Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

基于 Fourier 变换的裂解价差期权定价

庄乾乾 , 程希骏 , 李 静
(中国科学技术大学统计与金融系, 安徽 合肥 230026)

摘 要: 本文研究了期货期权和裂解价差期权的定价问题. 利用 Fourier 变换方法, 在 ASubCIR 模型的基础上, 获得了单因素期货期权, 两因素期货期权以及价差期权价格的表达式, 最后用 C++ 和 MATLAB 计算出期权的价格, 解决了利用特征函数展开法计算期权价格时速度较慢且不稳定的问题.

关键词: ASubCIR 模型; Fourier 变换; 期货期权; 价差期权
MR(2010) **主题分类号:** 91B25 **中图分类号:** O211.6
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2016)04-0841-10

1 引言

随着中国金融市场的发展, 期权将逐步进入中国市场, 并有越来越大的发展空间, 期权定价的问题也逐渐受到关注. 近些年来, 很多学者研究了一些特殊期权以及含期权的金融产品的定价问题 [1−5] . 本文主要研究商品期货期权和裂解价差期权的定价问题. 期货期权和裂解价差期权分别指以期货合约和裂解价差为标的的期权, 裂解价差为汽油价格或燃料油价格与原油价格的差值. 与股票市场不同, 商品现货 (期货) 具有均值回归、跳跃等重要特征, 同时为了拟合相应期货期权的隐含波动率, 一般还需要时间非齐次的更复杂的随机模型, Li Jing 等 [6] 提出的 ASubCIR(additive subordinate Cox-Ingersoll-Ross) 模型较好地解决了这些问题. 另外, 对于价差期权的定价问题, 虽然 Hikspoors 和 Jaimungal [7] 给出了期权价格的解析表示, 但该模型仅局限于执行价格为 0 的特殊情况, 对于一般情况的价差期权, 即使在 B-S 模型下, 大部分研究也只给出近似的边界公式, 没有价格的解析表示, 但利用 Fourier 变换方法可以进行快速计算.

2 模型设定

本节简要介绍 Li Jing 等基于 ASubCIR 随机过程提出的交叉商品 (cross-commodity) 模型及相关结果.

若 $\mathbb{R}_+$ 上 X_t 为 CIR 过程, 即

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t,$$

其中 $\kappa > 0, \theta > 0, \sigma > 0, W_t$ 为标准 Brown 运动. 并记上述 CIR 分布的转移概率为 $(P_t, t \geq 0)$, 在 $C([0,\infty])$ 上转移半群 $\{\mathcal{P}_t, t \geq 0\}$ 满足

$$\mathcal{P}_t f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_t)\right] = \int_0^\infty f(y)P_t(x,dy), \quad \forall f(x) \in C([0,\infty]), \tag{2.1}$$

*收稿日期: 2014-12-12 接收日期: 2015-01-15
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11371340).
作者简介: 庄乾乾 (1989–), 女, 吉林白山, 研究生在读, 主要研究方向: 金融工程.

$\mathbb{E}_x$ 表示在 X_t 对应的概率测度 $\mathbb{P}_x$ 下的期望, X_t 初值为 x. 上述条件下, 给出如下定义.

定义 2.1 若 $\{A_t\}_{t\geq 0}$ 为一个初值为 0, 具有独立增量的非负随机连续的 càdlàg 过程, 定义 $X_t^{\psi} = X_{A_t}(X_t^{\psi} = x_0)$ 为 ASubCIR (additive subordinate Cox-Ingersoll-Ross) 过程, 此时, $\{A_t\}_{t\geq 0}$ 称为可加下标 (additive subordinator), $\{A_t\}$ 的 Laplace 变换 [8] 为

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda(A_t-A_s)}\right] = e^{-\int_s^t \psi(\lambda,u)du}, \quad \psi(\lambda,u) = \lambda\gamma(u) + \int_{(0,\infty)} (1-e^{-\lambda\tau})\upsilon(u,d\tau),$$

易知每组 $(\kappa,\theta,\sigma,\psi)$ 与唯一的 ASubCIR 过程相对应, 称 $(\kappa,\theta,\sigma,\psi)$ 为这个 ASubCIR 过程的生成元组.

