Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

行为负相依随机变量阵列加权和的完全收敛性

高 慧, 郭明乐, 祝东进
(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241003)

摘 要: 本文研究了行为 NOD 随机变量阵列加权和的完全收敛性. 运用 NOD 随机变量列的矩不等式以及截尾的方法, 得到了关于行为 NOD 随机变量阵列加权和的完全收敛性的充分条件. 利用获得的充分条件, 推广了 Baek(2008) 关于行为 NA 随机变量阵列加权和的完全收敛性的结论, 得到了比吴群英 (2012) 更为一般的结果.

关键词: NOD 随机变量列; NA 随机变量列; 完全收敛性; 矩不等式
MR(2010) 主题分类号: 60F15 **中图分类号**: O211.4
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)04-0859-08

1 引言

称随机变量 X 与 Y 是 NOD (Negatively Orthant Dependent) 的, 如果

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y), \forall x, y \in R. \tag{1.1}$$

事实上, (1.1) 式与下面的 (1.2) 式是等价的,

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y), \forall x, y \in R. \tag{1.2}$$

但是, 当 $n \geq 3$ 时, (1.1) 与 (1.2) 式却并不等价, 因此需要下面的定义来定义 NOD 随机变量列, Joag-Dev 和 Proschan [1] 在 1983 年提出了 NOD 和 NA (Negatively Associated) 随机变量列的概念.

定义 1.1 称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 NOD 的, 如果对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq x_i)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i);$$
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x_i)\right) \leq \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i),$$

称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 NOD 的, 如果它的每一个有限子集序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是 NOD 的.

*收稿日期: 2015-04-03 接收日期: 2015-07-21
基金项目: 国家自然科学基金 (11271020; 11201004) 资助项目; 安徽省自然科学基金 (1208085MA11) 资助项目; 安徽省高校省级自然科学研究 (KJ2012ZD01) 重大资助项目.
作者简介: 高慧 (1991–), 女, 安徽芜湖, 硕士, 主要研究方向: 运筹学与控制论, 极限理论.

定义 1.2 称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geq 2)$ 是 NA 的, 如果对于集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 A 与 B, 都有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i, i \in A), f_2(X_j, j \in B)) \leq 0,$$

其中 f_1 与 f_2 是任何两个使得协方差存在的且对每个变元均非降 (或同为对每个变元均非升) 的函数. 称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 NA 的, 如果对任何 $n \geq 2, X_1, \cdots, X_n$ 都是 NA 的.

易见, NOD 随机变量列是比 NA 随机变量列弱的一种序列, 由于 NOD 随机变量列在工程技术领域都有较为广泛的应用, 所以将 NA 随机变量列的某些性质推广到 NOD 随机变量列上具有重要的理论和应用价值.

我国著名统计学家许宝禄与 Robbins [2] 提出了完全收敛性的这一概念, 它是随机变量列一种非常重要的收敛概念, 当假设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是概率空间 $(\Omega, \Im, P)$ 上的随机变量列, 称 $\{X_n\}$ 是完全收敛于常数 C, 如果对于任意的 $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \epsilon) < \infty.$$

许宝禄与 Robbins [2] 证明了独立同分布随机变量列在方差有限的情况下, 序列的样本均值完全收敛到总体均值, 随后 Erdos [3] 证明了它的逆命题也是成立的. 由 Borel-Cantelli 引理可知, 完全收敛性可以推出几乎处处收敛. 因此随机变量列的完全收敛性的研究就显的更为基本. 目前, 在许多方向对其都进行了推广和完善. 例如 Baum 与 Katz [4] 通过独立随机变量的一些收敛定理得到了 Baum -Katz 型的完全收敛性.

下面我们先介绍本文中几个必要的概念和符号.

定义 1.3 称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 尾概率有界于随机变量 X(记为 $\{X_n\} \prec X$), 如果存在正常数 C, 使得对充分大的 $x \geq 0$, 有

$$\sup_{n \geq 1} P(|X_n| \geq x) \leq CP(|X| \geq x).$$

本文中的常数一律以 $C(>0)$ 表示, 在不同的地方 C 可表示不同值; $a_n \simeq b_n$ 表示存在正常数 C, 使得对任意 $n \geq 1$, 有 $a_n \leq Cb_n$.

下面这个引理是为了保证, 对 NOD 随机变量列采取单调截尾法后, 能够使得截尾后的随机变量列仍是 NOD 的.

