Vol. 36 (2016)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

预解算子控制的无穷时滞分数阶微分方程解的存在性

陈丽珍[1], 凡震彬[2], 李 刚[3]

(1. 山西财经大学应用数学学院, 山西 太原 030006)
(2. 常熟理工学院数学与统计学院, 江苏 苏州 215500)
(3. 扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘 要: 本文研究了一类预解算子控制的具有无穷时滞的分数阶泛函微分方程. 利用解析预解算子理论和不动点定理, 得到了具有无穷时滞分数阶微分方程适度解的存在性, 推广和改进了一些已知的结果.

关 键 词: 预解算子; 分数阶微分方程; 无穷时滞; 适度解
MR(2010) **主题分类号**: 34K50; 34K30 **中图分类号**: O175.12
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)06-1215-07

1 引言

近年来, 由于在物理学、机械、化学、生态和工程等领域中的重要应用, 分数阶微分方程得到了很多研究者的极大关注, 关于这方面的工作见文 [1–8]. 上述工作中发展方程中的算子 A 是一个闭的线性算子并且生成经典的 C_0 半群. 然而, 当考虑算子 A 生成预解算子时, 这方面的工作还很少见. 主要困难来源于预解算子没有半群很好的性质, 包括紧预解算子范数的一致连续性. 幸运的是, 不仅证明了解析预解算子范数的一致连续性而且给出了解析预解算子的紧性刻划. 这方面的工作可以参阅文 [9]. 有关无穷时滞泛函微分方程的研究始于 20 世纪 70 年代, 由于这类方程能更真实反映事物的客观变化过程, 故受到人们广泛的关注, 且有了丰富的研究成果 [10–14].

前人文章中处理的无穷时滞情形主要考虑的是算子 A 生成 C_0 半群, 而对预解算子理论涉足的比较少. 本文主要讨论如下由预解算子控制的具有无穷时滞分数阶泛函微分方程解的存在性:

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t) + J_t^{1-\alpha} f(t, x_t), \quad t \in J = [0, b], \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B}_h, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $A : D(A) \subseteq X \to X$ 生成紧的解析预解算子 $S_\alpha(t)$, $t \geq 0$, D_t^α 为 Caputo 分数阶导数, $J_t^{1-\alpha}$ 为 $1-\alpha$ 阶分数积分; $f : [0, b] \times \mathcal{B} \to X$, $\varphi \in \mathcal{B}$ 为给定函数. 时滞函数 $x_t : (-\infty, 0] \to X$ 定义为 $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in (-\infty, 0]$, 这里 $x_t(\cdot)$ 表示时刻 t 以前的历史状态. 本文总假定 x_t 属于某抽象相空间 $\mathcal{B}$.

*收稿日期: 2014-04-22 接收日期: 2015-05-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11001034; 11271316); 山西财经大学青年基金 (Z06045).
作者简介: 陈丽珍 (1982–), 女, 山西太原, 讲师, 主要研究方向: 泛函分析.

2 预备知识

本文总假定 X 为一个 Banach 空间, 并赋予通常意义下的范数 $\|\cdot\|$, $C([0,b],X)$ 表示定义在区间 $[0,b]$ 取值于 X 上的连续函数空间, 按范数 $\|x\|=\sup\{\|x(t)\|, t\in[0,b]\}$ 构成 Banach 空间, $L^p([0,b],X)$ 表示定义在区间 $[0,b]$ 取值于 X 上的 Bochner 可积函数全体, 定义 $\|f\|_{L^p}=(\int_0^b\|f(t)\|^p\,\mathrm{d}t)^{1/p}$, 其中 $1\le p<\infty$, $L(X)$ 表示一切从 X 到 X 的有界线性算子的全体.

在无穷时滞系统的研究中, 相空间的选取是非常重要的. 本文主要采用 HALE 和 KATO [15] 的公理化定义, 相关术语可参阅文献 [16].