一种简单的获取可加下标的方式为将 Lévy 下标 (Lévy subordinator) 的相关参数转化为时间的函数. 另外, 对于 Sato 过程, 其对应的可加下标较易得到. 如 IG-Sato, Gamma-Sato 可加下标的 Lapalce 指数可由 IG, Gamma 下标的 Laplace 指数得到 [8]

$$\int_0^t \psi(\lambda,u)du = \begin{cases} \gamma\lambda t^{\rho} + \frac{\mu^2}{\nu}\left(\sqrt{1+\frac{2\nu}{\mu}\lambda t^{\rho}} - 1\right) & \text{(IG-Sato)}, \\ \gamma\lambda t^{\rho} + \frac{\mu^2}{\nu}\log\left(1+\frac{\nu}{\mu}\lambda t^{\rho}\right) & \text{(Gamma-Sato)}. \end{cases}$$

ASubCIR 过程具有状态相依和时间相依的均值回复跳跃, 且具有时间非齐次性等特点, 这些性质与商品市场价格变动相一致.

与文献 [6] 中相同, 假设在风险中性测度下, 两商品的现货价格满足:

$$S_t^1 = a_1(t)X_t^{\psi_1}, X_0^{\psi_1} = x_1, \tag{2.2}$$

$$S_t^2 = a_2(t)\left(X_t^{\psi_1} + X_t^{\psi_2}\right), X_0^{\psi_2} = x_2. \tag{2.3}$$

对于上面的表示, 有以下两点说明:

(1) 因为价差期权所涉及的两种商品往往是原料（如原油）和产成品（如燃料油）, 影响原料价格的因素定会对产成品价格产生影响, 用 $X_t^{\psi_1}$ 刻画这些共同的影响因素. 同时用 $X_t^{\psi_2}$ 刻画只对产成品价格产生影响的因素. 并且, 假设 $X_t^{\psi_1}, X_t^{\psi_2}$ 为两个独立的 ASubCIR 过程, 其生成元组分别为 $(\kappa_1,\theta_1,\sigma_1,\psi_1)$, $(\kappa_2,\theta_2,\sigma_2,\psi_2)$;

(2) 记 $F_i(0,T_i)(i=1,2)$ 为到期时间为 T_i, 第 i 个商品期货的初始时刻的价格. 在风险中性测度下, 期货价格可表示为现货价格的条件期望, 则 $a_1(t), a_2(t)$ 可以通过期货价格初值确定, 即 $a_1(t) = F_1(0,T_1)/\mathbb{E}[X_t^{\psi_1}], a_2(t) = F_2(0,T_2)/\mathbb{E}[X_t^{\psi_1} + X_t^{\psi_2}]$.

ASubCIR 过程可以更好地拟合两个期货期权的隐含波动率曲面和相应的价差期权隐含相关系数, 在刻画商品市场价格时具有明显的优势, 但是, Li Jing 等文章的特征函数展开方法在计算上比较慢且不稳定, 这就需要一种更方便快捷的定价方法. 本文尝试利用 Fourier 变换方法对期权定价, 在此之前, 首先介绍两个在文献 [6] 已经证明的结论:

引理 2.2 对 $f \in L^2(\mathbb{R}_+, m)$, 令 $f_n = (f,\varphi_n) = \int_0^{\infty} f(x)\varphi_n(x)m(x)dx$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| n^{-1/4} < \infty$, 则 ASubCIR 半群 $\{\mathcal{P}_{s,t}^{\psi}, t > s \geq 0\}$ 有如下的特征函数展开表示:

$$\mathcal{P}_{s,t}^{\psi} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\int_s^t \psi(\kappa n,u)du} f_n\varphi_n(x), \tag{2.4}$$

对任意 $t > s \geq 0$, 上式关于 x 一致收敛, 其中 $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n!\kappa}{\Gamma(\beta+n)}}\alpha^{\frac{\beta-1}{2}}L_n^{(\beta-1)}(\alpha x)$ 为 CIR 分布的特征函数, $L_n^{(v)}(x)$ 为广义拉盖尔多项式, $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, $m(x) = \frac{2}{\sigma^2}x^{\beta-1}e^{-\alpha x}$, $\alpha = \frac{2\kappa}{\sigma^2}$, $\beta = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$. 为了方便后面的计算, 引入标准化的拉盖尔多项式

$$l_n^{(v)}(x) := \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(v+n+1)}}L_n^{(v)}(x)(n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$l_n^{(v)}(x)$ 可通过递推关系 [9] 得到.