引理 1.4 [5] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 NOD 随机变量列, $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 全部是单调增 (或单调减) 函数, 则 $f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$ 仍是 NOD 随机变量列.

下面这个引理是由 Asadian [6] 等建立的, 是关于 NOD 随机变量列的 Rosenthal 型矩不等式, 该不等式在证明中起着重要作用.

引理 1.5 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是零均值的 NOD 随机变量列, 且 $E|X_n|^t < \infty$, $n \geq 1$. 则存在仅依赖于 t 的正常数 C(与 n 无关), 使得对任意 $n \geq 1$, 有

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^t \leq C \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^t, \ \forall 1 < t \leq 2,$$

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^t \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^t + \left(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right)^{t/2}\right), \ \forall t > 2.$$

下面这个引理是由吴群英[7] 建立的, 关于尾概率有界于 X 的随机变量列 $\{X_n, n \ge 1\}$ 的矩的不等式.

引理 1.6 设随机变量序列 $\{X_n, n \ge 1\}$ 尾概率有界于随机变量 X, 则对任意 $t > 0$, $u > 0$, $n \ge 1$, 有

(i) $E|X_n|^u I(|X_n| > t) \le CE|X|^u I(|X| > t)$;

(ii) $E|X_n|^u I(|X_n| \le t) \le C\bigg(E|X|^u I(|X| \le t) + t^u P(|X| > t)\bigg)$.

引理 1.7[9] 设 $\{X_{ni}, i \ge 1, n \ge 1\}$ 是行为 NOD 随机变量阵列, 满足以下三个条件,

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sum\limits_{i=1}^{k_n} P(|X_{ni}| > \epsilon) < \infty,\ \forall \epsilon > 0$,

(ii) 存在 $q > 2, \delta > 0$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \bigg(\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}^2 I(|X_{ni}| \le \delta)\bigg)^{\frac{q}{2}} < \infty,$$

(iii) 对于任意 $n \to \infty$, 有 $\sum\limits_{i=1}^{k_n} EX_{ni} I(|X_{ni}| \le \delta) \to 0$,

则对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}\right| > \epsilon\right) < \infty.$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} X_{ni}$ 几乎处处收敛, 则上述定理对于 $k_n = \infty$ 仍然成立, 即定理 1.7 就是完全收敛性的充分条件.

2 主要结果及证明

定理 2.1 设 $\{X_{ni}, i \ge 1, n \ge 1\}$ 是行为 NOD 随机变量阵列, 存在正常数 C, 使得对充分大的 $x \ge 0$, 有

$$P(|X_{ni}| \ge x) \le CP(|X| \ge x),\ \forall\ n \ge 1,\ \ i \ge 1,\ \ x \ge 0. \tag{2.1}$$

设 $\beta \ge -1$, 实数阵列 $\{a_{ni}, i \ge 1, n \ge 1\}$ 满足

$$\sup_{i \ge 1} |a_{ni}| = O(n^{-r}), \text{对某个 } r > 0 \tag{2.2}$$

及

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|^{\theta} = O(n^{\alpha}), \text{对某个}\alpha < 2r,\ \ 0 < \theta < \min(2, 2 - \alpha/r). \tag{2.3}$$

(i) 当 $\alpha + \beta + 1 > 0$ 时, 若存在某个 $\sigma > 0$, 使得 $\dfrac{\alpha}{r} + \theta < \sigma \le 2$, 记 $s = \max(\theta + \dfrac{\alpha + \beta + 1}{r}, \sigma)$, 且当 $s > 1$ 时, $EX_{ni} = 0, i \ge 1, n \ge 1$, 若 $E|X|^s < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_{ni}\right| > \epsilon\right) < \infty,\ \ \forall\ \epsilon > 0. \tag{2.4}$$

(ii) 当 $\alpha+\beta+1=0$ 时, 若 $E|X|^\theta\log(1+|X|)<\infty$, 则 (1.5) 式成立.