定义 2.1 相空间 $\mathcal{B}$ 是由 $(-\infty,b]$ 到 X 的一些函数构成的集合, 赋予半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ 满足下列公理.

A1: 若 $x:(-\infty,\sigma+b]\to X$, $b>0$, 使得 $x_\sigma\in\mathcal{B}$, $x|_{[\sigma,\sigma+b]}$ 连续, 则 $\forall t\in[\sigma,\sigma+b]$, 下列条件成立: $x_t\in\mathcal{B}$, $\|x(t)\|\le H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$, $\|x_t\|_{\mathcal{B}}\le K(t-\sigma)\sup\{\|x(s)\|:\sigma\le s\le t\}+M(t-\sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$, 其中 $H>0$ 是一个常数, $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续, $M:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 局部有界, $H,K(\cdot),M(\cdot)$ 均独立于 $x(\cdot)$;

A2: 对 A1 中的函数 $x(\cdot)$, 映射 $t\in[\sigma,\sigma+b]\to x_t\in\mathcal{B}$ 连续;

A3: 空间 $\mathcal{B}$ 是完备的.

定义 2.2 设 $f\in L^1([0,b],X)$, $t\ge 0$, 对任意的 $0<\alpha<1$, 称

$$J_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\,\mathrm{d}s$$

为 $f(t)$ 的 α 阶分数积分, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数.

定义 2.3 设 $f:[0,b]\to X$ 是绝对连续的, 对任意的 $0<\alpha<1$, 称

$$D^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}f^{(1)}(s)\,\mathrm{d}s$$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶 Caputo 导数.

定义 2.4 设 X 是 Banach 空间, $\{S_\alpha(t),t\ge 0\}$ 为 X 上的有界线性算子族, 如果满足

(S1) $S_\alpha(t)$ 在 R^+ 上强连续, 且 $S_\alpha(0)=I$;

(S2) 对任意的 $x\in D(A)$, $t\ge 0$, 有 $S_\alpha(t)D(A)\subseteq D(A)$, $AS_\alpha(t)x=S_\alpha(t)AX$;

(S3) 对任意的 $x\in D(A)$, $t\ge 0$, 如下积分方程成立

$$S_\alpha(t)x=x+\int_0^t g_\alpha(t-s)AS_\alpha(s)x\,\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

其中 $g_\alpha(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ $(t>0)$, 则称 $\{S_\alpha(t),t\ge 0\}$ 为由 A 生成的预解算子族.

注 因为 A 是空间 X 上的闭稠定线性算子, 因此容易验证对任意的 $x\in X$, 积分方程 (2.1) 成立.

定义 2.5 设 $\sum(\omega,\theta):=\{\lambda\in C:|\arg(\lambda-\omega)|<\theta\}$. 若函数 $S_\alpha(\cdot):R^+\to L(X)$ 可以解析地延拓到 $\sum(0,\theta_0)$, $0<\theta_0\le\pi/2$, 则称 $S_\alpha(t)$ 为解析的预解算子; 若对任意的 $\theta<\theta_0$, $\omega>\omega_0$, 存在常数 $M_1=M_1(\omega,\theta)$ 使得 $\|S(z)\|\le M_1e^{\omega\mathrm{Re}z}$, $z\in\sum(0,\theta)$, 其中 $\mathrm{Re}z$ 代表 z 的实部, 则称预解算子 $S_\alpha(t)$ 为 (ω_0,θ_0) 解析型的.

定义 2.6 若预解算子 $S_\alpha(t)$, $t>0$ 是紧的, 则称 $S_\alpha(t)$ 是一个紧算子.

引理 2.1 [9] 设 $S_\alpha(t)$ 是 (ω_0,θ_0) 型的紧的解析预解算子, 则

(i) $\lim\limits_{h\to 0}\|S_\alpha(t+h)-S_\alpha(t)\|=0$, $t>0$;

(ii) $\lim\limits_{h\to 0^+}\|S_\alpha(t+h)-S_\alpha(h)S_\alpha(t)\|=0$, $t>0$;

(iii) $\lim\limits_{h\to 0^+}\|S_\alpha(t)-S_\alpha(h)S_\alpha(t-h)\|=0$, $t>0$.