引理 2.3 $F_i(t, T_i)(i = 1, 2)$ 表示 T_i 时刻到期, 第 i 个商品期货在时刻 t 的价格, 则对 $0 \leq t \leq T_i$, $F_i(t, T_i)(i = 1, 2)$ 为鞅, 且

$$F_1(t,T_1) = a_1(T_1)e^{-\int_t^{T_1}\psi_1(k_1,u)du}X_t^{\psi_1} + a_1(T_1)\theta_1\Big(1 - e^{-\int_t^{T_1}\psi_1(k_1,u)du}\Big), \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} F_2(t,T_2) =& a_2(T_2)e^{-\int_t^{T_2}\psi_1(k_1,u)du}X_t^{\psi_1} + a_2(T_2)e^{-\int_t^{T_2}\psi_2(k_2,u)du}X_t^{\psi_2} \\ &+ a_2(T_2)\theta_1\Big(1 - e^{-\int_t^{T_2}\psi_1(k_1,u)du}\Big) + a_2(T_2)\theta_2\Big(1 - e^{-\int_t^{T_2}\psi_2(k_2,u)du}\Big), \end{aligned} \tag{2.6}$$

这里 $a_i(T_i)(i = 1, 2)$ 可以通过期货初始价格得到. 即

$$a_1(T_1) = \frac{F_1(0,T_1)}{\theta_1 + (x_1-\theta_1)e^{-\int_0^{T_1}\psi_1(k_1,u)du}}, \tag{2.7}$$

$$a_2(T_2) = \frac{F_2(0,T_2)}{\theta_1 + \theta_2 + (x_1-\theta_1)e^{-\int_0^{T_2}\psi_1(k_1,u)du} + (x_2-\theta_2)e^{-\int_0^{T_2}\psi_2(k_2,u)du}}. \tag{2.8}$$

3 期权定价的 Fourier 变换方法

在上面的模型设定下, 下面使用 Fourier 变换方法对期权定价. 关于 Fourier 变换解决期权的定价的问题, Andersen 和 Piterbarg [10] 已经给出了一个非常有意义的结论.

引理 3.1 对随机变量 ξ, 定义它的矩母函数为 $\chi(u) = \mathbb{E}\left[e^{u\xi}\right]$, 则对 $k \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}\big[(\xi-\kappa)^+\big] = \frac{d\chi(\kappa)}{d\kappa}\bigg|_{\kappa=0} - \kappa + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\kappa(-\alpha+i\omega)}\chi(-\alpha+i\omega)}{(-\alpha+i\omega)^2}d\omega. \tag{3.1}$$

根据上面引理, 若已知矩母函数, 看涨期权的价格可以直接由公式得到, 所以下面首先对 ASubCIR 过程的矩母函数进行一般性的推导.

定理 3.2 对生成元组为 $(\kappa,\theta,\sigma,\psi)$ 的 ASubCIR 过程 $X_t^{\psi}(X_0^{\psi}=x_0)$, 若 $\Re(\lambda)<\alpha$, 则其对应的矩母函数为

$$\chi(\lambda)=\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t^{\psi}}\right]=\alpha^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\int_0^t\psi(\kappa n,u)du}L_n^{(\beta-1)}(\alpha x_0)\frac{(-\lambda)^n}{(\alpha-\lambda)^{n+\beta}}. \tag{3.2}$$

证 $\chi(\lambda)=\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_t^{\psi}}\right]$, 故 $f(x)=e^{\lambda x}$, 由引理 2.2 可得