证 运用引理 1.7, 在这里采用 $c_n=n^\beta, k_n=\infty$, 以及用 $\{a_{ni}X_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$ 代替 $\{X_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$. 假设 $a_{ni}^+=\max\{a_{ni},0\}\geq 0$ 与 $a_{ni}^-=\max\{-a_{ni},0\}\geq 0$, 这样 (2.4) 式的证明就转化为证明下面两个式子, 对于任意的 $\epsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^\infty n^\beta P\left(\left|\sum_{i=1}^\infty a_{ni}^+X_{ni}\right|>\epsilon/2\right)<\infty,\ \sum_{n=1}^\infty n^\beta P\left(\left|\sum_{i=1}^\infty a_{ni}^-X_{ni}\right|>\epsilon/2\right)<\infty.$$

因此不失一般性, 对于任意的 $i,n\geq 1$, 假设 $a_{ni}>0$ 和

$$\sup_{i\geq 1} a_{ni}\leq n^{-r}. \tag{2.5}$$

由引理 1.7, 仅需证

$$\begin{aligned} I_1=:&\sum_{n=1}^\infty n^\beta\sum_{i=1}^\infty P(|a_{ni}X_{ni}|>\epsilon)<\infty,\ \forall\ \epsilon>0;\\ I_2=:&\sum_{n=1}^\infty n^\beta\left(\sum_{i=1}^\infty Ea_{ni}^2X_{ni}^2I(|a_{ni}X_{ni}|\leq\delta)\right)^{\frac{q}{2}}, \text{对某个 } q>2,\delta>0;\\ I_3=:&\sum_{i=1}^\infty Ea_{ni}X_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}|\leq\delta)\to 0.\end{aligned}$$

首先来证明 $I_1<\infty$, 根据引理 1.6, (2.1)–(2.3), (2.5) 式以及 Makov 不等式有

$$\begin{aligned} I_1\leq& C\sum_{n=1}^\infty n^\beta\sum_{i=1}^\infty P(|a_{ni}X|>\epsilon)\leq C\sum_{n=1}^\infty n^\beta\sum_{i=1}^\infty E\left|\frac{a_{ni}X}{\epsilon}\right|^\theta I(|a_{ni}X|>\epsilon)\\ \leq& C\sum_{n=1}^\infty n^\beta\sum_{i=1}^\infty E|a_{ni}X|^\theta I(|a_{ni}X|>\epsilon)\leq C\sum_{n=1}^\infty n^\beta\sum_{i=1}^\infty |a_{ni}|^\theta E|X|^\theta I(|X|>\epsilon n^r)\\ \simeq&\sum_{n=1}^\infty n^{\beta+\alpha}E|X|^\theta I(|X|>\epsilon n^r).\end{aligned}$$

下面分两种情况讨论:

(1) 当 $\alpha+\beta+1>0$ 时,

$$\begin{aligned} I_1\simeq&\sum_{n=1}^\infty n^{\beta+\alpha}\sum_{j=n}^\infty E|X|^\theta I(j^r<|X|\leq(j+1)^r)\\ =&\sum_{j=1}^\infty E|X|^\theta I(j^r<|X|\leq(j+1)^r)\sum_{n=1}^j n^{\beta+\alpha}\\ \leq&\sum_{j=1}^\infty j^{\beta+\alpha+1}E|X|^\theta I(j^r<|X|\leq(j+1)^r)\\ \simeq&\sum_{j=1}^\infty E|X|^{\theta+\frac{\beta+\alpha+1}{r}}I(j^r<|X|\leq(j+1)^r)\\ \simeq& E|X|^s<\infty.\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2) 当 $\alpha+\beta+1=0$ 时,

$$\begin{aligned}I_1 \simeq&\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\sum_{j=n}^{\infty}E|X|^{\theta}I(j^r<|X|\le(j+1)^r)\\=&\sum_{j=1}^{\infty}E|X|^{\theta}I(j^r<|X|\le(j+1)^r)\sum_{n=1}^{j}n^{-1}\\\le&\sum_{j=1}^{\infty}\ln jE|X|^{\theta}I(j^r<|X|\le(j+1)^r)\\\simeq&E|X|^{\theta}\ln(1+|X|)<\infty.\end{aligned}\tag{2.7}$$

结合 (2.6), (2.7) 式, 可知 $I_1<\infty$.

其次来证明 $I_2<\infty$, 为此根据 s 的范围分以下两种情形讨论.

情形 1 $s>2$.