本文总假定 $0<\alpha<1$, $g_\alpha(t)=t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, $t>0$, A 为 X 上的闭稠定线性算子. 考虑如下分数阶微分方程

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= Ax(t)+J_t^{1-\alpha}f(t), \quad 0<t\le b, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

假设 $x_0\in X$, $f\in L^1([0,b],X)$, x 是问题 (2.2) 的解, 则

$$x(t)=S_\alpha(t)x_0+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0\le t\le b. \tag{2.3}$$

事实上, 如果 x 满足方程 (2.2), 则对任意的 $0\le t\le b$, $x(t)=x_0+A(g_\alpha*x)(t)+\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$. 由预解算子的定义有

$$\begin{aligned} 1*x &= (S_\alpha-Ag_\alpha*S_\alpha)*x=S_\alpha*x-S_\alpha*(Ag_\alpha*x) \\ &= S_\alpha*(x_0+1*f)=S_\alpha*x_0+1*S_\alpha*f, \end{aligned}$$

即 (2.3) 式成立.

3 主要结果

根据 (2.3) 式, 可以给出如下适度解的定义.

定义 3.1 一个函数 $x:(-\infty,b]\to X$ 如果满足下列条件: $x_0=\varphi$; $x|_{[0,b]}$ 连续; 且

$$x(t)=S_\alpha(t)\varphi(0)+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,x_s)\,\mathrm{d}s, \quad 0\le t\le b,$$

则称函数 x 为无穷时滞方程 (1.1) 的一个适度解.

以下记 $K_b=\sup\limits_{0\le t\le b}K(t), M_b=\sup\limits_{0\le t\le b}M(t)$. 假设下列条件成立.

(H1) (ω_0,θ_0) 型的解析预解算子 $S_\alpha(t)$ 是紧的, 且 $M=\sup\limits_{t\in[0,b]}\|S_\alpha(t)\|<+\infty$;

(H2) 函数 $f:J\times\mathcal{B}\to X$ 满足如下条件

(i) 对任意的 $\varphi\in\mathcal{B}$, 函数 $f(\cdot,\varphi):J\to X$ 为强可测的,

(ii) 对任意的 $t\in J$, 函数 $f(t,\cdot):\mathcal{B}\to X$ 为连续的,

(iii) 对任意的正数 r, 存在函数 $\rho_r\in L^1(J,R^+)$, 使得对几乎处处的 $t\in J$,

$$\sup_{\|v\|_{\mathcal{B}}\le r}\|f(t,v)\|\le\rho_r(t), \qquad \liminf_{r\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^b\rho_r(t)\,\mathrm{d}t}{r}=\sigma<\infty.$$

定理 3.1 设假设条件 (H1)–(H2) 成立, 且 $M\sigma K_b<1$, 则无穷时滞微分方程 (1.1) 至少有一个适度解.

证 令

$$y(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in(-\infty,0],\\ S_\alpha(t)\varphi(0), & t\in[0,b],\end{cases}$$

则由公理 A1 知, 对任意的 $t\in[0,b]$,

$$\begin{aligned}\|y_t\|_{\mathcal{B}} &\le K(t)\sup\{\|y(s)\|:0<s<t\}+M(t)\|y_0\|_{\mathcal{B}}\\ &= K(t)\sup\{\|S_\alpha(t)\varphi(0)\|:0\le s\le t\}+M(t)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}\le(K_bMH+M_b)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

记 $C_0=\{x:(-\infty,b]\to X:x|_{(-\infty,0]}=0,x|_{[0,b]}$ 连续 $\}$, 取上确界范数构成 Banach 空间并且满足相空间的公理假设. 定义 $\Gamma:C_0\to C_0$,

$$\Gamma u(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s, & t\in[0,b],\\ 0, & t\in(-\infty,0).\end{cases}$$

若 Γ 在 C_0 上有不动点 u, 则易知 $x=y+u$ 即为方程 (1.1) 的适度解. 由于易见 $\Gamma C_0\subset C_0$, 且 C_0 中元素可以视为 $C([0,b],X)$ 中的元素. 因此下面利用 Schauder 不动点定理来证明 Γ 在 C_0 上有不动点.