$$\begin{aligned}
f_n=(f,\varphi_n)&=\int_0^{\infty}f(x)\varphi_n(x)m(x)dx\\
&=\int_0^{\infty}e^{\lambda x}\sqrt{\frac{n!\kappa}{\Gamma(\beta+n)}}\alpha^{\frac{\beta-1}{2}}L_n^{(\beta-1)}(\alpha x)\frac{2}{\sigma^2}x^{\beta-1}e^{-\alpha x}dx\\
&=\sqrt{\frac{n!\kappa}{\Gamma(\beta+n)}}\alpha^{\frac{\beta-1}{2}}\int_0^{\infty}e^{\lambda x}L_n^{(\beta-1)}(\alpha x)\frac{\alpha^{2-\beta}}{\kappa}(\alpha x)^{\beta-1}e^{-\alpha x}dx\\
&=\sqrt{\frac{n!}{\kappa\Gamma(\beta+n)}}\alpha^{\frac{1-\beta}{2}}\int_0^{\infty}e^{-(-\frac{\lambda}{\alpha}+1)y}L_n^{(\beta-1)}(y)y^{\beta-1}dy \qquad (3.3)\\
&=\sqrt{\frac{n!}{\kappa\Gamma(\beta+n)}}\alpha^{\frac{1-\beta}{2}}\frac{\Gamma(n+\beta)(\frac{-\lambda}{\alpha})^n}{n!(\frac{-\lambda+\alpha}{\alpha})^{n+\beta}}=\sqrt{\frac{\Gamma(\beta+n)}{\kappa n!}}\alpha^{\frac{\beta+1}{2}}\frac{(-\lambda)^n}{(-\lambda+\alpha)^{n+\beta}}, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

其中 (3.4) 式利用了公式 [11]

$$\int_0^{\infty}e^{-st}t^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(t)dt=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)(s-1)^n}{n!s^{\alpha+n+1}}\quad[\Re(\alpha)>-1,\Re(s)>0].$$

由公式使用限制条件, 要求 $\Re(\beta-1)>-1,\Re(-\frac{\lambda}{\alpha}+1)>0$, 即 $\Re(\lambda)<\alpha$. 将上面的结果带入 (2.4) 式, 经过化简即可得到定理的结果.

3.1 期货期权定价

首先利用上面的结果对单因素及两因素的期货期权进行定价. 因为看跌期权的价格可以根据平价公式由看涨期权的价格直接推导, 所以在下面的期货期权以及价差期权的定价中, 仅以看涨期权为例进行推导.

定理 3.3 (1) 对以第一种商品期货为标的的看涨期权, 令

$$A=a_1(T_1)e^{-\int_t^{T_1}\psi_1(\kappa_1,u)du},B=a_1(T_1)\theta_1\Big(1-e^{-\int_t^{T_1}\psi_1(\kappa_1,u)du}\Big),\kappa=\frac{K-B}{A},$$

K 和 T 分别表示对应期权的行权价格和到期时间 (下同), 则期权价格可以表示为

$$C_1(t,K)=e^{-rt}\Big[F_1(0,T_1)-K+\frac{A}{\pi}I(\lambda)\Big],\quad I(\lambda)=\int_0^{\infty}h(\lambda,\omega)d\omega, \tag{3.5}$$

其中要求 $\lambda > 0$, 且

$$
\begin{aligned}
h(\lambda,\omega) = &\sum_{n=0}^{\infty} l_n^{(\beta_1-1)}(\alpha_1 x_1)\exp\Big\{\kappa\lambda + \beta_1\log\alpha_1 - \int_0^t \psi_1(k_1 n, u)du + \frac{1}{2}\big(\log\Gamma(\beta_1+n) \\
&- \log\Gamma(1+n)\big) - (n+\beta_1)\log\sqrt{(\alpha_1+\lambda)^2+\omega^2} + (n-2)\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\Big\} \\
&\times\cos\Big(\kappa\omega + (n-2)\arctan\tfrac{\omega}{\lambda} - (n+\beta_1)\arctan\big(\tfrac{\omega}{\alpha_1+\lambda}\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

(2) 对以第二种商品期货为标的的看涨期权, 令

$$
\bar{A} = e^{-\int_t^{T_2}\psi_1(\kappa_1,u)du}, \bar{B} = e^{-\int_t^{T_2}\psi_2(\kappa_2,u)du},
$$
$$
\bar{C} = \theta_1\Big(1 - e^{-\int_t^{T_2}\psi_1(\kappa_1,u)du}\Big) + \theta_2\Big(1 - e^{-\int_t^{T_2}\psi_2(\kappa_2,u)du}\Big),
$$