此时 $s=\theta+\dfrac{\alpha+\beta+1}{r}$, 因为高阶矩有限, 低阶矩一定有限, 所以当 $E|X|^s<\infty$ 时, $E|X|^2<\infty$. 又因为 $\alpha+r(\theta-2)<0$, 所以存在 $q\ge2$, 使得

$$\beta+(\alpha+r(\theta-2))\frac{q}{2}<-1,$$

所以根据 (1.4) 式, 引理 1.6 以及示性函数的性质, 可以得到

$$\begin{aligned}I_2\simeq&\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^2EX_{ni}^2I(|X_{ni}|\le\delta)\right)^{\frac{q}{2}}\\\le&\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^2\right)^{\frac{q}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{\theta}a_{ni}^{2-\theta}\right)^{\frac{q}{2}}\\\simeq&\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}(n^{\alpha+r(\theta-2)})^{\frac{q}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta+(\alpha+r(\theta-2))\frac{q}{2}}<\infty.\end{aligned}\tag{2.8}$$

情形 2 $s\le2$.

若 $\beta>-1$, 此时 $s=\max(\theta+\dfrac{\alpha+\beta+1}{r},\sigma)$, 即 $\dfrac{\alpha}{r}+\theta<\sigma\le s\le2$. 故 $\alpha+r(\theta-s)<0$, 所以存在 $q\ge2$, 使得

$$\beta+(\alpha+r(\theta-s))\frac{q}{2}<-1.$$

根据引理 1.6, (2.3) 式以及 $E|X|^s<\infty$, 有

$$\begin{aligned}I_2\simeq&\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^sE|X_{ni}|^sI(|a_{ni}X_{ni}|\le\delta)\right)^{\frac{q}{2}}\\\le&\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^s\right)^{\frac{q}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{\theta}a_{ni}^{s-\theta}\right)^{\frac{q}{2}}\\\simeq&\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}(n^{\alpha+r(\theta-s)})^{\frac{q}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta+(\alpha+r(\theta-s))\frac{q}{2}}<\infty.\end{aligned}\tag{2.9}$$

若 $\beta=-1$, 此时 $s=\max(\theta+\frac{\alpha}{r},\sigma)=\sigma$, 以及 $\frac{\alpha}{r}+\theta<\sigma\le 2$. 即 $\alpha+r(\theta-\sigma)<0$, 所以存在 $q\ge 2$, 使得 $-1+(\alpha+r(\theta-\sigma))\frac{q}{2}<-1$, 所以类似 $\beta>-1$ 时的证法, 有

$$\begin{aligned}I_2&\simeq\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{\sigma}E|X_{ni}|^{\sigma}I(|a_{ni}X_{ni}|\le\delta)\right)^{\frac{q}{2}}\\&\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{\sigma}\right)^{\frac{q}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{\theta}a_{ni}^{\sigma-\theta}\right)^{\frac{q}{2}}\\&\simeq\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(n^{\alpha+r(\theta-\sigma)})^{\frac{q}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+(\alpha+r(\theta-\sigma))\frac{q}{2}}<\infty.\end{aligned}\tag{2.10}$$

综上所述, 由 (2.8)–(2.10) 式可知 $I_2<\infty$.

最后证明 $I_3\to 0$, 仅需要证明

$$I_3=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}EX_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}|\le\delta)\to 0,\ n\to\infty.$$

根据证明的需要, 分下面两种情形.

情形 1 $s\le 1$.

根据引理 1.6, (2.1)–(2.3), (2.5) 式以及 $E|X|^s<\infty$, 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}|EX_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}|\le\delta)|&\simeq\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{s}E|X|^{s}I(|a_{ni}X|\le\delta)\\&\simeq\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{s}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{\theta}a_{ni}^{s-\theta}\\&\le n^{\alpha}n^{(\theta-s)r}=n^{\alpha+(\theta-s)r}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

根据 $\frac{\alpha}{r}+\theta<\sigma\le s\le 2$, 知 $\alpha+(\theta-s)r<0$, 所以

$$I_3\simeq n^{\alpha+(\theta-s)r}\to 0,\ n\to\infty.\tag{2.12}$$

情形 2 $s>1$.

根据 $EX_{ni}=0,E|X|^s<\infty$, 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}|EX_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}|\le\delta)|&=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}|EX_{ni}I(|a_{ni}X_{ni}|>\delta)|\\&\simeq\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{s}E|X|^{s}I(|a_{ni}X|>\delta)\\&\simeq\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^{s}\le n^{\alpha}n^{(\theta-s)r}=n^{\alpha+(\theta-s)r}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

此时

$$I_3 \simeq n^{\alpha+(\theta-s)r} \to 0,\ n \to \infty. \tag{2.14}$$

结合 (2.12), (2.14) 式可以得到 $I_3 \to 0$.