第一步 记 $B_r=\{u\in C_0,\|u\|_{C_0}\le r\}$. 往证存在正常数 $r>0$ 使得 $\Gamma B_r\subseteq B_r$. 若不然, 则对任意的正常数 r, 存在函数 $u^r(\cdot)\in B_r$, 以及 $t_0\in[0,b]$, 使得 $\|(\Gamma u^r)(t_0)\|>r$. 因为对任意的 $u\in B_r$, $s\in[0,b]$, 有

$$\|u_s+y_s\|_{\mathcal{B}}\le\|u_s\|_{\mathcal{B}}+\|y_s\|_{\mathcal{B}}\le K_br+(K_bMH+M_b)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}=r'.$$

由条件 (H2) 可得

$$r<\|(\Gamma u^r)(t_0)\|=\int_0^{t_0}S_\alpha(t_0-s)f(s,u_s^r+y_s)\,\mathrm{d}s\le M\int_0^b\rho_{r'}(s)\,\mathrm{d}s.$$

上式两边同除以 r 得

$$1<M\frac{\displaystyle\int_0^b\rho_{r'}(s)\,\mathrm{d}s}{r}=M\frac{\displaystyle\int_0^b\rho_{r'}(s)\,\mathrm{d}s}{r'}\frac{r'}{r}.$$

注意到当 $r\to\infty$ 时, $r'=K_br+(K_bMH+M_b)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}\to\infty$, 故令 $r\to+\infty$, 则有 $M\sigma K_b\ge1$, 这和假设相矛盾. 因此存在正常数 r 使得 $\Gamma B_r\subseteq B_r$.

第二步 $\Gamma:C_0\to C_0$ 为连续映射. 设 $\{u^n\}_{n\ge1}\subseteq C_0$, 并且在 C_0 中 $\lim\limits_{n\to\infty}u^n=u$, 有

$$\|(\Gamma u^n)(t)-(\Gamma u)(t)\|\le M\int_0^t\|f(s,u_s^n+y_s)-f(s,u_s+y_s)\|\,\mathrm{d}s.$$

由公理 A_1 可知, 对任意的 $s\in[0,t]$ 有

$$\|(u_s^n+y_s)-(u_s+y_s)\|_{\mathcal{B}}=\|u_s^n-u_s\|_{\mathcal{B}}\le K_b\sup\{\|u^n(\tau)-u(\tau)\|:0\le\tau\le s\}\to0,n\to\infty.$$

因此由条件 (H2) 知, 对几乎处处的 $s\in[0,b]$, 有 $\|f(s,u_s^n+y_s)-f(s,u_s+y_s)\|\to 0, n\to\infty$. 从而由勒贝格控制收敛定理知, $\forall t\in[0,b]$, $\displaystyle\int_0^t \|f(s,u_s^n+y_s)-f(s,u_s+y_s)\|\,\mathrm{d}s\to 0, n\to\infty$. 故 Γ 在 C_0 上是连续的.