则期权价格可表示为 ($\bar{\kappa} = \frac{K}{a_2(T_2)} - \bar{C}$)

$$
C_2(t,K) = e^{-rt}\Big[F_2(0,T_2) - K + \frac{a_2(T_2)}{\pi}\bar{I}(\lambda)\Big], \quad \bar{I}(\lambda) = \int_0^{\infty}\bar{h}(\lambda,\omega)d\omega. \tag{3.7}
$$

与 (1) 相同, 这里也要求 $\lambda > 0$, 且

$$
\begin{aligned}
\bar{h}(\lambda,\omega) = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} l_n^{(\beta_1-1)}(\alpha_1x_1) l_m^{(\beta_2-1)}(\alpha_2x_2)\exp\Big\{\bar{\kappa}\lambda + \beta_1\log\alpha_1 + \beta_2\log\alpha_2 + n\log\bar{A} \\
&+ m\log\bar{B} - \int_0^t\big(\psi_1(\kappa_1 n,u) + \psi_2(\kappa_2 m,u)\big)du + (m+n-2)\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2} \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\log\Gamma(n+\beta_1) + \log\Gamma(m+\beta_2) - \log\Gamma(n+1) - \log\Gamma(m+1)\Big) \\
&- (n+\beta_1)\log\sqrt{(\alpha_1+\lambda\bar{A})^2 + \bar{A}^2\omega^2} - (m+\beta_2)\log\sqrt{(\alpha_2+\lambda\bar{B})^2+\bar{B}^2\omega^2}\Big\} \\
&\times\cos\Big(\bar{\kappa}\omega + (m+n-2)\arctan\frac{\omega}{\lambda} - (n+\beta_1)\arctan\big(\tfrac{\bar{A}\omega}{\alpha_1+\lambda\bar{A}}\big) - (m+\beta_2)\arctan\big(\tfrac{\bar{B}\omega}{\alpha_2+\lambda\bar{B}}\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

证 (1) 易知 $A > 0$, $F_1(t,T_1) = AX_t^{\psi_1} + B$, 记 $\chi_1(\lambda)$ 为 $X_t^{\psi_1}$ 对应的矩母函数, 又 $\frac{d\chi_1(\kappa)}{d\kappa}\big|_{\kappa=0} = \mathbb{E}\left[X_t^{\psi_1}\right]$, 根据引理 3.1, 得到

$$
\begin{aligned}
C_1(t,K) &= e^{-rt}\mathbb{E}\left[\big(F_1(t,T_1)-K\big)^+\right] = e^{-rt}A\mathbb{E}\left[\left(X_t^{\psi_1} - \frac{K-B}{A}\right)^+\right] \\
&= e^{-rt}A\left[\frac{d\chi_1(\kappa)}{d\kappa}\bigg|_{\kappa=0} - \frac{K-B}{A} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\kappa(-\lambda+i\omega)}\chi_1(-\lambda+i\omega)}{(-\lambda+i\omega)^2}d\omega\right] \\
&= e^{-rt}\left[\mathbb{E}\big(AX_t^{\psi_1}+B\big) - K + \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\kappa(-\lambda+i\omega)}\chi_1(-\lambda+i\omega)}{(-\lambda+i\omega)^2}d\omega\right] \\
&= e^{-rt}\left[F_1(0,T_1) - K + \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\kappa(-\lambda+i\omega)}\chi_1(-\lambda+i\omega)}{(-\lambda+i\omega)^2}d\omega\right].
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

上面的结果用到了期货价格 $F_1(t,T_1)$ 为鞅的结论, 即

$$\mathbb{E}\big[AX_t^{\psi_1}+B\big]=\mathbb{E}\big[F_1(t,T_1)\big]=F_1(0,T_1).$$

下面对被积函数推导简化, 首先记 $\overline{\chi_1}(\lambda,\omega)=\frac{e^{-\kappa(-\lambda+i\omega)}\chi_1(-\lambda+i\omega)}{(-\lambda+i\omega)^2}$, 则

$$\overline{\chi_1}(\lambda,\omega)=e^{\kappa(\lambda-i\omega)}\alpha_1^{\beta_1}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\int_0^t\psi_1(\kappa_1 n,u)du}L_n^{(\beta_1-1)}(\alpha_1x_1)\frac{(\lambda-i\omega)^{n-2}}{(\alpha_1+\lambda-i\omega)^{n+\beta_1}}. \tag{3.10}$$

