛函微分方程的 Hopf 分支定理可得 (ii) 的后半部分正确. 定理 2.1 得证.

引理 2.6 如果 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $a_1 + b_1 + c_1 > 0$, $a_2 + b_2 > 0$, 并且 (H4) 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 方程 (2.3) 除了有一个零根外, 其余根都具有负实部.

证 因为 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, 所以 0 是方程 (2.3) 的根. 由引理 2.4 可知, 方程 (2.3) 没有纯虚根.

用反证法. 令 $a_0 + b_0 + c_0 = a$, 假设存在 $\tau^* \in (0, \tau_0)$ 使得方程 (2.3) 有实部为正的根, 记为 $\lambda_0 = v_0 + i\zeta_0$, 设 $\lambda(a, \tau) = v(a, \tau) + i\zeta(a, \tau)$ 是方程 (2.3) 的根, 且满足 $v(a = 0, \tau^*) = v_0 > 0$, $\zeta(a = 0, \tau^*) = \zeta_0$. 因为 $v(a, \tau)$ 关于 a 连续, 则存在 $\kappa_1 > 0$, 当 $a \in (0, \kappa_1)$ 时, $v(a, \tau^*) > 0$. 又 $\lim_{a \rightarrow 0} \tau_0(a) = \tau_0$, 所以对 $0 < \gamma_0 \leq \tau_0 - \tau^*$, 存在 $\kappa_2 > 0$, 当 $a \in (0, \kappa_2)$ 时, 使得 $|\tau_0(a) - \tau_0| < \gamma_0$, 进而可得 $\tau^* \in (0, \tau_0(a))$. 取 $\kappa = \min \kappa_1, \kappa_2$, 则当 $a \in (0, \kappa)$ 时, $v(a, \tau^*) > 0$ 且 $\tau^* \in (0, \tau_0(a))$. 又由引理 2.4, 当 $a \in (0, \kappa)$ 方程 (2.3) 的根都具有负实部. 这是一个矛盾. 引理 2.6 得证.

定理 2.2 如果 $a_0 + b_0 + c_0 = 0, a_1 + b_1 + c_1 > 0, a_2 + b_2 > 0$, 并且 (H4) 成立, 则当 $\tau = \tau_0$ 时, 方程 (2.3) 除了有一个零根和一对纯虚根 $\pm i\beta_0$ 外, 其余根都具有负实部. 此时系统 (1.1) 在平衡点 S_4 处经历了 Hopf-zero 分支.

证 因为 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, 所以 0 是方程 (2.3) 的根. 由引理 2.4 可知 $\pm i\beta_0$ 也是方程 (2.3) 根. 假设当 $\tau = \tau_0$ 时, 方程 (2.3) 有一个根具有正实部, 记为 $\lambda_0 = v_0 + i\zeta_0$. $\lambda(\tau) = v(\tau) + i\zeta(\tau)$ 是方程 (2.3) 的根, 且满足 $v(\tau_0) = v_0 > 0, \zeta(\tau_0) = \zeta_0$. 因此当 $\tau \rightarrow \tau_0^-$ 时, 方程 (2.3) 有具有正实部的根, 这与引理 2.6 矛盾. 定理 2.2 得证.

2.3 $\tau \neq 0, \sigma \neq 0$ 的情形

本小节中, 固定 τ , 以 σ 为参数, 且 τ 取值于使方程 (2.3) 的根都具有负实部的区间. 设 $i\omega (\omega > 0)$ 是方程 (2.1) 的根, 则可得

$$\begin{cases} c_0 \cos(\omega\sigma) + c_1 \omega \sin(\omega\sigma) = a_2 \omega^2 - a_0 - (b_0 - b_2 \omega^2) \cos(\omega\tau) - b_1 \omega \sin(\omega\tau), \\ -c_0 \sin(\omega\sigma) + c_1 \omega \cos(\omega\sigma) = \omega^3 - a_1 \omega + (b_0 - b_2 \omega^2) \sin(\omega\tau) - b_1 \omega \cos(\omega\tau). \end{cases} \quad (2.7)$$

把 (2.7) 式中两个方程平方相加可得

$$\begin{aligned} F(\omega) = & \omega^6 + (a_2^2 + b_2^2 - 2a_1)\omega^4 + (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - 2a_0a_2 - 2b_0b_2)\omega^2 + a_0^2 + b_0^2 - c_0^2 \\ & + 2[(a_2b_2 - b_1)\omega^4 + (a_1b_1 - a_2b_0 - a_0b_2)\omega^2 - a_0b_0] \cos(\omega\tau) \\ & + 2[-b_2\omega^5 + (a_1b_2 + b_0 - a_2b_1)\omega^3 + (a_0b_1 - a_1b_0)\omega] \sin(\omega\tau) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