第三步 $\Gamma: B_r\to B_r$ 为紧的. 首先, ΓB_r 在 J 中为等度连续的. 事实上, 设 $0\le t_1<t_2\le b$, $u\in B_r$, 有

$$\begin{aligned}
&\|(\Gamma u)(t_2)-(\Gamma u)(t_1)\|\\
=\ &\|\int_0^{t_2} S_\alpha(t_2-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|\\
\le\ &\int_0^{t_1}\|S_\alpha(t_2-s)-S_\alpha(t_1-s)\|\|f(s,u_s+y_s)\|\,\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\|S_\alpha(t_2-s)f(s,u_s+y_s)\|\,\mathrm{d}s\\
\le\ &\int_0^{t_1}\|S_\alpha(t_2-s)-S_\alpha(t_1-s)\|\rho_r(s)\,\mathrm{d}s+M\int_{t_1}^{t_2}\rho_r(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

如果 $t_1=0$, 显然对任意的 $u\in B_r$, 有 $\lim\limits_{t_2\to 0}\|(\Gamma u)(t_2)-(\Gamma u)(t_1)\|=0$.

如果 $0<t_1<b$, 对于 $0<\delta<t_1$, 有

$$\begin{aligned}
&\|(\Gamma u)(t_2)-(\Gamma u)(t_1)\|\\
\le\ &\int_0^{t_1-\delta}\|S_\alpha(t_2-s)-S_\alpha(t_1-s)\|\rho_r(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_{t_1-\delta}^{t_1}\|S_\alpha(t_2-s)-S_\alpha(t_1-s)\|\rho_r(s)\,\mathrm{d}s+M\int_{t_1}^{t_2}\rho_r(s)\,\mathrm{d}s\\
\le\ &\|\rho_r\|_{L^1}\sup_{s\in[0,t_1-\delta]}\|S_\alpha(t_2-s)-S_\alpha(t_1-s)\|+2M\int_{t_1-\delta}^{t_1}\rho_r(s)\,\mathrm{d}s+M\int_{t_1}^{t_2}\rho_r(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由引理 2.1 易知对于 $t\in[\delta,b]$, 算子 $S_\alpha(t)$ 是范数一致连续的, 并且由 δ 的任意性, 有

$$\lim_{|t_2-t_1|\to 0}\|(\Gamma u)(t_2)-(\Gamma u)(t_1)\|=0, u\in B_r.$$

由此表明 ΓB_r 在 J 中等度连续.

其次, 往证 Γ 将 B_r 映射到 B_r 中的一个准紧集. 对于固定的 $0<t\le b$ 以及 $0<\varepsilon<t$, 由于 $S_\alpha(\varepsilon)$ 为紧的, 故集合 $\{S_\alpha(\varepsilon)\displaystyle\int_0^{t-\varepsilon} S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s: u\in B_r\}$ 在 B_r 中为相对紧的. 此外, 对任意的 $\varepsilon<\delta<t$, 有

$$\begin{aligned}
&\|S_\alpha(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t-\varepsilon} S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|\\
\le\ &\int_0^{t-\delta}\|S_\alpha(\varepsilon)S_\alpha(t-s-\varepsilon)-S_\alpha(t-s)\|\rho_r(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_{t-\delta}^{t-\varepsilon}\|S_\alpha(\varepsilon)S_\alpha(t-s-\varepsilon)-S_\alpha(t-s)\|\rho_r(s)\,\mathrm{d}s\\
\le\ &\int_0^{t-\delta}\|S_\alpha(\varepsilon)S_\alpha(t-s-\varepsilon)-S_\alpha(t-s)\|\rho_r(s)\,\mathrm{d}s+(M^2+M)\int_{t-\delta}^{t}\rho_r(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由引理 2.1 知, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 有

$$S_\alpha(\varepsilon)S_\alpha(t-s-\varepsilon)-S_\alpha(t-s)\to 0,\quad s\in[0,t-\delta].$$

故由勒贝格控制收敛定理以及 δ 的任意性可得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|S_\alpha(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|=0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
&\|S_\alpha(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|\\
\le\ &\|S_\alpha(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon}\|S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|\\
&+\|\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|\\
\le\ &\|S_\alpha(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|+M\int_{t-\varepsilon}^{t}\rho_r(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|S_\alpha(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon}S_\alpha(t-s-\varepsilon)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s-\int_0^{t}S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s\|=0.$$

因此集合 $\{\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u_s+y_s)\,\mathrm{d}s:u\in B_r\}$ 在 B_r 中为准紧集. 故由 Arzala-Ascoli 定理可知 Γ 为紧的. 由 Schauder 不动点定理可知 Γ 在 C_0 上有不动点 u, 则 $x=u+y$ 即为方程 (1.1) 的适度解.