但由于被积函数为复数, 直接积分会导致运算速度较慢, 为进一步提高运算速度, 增加运算稳定性, 做如下处理:

$$\begin{aligned}\overline{\chi_1}(\lambda,\omega)=&\sum_{n=0}^{\infty}l_n^{(\beta_1-1)}(\alpha_1x_1)\exp\Big\{\kappa\lambda-i\kappa\omega+\beta_1\log\alpha_1+\frac12\big(\log\Gamma(\beta_1+n)-\log\Gamma(1+n)\big)\\&-\int_0^t\psi_1(\kappa_1n,u)du-(n+\beta_1)\log(\alpha_1+\lambda-i\omega)+(n-2)\log(\lambda-i\omega)\Big\}\\=&\sum_{n=0}^{\infty}l_n^{(\beta_1-1)}(\alpha_1x_1)\exp\Big\{\kappa\lambda+\beta_1\log\alpha_1+\frac12\big(\log\Gamma(\beta_1+n)-\log\Gamma(1+n)\big)\\&-\int_0^t\psi_1(\kappa_1n,u)du-(n+\beta_1)\log\sqrt{(\alpha_1+\lambda)^2+\omega^2}+(n-2)\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\Big\}\\&\times\exp\Big[-i\Big(\kappa\omega+(n-2)\arctan\tfrac{\omega}{\lambda}-(n+\beta_1)\arctan\big(\tfrac{\omega}{\alpha_1+\lambda}\big)\Big)\Big].\end{aligned} \tag{3.11}$$

由函数的对称性, $\int_{-\infty}^{\infty}\Im\big(\overline{\chi_1}(\lambda,\omega)\big)d\omega=0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\chi_1}(\lambda,\omega)d\omega=2\int_0^{\infty}\Re\big(\overline{\chi_1}(\lambda,\omega)\big)d\omega$. 经简单计算可知 $\Re(\overline{\chi_1}(\lambda,\omega))$ 即为定理中 $h(\lambda,\omega)$, 证毕.

(2) 易知 $\bar A>0,\bar B>0$. $F_2(t,T_2)=a_2(T_2)(\bar AX_t^{\psi_1}+\bar BX_t^{\psi_2}+\bar C)$, 由 $F_2(t,T_2)$ 为鞅, 与 (1) 类似, 可得到

$$\begin{aligned}C_2(t,K)&=e^{-rt}\mathbb{E}\Big[\big(F_2(t,T_2)-K\big)^+\Big]\\&=e^{-rt}\Big[F_2(0,T_2)-K+\frac{a_2(T_2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\bar\kappa(-\lambda+i\omega)}\chi_2(-\lambda+i\omega)}{(-\lambda+i\omega)^2}d\omega\Big],\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\chi_2(\lambda)$ 为 $\bar AX_t^{\psi_1}+\bar BX_t^{\psi_2}$ 对应的矩母函数, 又 $X_t^{\psi_1}$, $X_t^{\psi_2}$ 独立,

$$\begin{aligned}\chi_2(\lambda)=&\mathbb{E}\big[e^{\lambda(\bar AX_t^{\psi_1}+\bar BX_t^{\psi_2})}\big]=\mathbb{E}\big[e^{\lambda\bar AX_t^{\psi_1}}\big]\times\mathbb{E}\big[e^{\lambda\bar BX_t^{\psi_2}}\big]\\=&\alpha_1^{\beta_1}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\int_0^t\psi_1(\kappa_1n,u)du}l_n^{(\beta_1-1)}(\alpha_1x_1)\sqrt{\frac{\Gamma(n+\beta_1)}{n!}}\frac{(-\lambda\bar A)^n}{(\alpha_1-\lambda\bar A)^{n+\beta_1}}\\&\times\alpha_2^{\beta_2}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\int_0^t\psi_2(\kappa_2m,u)du}l_m^{(\beta_2-2)}(\alpha_2x_2)\sqrt{\frac{\Gamma(m+\beta_2)}{m!}}\frac{(-\lambda\bar B)^m}{(\alpha_2-\lambda\bar B)^{m+\beta_2}}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

将矩母函数带入, 与 (1) 进行相似的推导即可得到结论, 证毕.