假设方程 (2.8) 有有限个正根 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$. 则与每个 $\omega_k (k = 1, 2, \dots, s)$ 相对应的 $\sigma_k^{(j)}$ 为

$$\sigma_k^{(j)} = \frac{1}{\omega_k} (2j\pi + \arccos Q), k = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

其中

$$Q = \frac{c_1[\omega_k^4 - a_1\omega_k^2 + (b_0 - b_2\omega_k^2)\omega_k \sin(\omega_k\tau)] + c_0[a_2\omega_k^2 - a_0 - (b_0 - b_2\omega_k^2) \cos(\omega_k\tau) - b_1\omega_k \sin(\omega_k\tau)]}{c_0^2 + c_1^2\omega_k^2},$$

则 $(\omega_k, \sigma_k^{(j)})$ 是方程 (2.7) 的根. 由此可得如下引理 2.7.

引理 2.7 当 $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 方程 (2.2) 有一对纯虚根 $\pm i\omega_k$, 其中 $\sigma_k^{(j)}$ 如 (2.9) 式所定义.

定义

$$\sigma_0 = \min\{\sigma_k^{(j)}, k = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, 2, \dots\},$$

并记与之相对应的 ω_j 为 ω_0 . 假设 $\lambda(\sigma) = \alpha(\sigma) + i\omega(\sigma)$ 是特征方程 (2.1) 在 $\sigma = \sigma_k^{(j)}$ 附近的根, 且满足 $\alpha(\sigma_0) = 0, \omega(\sigma_0) = \omega_0$.

引理 2.8 如果 $AC + BD \neq 0$, 则 $\operatorname{Re} \frac{d\lambda(\sigma_k^{(j)})}{d\sigma} \neq 0$, 且 $\operatorname{Re} \frac{d\lambda(\sigma_k^{(j)})}{d\sigma}$ 与 $AC + BD$ 的符号相同,

其中

$$\begin{aligned} A &= c_0\omega_k \sin(\omega_k\sigma_k) - c_1\omega_k^2 \cos(\omega_k\sigma_k), B = c_0\omega_k \cos(\omega_k\sigma_k) + c_1\omega_k^2 \sin(\omega_k\sigma_k), \\ C &= -3\omega_k^2 + a_1 + (c_1 - c_0\sigma_k) \cos(\omega_k\sigma_k) - c_1\omega_k\sigma_k \sin(\omega_k\sigma_k) \\ &\quad + (b_1 - \tau(b_0 - b_2\omega_k^2)) \cos(\omega_k\tau) + (2b_2 - \tau b_1)\omega_k \sin(\omega_k\tau), \\ D &= 2a_2\omega_k - c_1\omega_k\sigma_k \cos(\omega_k\sigma_k) - (c_1 - c_0\sigma_k) \sin(\omega_k\sigma_k) \\ &\quad + (2b_2 - \tau b_1)\omega_k \cos(\omega_k\tau) - (b_1 - \tau(b_0 - b_2\omega_k^2)) \sin(\omega_k\tau). \end{aligned}$$

证 方程 (2.1) 两端同时关于 σ 求导可得

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\lambda(c_1\lambda + c_0)e^{-\lambda\sigma}}{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 + (b_1 + 2b_1\lambda - (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)\tau)e^{-\lambda\tau} + (c_1 - (c_1\lambda + c_0)\sigma)e^{-\lambda\sigma}}.$$

通过直接而繁琐的计算可得

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(\sigma_k^{(j)})}{d\sigma} = \operatorname{Re} \frac{C + Di}{A + Bi} = \frac{AC + BD}{A^2 + B^2}.$$

因为 $AC + BD \neq 0$, 所以 $\operatorname{Re} \frac{d\lambda(\sigma_k^{(j)})}{d\sigma} \neq 0$, 且 $\operatorname{Re} \frac{d\lambda(\sigma_k^{(j)})}{d\sigma}$ 与 $AC + BD$ 的符号相同. 引理 2.8 得证.

由本文引理 2.1 至引理 2.8 和文献 [9] 中第 11 章的定理 1.1, 可以得到下面关于系统 (1.1) 的平衡点的稳定性与 Hopf 分支的存在性定理.