因此根据 (2.6) 至 (2.14) 式可以满足定理 1.7 中的 (i), (ii), (iii) 三个条件, 所以可以得到对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_{ni}\right| > \epsilon\right) < \infty,$$

则表明 (2.4) 式成立, 即成功的证明了定理 2.1.

由于吴群英 [7] 对于该问题的证明方法, 无法处理当 $\alpha+\beta+1>0, \beta=-1$ 时的情况, 如果使用他的证明方法, 需要加强矩条件. 而在本文中, 采用了不同于吴群英的方法, 可以处理 $\beta=-1$ 时的情况.

邱德华 [9] 在研究行为 NA 随机变量列的完全收敛性时, 利用陈平炎等 [10] 研究的结果, 得到了行为 NA 随机变量列完全收敛性的充分条件, 受此启发, 这里利用李旭 [11] 建立的行为 NOD 随机变量列加权完全收敛性的充分条件, 验证充分条件的做法更为简便, Baek [12] 和邱德华 [9] 的文章中研究了行为 NA 随机变量列加权和的完全收敛性, 且他们的证明方法也可以处理 $\beta=-1$ 的情况, 本文将这个结果从行为 NA 随机变量列推广到行为 NOD 的随机变量列, 从而获得了 NOD 随机变量序列加权和的完全收敛性, 对吴群英 [7] 等的文章内容作了扩充, 且处理方法更为简便.

参 考 文 献

[1] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann. Stat., 1983, 11: 286–295.

[2] Hsu P L, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers[J]. Proc. National Acad. Sci. United States Amer., 1947, 33: 25–31.

[3] Erdos P. On a theorem of Hsu and Robbins[J]. Ann. Math. Stat., 1949, 20: 286–291.

[4] Baum L E, Katz M. Convergence rates in the law of large numbers[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 120: 108–123.

[5] Bozorgnia A, Patterson R F, Taylor R L. Limit theorems for ND r.v.'s[J]. Lith. Math. J., 1974, 14(4): 1639–1650.

[6] Asadian N, Fakoor V, Bozorgnia A. Rosenthal's type inequalities for negatively orthant dependent random variables[J]. J. Iranian Stat. Soc., 2006, 5: 66–75.

[7] Wu Q Y. Probability limit theory for mixed sequence[M]. Beijing: China Science Press, 2006 (In Chinese).

[8] Wu Q Y. A complete convergence theorem for weighted sums of arrays of rowwise negatively dependent random variables[J]. J. Inequ. Appl., 2012: 50 pages.

[9] 邱德华. 行为 NA 随机变量阵列的完全收敛性 [J]. 数学杂志, 2013, 33: 138–146.

[10] Chen Pingyan, Hu T C, Liu X, Volodin A. On complete convergence for arrays of rowwise negatively associated random variables[J]. The. Prob. Appl., 2007, 52(2): 1–5.

[11] 李旭. NOD 序列若干收敛性质的研究 [D]. 安徽: 安徽大学硕士学位论文, 2012.

[12] Baek J I, Choi I B, Niu S l, On the complete convergence of weighted sums for arrays of negatively associated variables[J]. J. Korean Stat. Soc., 2008, 37: 73–80.

[13] Guo M L, Zhu D J, Ren Y. Complete moment convergence of weighted sums for arrays of rowwise negatively associated random variables[J]. Chinese J. Appl. Prob. Stat. Soc., 2013, 29: 42–52.

[14] 谭成良, 吴群英, 何燕梅. 行为 ρ 混合阵列加权和的收敛性 [J]. 数学杂志, 2011, 31(1): 178–184.

COMPLETE CONVERGENCE OF WEIGHTED SUMS FOR ARRAYS OF NOD RANDOM VARIABLES

GAO Hui, GUO Ming-le, ZHU Dong-jin

(*School of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

Abstract: In this article, the complete convergence theorem for weighted sums for arrays of rowwise NOD random variables is investigated. By using moment inequality of negatively dependent random variables and truncation method, the sufficient conditions for complete convergence of weighted sums for arrays of NOD random variables are obtained. Using the sufficient conditions, we can promote the Bake's (2008) conclusion on complete convergence of weighted sums for arrays of NOD random variables, and we can get more general results than Wu (2012).

Keywords: NOD random variables; NA random variables; complete convergence; moment inequality

2010 MR Subject Classification: 60F15