注 从证明过程可以看出, 解析预解算子范数的一致连续性在证明中起到关键的作用; 其次, 适当改变定理 3.1 中条件 (H2) 仍然可以得到适度解的存在性; 最后, 利用本文中的方法可以进一步处理与预解算子相关的分数阶微分方程问题, 例如微分包含问题, 时滞非局部问题, 脉冲问题等等.

参 考 文 献

[1] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equatoins[M]. NewYork: John Wiley and Sons, 1993.

[2] Bajlekova E G. Fractional evolution equations in Banach spaces[M]. Eindhoven: University Press Facilities, Eindhoven, University of Technology, 2001.

[3] Li K X, Peng J G. Fractional resolvents and fractional evolution equations[J]. Appl. Math. Letters, 2012, 25: 808–812.

[4] Li K X , Peng J G, Jia J X. Cauchy problems for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives[J]. J. Funct. Anal., 2012, 263: 476–510.

[5] Chen Q, Wang J R, Chen F L, Zhang Y R. Periodic solutions of quadratic Weyl fractional integral equations[J]. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 2014, 19: 1945–1955.

[6] Wang J R, Fečkan M, Zhou Y. Fractional order iterative functional differential equations with parameter[J]. Appl. Math. Model., 2013, 37: 6055–6067.

[7] Liu K W, Jiang W. Finite time stability of fractional order neutral differential equations[J]. J. Math., 2014, 1(34): 43–50.

[8] Chen L Z, Fan Z B. On mild solutions to fractional differential equations with nonlocal conditions[J]. Elect. Quali. Theory Diff. Equ., 2011, 53: 1–13.

[9] Fan Z B. Characterization of compactness for resolvents and its applications[J]. Appl. Math. Comput., 2014, 232: 60–67.

[10] 黄启昌. 具无限时滞的泛函微分方程的周期解的存在性 [J]. 中国科学, 1984, 14A(10): 881–889.

[11] 霍海峰, 李万同. 中立型时滞 Lotka-Volterra 系统正周期解的存在性 [J]. 数学学报, 2003, 46(6): 1199–1210.

[12] 彭世国, 朱思铭. 无穷时滞泛函微分方程的正周期解 [J]. 数学年刊 (A), 2004, 25(3): 285–292.

[13] 何世峰, Sotiris K N, 任永, 一类具有无穷时滞中立型非稠定脉冲随机泛函微分方程积分解的存在性 [J]. 应用数学学报, 2012, 35(4): 703–718.

[14] 刘可为, 蒋威. 一类时滞微分系统的周期解 [J]. 数学杂志, 2010, 31(1): 138–146.

[15] Hale J K, Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay[J]. Funkcial Ekvac., 1978, 21: 11–41.

[16] Hino N, Murakami S, Naito T. Functional differential equations with infinite delay[M]. Lecture Note Math., Vo1. 1473, Berlin: Springer-Verlag, 1991: 4–5.

EXISTENCE RESULTS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INFINITE DELAY VIA RESOLVENT OPERATORS

CHEN Li-zhen[1], FAN Zhen-bin[2], LI Gang[3]

(*1.Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, China*)

(*2.Department of Mathematics, Changshu Institute of Technology, Suzhou 215500, China*)

(*3.Department of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China*)

Abstract: This paper is concerned with a class of fractional differential equations governed by a linear closed operator which generates a resolvent. The existence of mild solutions to such equations is obtained by using the theory of analytic resolvent and fixed point theorem which improves and generalizes some previous results.

Keywords: resolvent operator; fractional differential equation; infinite delay; mild solution

2010 MR Subject Classification: 34K50; 34K30