定理 2.3 假设 (H1) 成立,

(i) 如果 (H2) 成立且 $F(\omega)$ 没有正根, 则当 $\sigma \geq 0$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的; 如果 (H2) 成立且 $F(\omega)$ 有正根, 则当 $\sigma \in [0, \sigma_0)$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的; 在后一种情况, 如果 $AC + BD \neq 0$, 则当 $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 处经历了 Hopf 分支.

(ii) 如果 (H3) 或 (H4) 成立, $\tau \in [0, \tau_0)$, 且 $F(\omega)$ 没有正根, 则当 $\sigma \geq 0$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的; 如果 (H3) 或 (H4) 成立, $\tau \in [0, \tau_0)$, 且 $F(\omega)$ 有正根, 则当 $\sigma \in [0, \sigma_0)$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的; 在后一种情况, 如果 $AC + BD \neq 0$, 则当 $\sigma = \sigma_k^{(j)} (k = 1, 2, \dots, s; j = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 处经历了 Hopf 分支.

综合上面的讨论可得关于系统 (1.1) 的 Hopf-zero 分支的存在定理.

定理 2.4 假设 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $a_1 + b_1 + c_1 > 0$, $a_2 + b_2 > 0$, 且方程 (2.8) 至少有一个正实根 $\omega_k (k = 1, 2, \dots, s)$,

(i) 如果 (H2) 成立, 则当 $\sigma = \sigma_0$ 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 附近经历了 Hopf-zero 分支;

(ii) 如果 (H4) 成立, $\tau \in [0, \tau_0)$, 则当 $\sigma = \sigma_0$ 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 附近经历了 Hopf-zero 分支.

证 因为 $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, 所以 0 是方程 (2.1) 的根. 由引理 2.7 可得, $\pm i\sigma_0$ 是方程 (2.1) 的一对纯虚根. 类似于定理 2.2 的证明可得, 当 $\sigma = \sigma_0$ 时, 方程 (2.1) 除了一个零根和一对纯虚根 $\pm i\sigma_0$ 外, 其余根均具有负实部, 即系统 (1.1) 在平衡点 S_4 附近经历了 Hopf-zero 分支. 定理 2.4 得证.

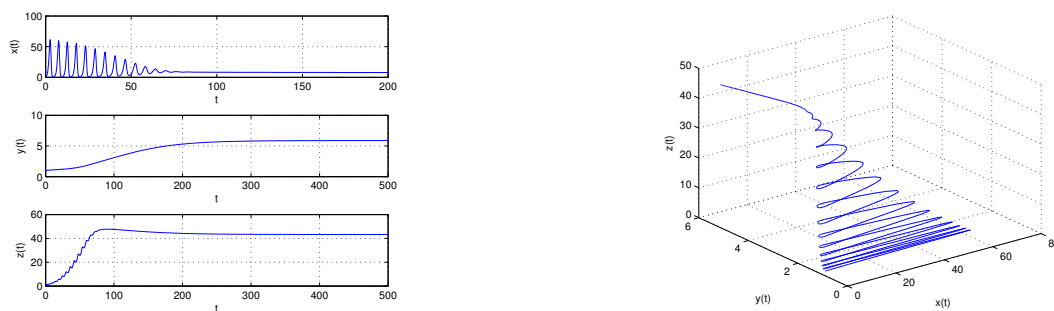


图 1: 当 $\tau = 1.01$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 局部渐近稳定.

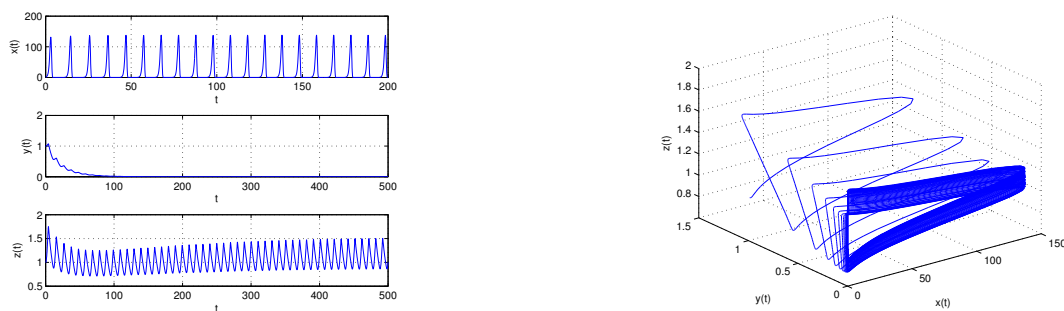


图 2: 当 $\tau = 1.4$ 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 附近经历了 Hopf 分支.

3 数值模拟

为了研究具多重时滞水体富营养化生态模型的复杂动力学行为, 本文应用微分方程的稳定性和分支理论得到了平衡点的稳定性区域和周期解存在的充分条件. 为了说明理论结果的正确性, 下面进行数值模拟.

参照文献 [6] 中的数据, 取 $r_1 = 2.1$, $k = 20$, $e_1 = 0.45$, $e_2 = 0.5$, $a_1 = 0.8$, $a_2 = 0.6$, $\beta = 0.35$, $b_1 = 0.25$, $b_2 = 2.5$, $c_1 = 0.25$, $c_2 = 0.55$, $m_1 = m_2 = 1$. 通过计算知 (H1) 和 (H3) 满足, $g(\xi)$ 有一个正根 $\xi_1 \approx 1.18$, 所以 $\beta_1 \approx 1.0861$, $g'(\beta_1^2) > 0$. 由 (2.6) 式和引理 2.5 可得

$$\tau_j = 1.409 + 5.7851j, \frac{\operatorname{Re}\lambda(\tau_j)}{d\tau} > 0, j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

所以计算可得 $\tau_0 = 1.409$. 因此由定理 2.1 和 (3.1) 式可得如下结论.

结论 3.1 假设 τ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) 如 (3.1) 式定义,

- (i) 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 系统 (1.1) 的平衡点 S_4 是局部渐近稳定的 (如图 1 所示);
- (ii) 当 $\tau = \tau_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) 时, 系统 (1.1) 在平衡点 S_4 处经历了 Hopf 分支 (如图 2 所示).

4 结论

本文研究了基于浙江省温州市泽雅水库的双时滞富营养化生态模型. 通过对系统线性化方程的特征方程根的分布分析入手, 得出了系统的线性稳定性区域, 当时滞经历一系列临界

值时, 系统经历了 Hopf 分支和 Hopf-zero 分支. 本文研究表明, 时滞在系统 (1.1) 的复杂动力学行为中起了重要作用, 时滞可以使得藻类和滤食性鱼类 (鲢鱼和鳙鱼) 在稳定状态下共存. 即时滞对生态种群的稳定性有积极影响.

参 考 文 献

- [1] Lee C G, Fletcher T D, Sun G Z. Nitrogen removal in constructed wetland systems[J]. Eng. Life Sci., 2009, 9: 11–22.
- [2] Shukla J B, Misra A K, Chandra P. Mathematical modeling and analysis of the depletion of dissolved oxygen in eutrophied water bodies affected by organic pollutants[J]. Nonl. Anal.: Real World Appl., 2008, 9: 1851–1865.
- [3] Alvarez L J, Fernandez F J, Munoz R. Mathematical analysis of a three-dimensional eutrophication model[J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 349: 135–155.
- [4] 张艳红. 三种群的竞争系统全局解的一致有界性 [J]. 数学杂志, 2012, 32(6): 1129–1135.
- [5] Xiu P, Liu J. Practical success of biomanipulation using filter-feedings fish to control cyanobacteria blooms a synthesis of decades of research and application in a subtropical hypertrophic lake[J]. Sci. World, 2001, 1: 337–356.
- [6] Yu H G, Zhao M, Agarwal R P. Stability and dynamics analysis of time delayed eutrophication ecological model based upon the Zeya reservoir[J]. Math. Comput. Simul., 2014, 97: 53–67.
- [7] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [8] Ruan S, Wei J. On the zeros of transcendental functions to stability of delay differential equations with two delays[J]. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. A Math. Anal., 2003, 10: 863–874.
- [9] Hale J K, Lunel S V. Introduction to functional differential equation[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

STABILITY AND BIFURCATION ANALYSIS OF MULTIPLE TIME DELAY EUTROPHICATION ECOLOGICAL MODEL

YANG Ji-hua^{1,2}, LIU Mei¹

(1.School of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China)

(2.School of Mathematical Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: In this paper, the stability and bifurcation problem of eutrophication ecological model with two time delays is studied. By using the eigenvalue method, we study the linear stabilities with one delay and two delays, respectively. It is found that Hopf bifurcations and Hopf-zero bifurcations exist at the equilibriums when the delays pass through a sequence of critical values. The sufficient conditions of the existence of Hopf bifurcation and Hopf-zero Bifurcation are obtained. In the end, some numerical simulations are carried out for supporting the analytic results.

Keywords: two time delays; stability; Hopf bifurcation; Hopf-zero bifurcation

2010 MR Subject Classification: 34C23