在上面的证明中, 为了将问题简化, 做了如下处理: 1. 利用鞅性质, 将期权定价公式的第一部分用期货价格初值表示; 2. 利用复数的指数形式以及函数的对称性, 将定价公式简化为实表达式, 在实际的计算中发现, 这种处理方式很大程度上提高了计算的速度以及稳定性; 3. 在计算中使用 $l_n^{(v)}$ 而不是 $L_n^{(v)}$, 是为了更好地控制函数的范围, 避免利用计算机计算时越界, 对 Gamma 函数取对数也是这个目的.

3.2 价差期权定价

上面完成了单因素和两因素的期货期权定价问题, 现在考虑裂解价差期权的定价.

定理 3.4 对于到期收益为 $\big(F_2(t,T_2)-F_1(t,T_1)-K\big)^+$ 的看涨价差期权, 首先令

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= e^{-\int_t^{T_2}\psi_2(\kappa_2,u)du}, \qquad \tilde{B}=\frac{a_1(T_1)}{a_2(T_2)}e^{-\int_t^{T_1}\psi_1(\kappa_1,u)du}-e^{-\int_t^{T_2}\psi_1(\kappa_1,u)du},\\
\tilde{C} &= \theta_1\left(1-e^{-\int_t^{T_2}\psi_1(\kappa_1,u)du}\right)+\theta_2\left(1-e^{-\int_t^{T_2}\psi_2(\kappa_2,u)du}\right)\\
&\quad -\frac{a_1(T_1)}{a_2(T_2)}\theta_1\left(1-e^{-\int_t^{T_1}\psi_1(\kappa_1,u)du}\right),
\end{aligned}
$$

则价差期权的价格可以表示为 ($\tilde{\kappa}=\frac{K}{a_2(T_2)}-\tilde{C}$),

$$
SC(t,K)=e^{-rt}\Big[F_2(0,T_2)-F_1(0,T_1)-K+\frac{a_2(T_2)}{\pi}\tilde{I}(\lambda)\Big],\tilde{I}(\lambda)=\int_0^{\infty}\tilde{h}(\lambda,\omega)d\omega. \tag{3.14}
$$

(1) 若 $\tilde{B}>0$, 此时要求 $0<\lambda<\frac{\alpha_1}{\tilde{B}}$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(\lambda,\omega)=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m g_n^2 g_m^1\exp\Big(\tilde{\kappa}\lambda-2\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\Big)\cos\Big(\tilde{\kappa}\omega-(n+\beta_2)\arctan\big(\tfrac{\omega\tilde{A}}{\alpha_2+\lambda\tilde{A}}\big)\\
&+(m+\beta_1)\arctan\big(\tfrac{\omega\tilde{B}}{\alpha_1-\lambda\tilde{B}}\big)+(n+m-2)\arctan\tfrac{\omega}{\lambda}\Big).
\end{aligned}\tag{3.15}
$$

(2) 若 $\tilde{B}<0$, 此时要求 $\lambda>0$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}(\lambda,\omega)=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}g_n^2 g_m^3\exp\Big(\tilde{\kappa}\lambda-2\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\Big)\cos\Big(\tilde{\kappa}\omega-(n+\beta_2)\arctan\big(\tfrac{\omega\tilde{A}}{\alpha_2+\lambda\tilde{A}}\big)\\
&-(m+\beta_1)\arctan\big(\tfrac{\omega|\tilde{B}|}{\alpha_1+\lambda|\tilde{B}|}\big)+(n+m-2)\arctan\tfrac{\omega}{\lambda}\Big).
\end{aligned}\tag{3.16}
$$

(3) 若 $\tilde{B}=0$, 此时要求 $\lambda>0$,

$$
\tilde{h}(\lambda,\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^2\exp\Big(\tilde{\kappa}\lambda-2\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\Big)\cos\Big(\tilde{\kappa}\omega-(n+\beta_2)\arctan\big(\tfrac{\omega\tilde{A}}{\alpha_2+\lambda\tilde{A}}\big)+(n-2)\arctan\tfrac{\omega}{\lambda}\Big). \tag{3.17}
$$

g_n^2, g_m^1, g_m^3 分别定义如下:

$$\begin{aligned}
g_n^2 =& l_n^{(\beta_2-1)}(\alpha_2 x_2)\exp\Big\{\beta_2\log\alpha_2-\int_0^t\psi_2(k_2n,u)du+n\log(\tilde{A})+n\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\\
&+\frac{1}{2}\big(\log\Gamma(\beta_2+n)-\log\Gamma(1+n)\big)-(n+\beta_2)\log\sqrt{(\alpha_2+\lambda\tilde{A})^2+(\omega\tilde{A})^2}\Big\},\\
g_m^1 =& l_m^{(\beta_1-1)}(\alpha_1 x_1)\exp\Big\{\beta_1\log\alpha_1-\int_0^t\psi_1(k_1m,u)du+m\log(\tilde{B})+m\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\\
&+\frac{1}{2}\big(\log\Gamma(\beta_1+m)-\log\Gamma(1+m)\big)-(m+\beta_1)\log\sqrt{(\alpha_1-\lambda\tilde{B})^2+(\omega\tilde{B})^2}\Big\}, \quad (3.18)\\
g_m^3 =& l_m^{(\beta_1-1)}(\alpha_1 x_1)\exp\Big\{\beta_1\log\alpha_1-\int_0^t\psi_1(k_1m,u)du+m\log|\tilde{B}|+m\log\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\\
&+\frac{1}{2}\big(\log\Gamma(\beta_1+m)-\log\Gamma(1+m)\big)-(m+\beta_1)\log\sqrt{(\alpha_1+\lambda|\tilde{B}|)^2+(\omega|\tilde{B}|)^2}\Big\}.
\end{aligned}$$

证 易知 $\tilde{A}>0$, $F_2(t,T_2)-F_1(t,T_1)=a_2(T_2)(\tilde{A}X_t^{\psi_2}-\tilde{B}X_t^{\psi_1}+\tilde{C})$, 由 $F_2(t,T_2), F_1(t,T_1)$ 为鞅, 可得

$$SC(t,K)=e^{-rt}\left[F_2(0,T_2)-F_1(0,T_1)-K+\frac{a_2(T_2)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\tilde{\kappa}(-\lambda+i\omega)}\chi_s(-\lambda+i\omega)}{(-\lambda+i\omega)^2}d\omega\right], \quad (3.19)$$

其中 $\chi_s(\lambda)$ 为 $\tilde{A}X_t^{\psi_2}-\tilde{B}X_t^{\psi_1}$ 对应矩母函数, 即

$$\chi_s(\lambda)=\mathbb{E}\big[e^{\lambda(\tilde{A}X_t^{\psi_2}-\tilde{B}X_t^{\psi_1})}\big]=E\big[e^{\lambda\tilde{A}X_t^{\psi_2}}\big]\times E\big[e^{-\lambda\tilde{B}X_t^{\psi_1}}\big],$$

这里因为无法直接判断 $\tilde{B}$ 的符号, 所以要对不同情况分别分析. $\tilde{B}=0$ 和 $\tilde{B}\neq 0$ 可分别根据单因素期货期权、两因素期货期权类似推导, 其中若 $\tilde{B}<0$, 为将其化成对数形式, 写成 $\tilde{B}=-|\tilde{B}|$ 的形式再进行推导. 特别地, 对于 $\tilde{B}>0$, 要求 $\Re(-(-\lambda+i\omega)\tilde{B})<\alpha_1$, 即 $0<\lambda<\frac{\alpha_1}{\tilde{B}}$; $\tilde{B}\leq 0$ 时仅要求 $\lambda>0$, 这也是在具体计算中需要注意的.

4 实证研究

假设 $X_t^{\psi_1}$, $X_t^{\psi_2}$ 均为具有 IG-Sato 可加下标的 CIR 过程, 并且使用 Li Jing 等文章中模型校准的参数进行实证检验, 相关参数如表 1 . 用 C++ 以及 MATLAB 程序设计语言实现了所有期权定价公式. 为了证明本文的方法更加有效快速, 以两因素期货期权为例比较了两方法的运算速度. 使用 2014 年 2 月 25 日市场数据和表 1 中的模型参数, 对每个期权到期时间计算 40 个期权价格, 其中价值状况 (moneyness) 从 0.81 到 1.20 等距分割. 表 2 详细地比较了两种方法所需要的时间. 表 3 根据 2014 年 2 月 25 日的原油、燃料油的相关期货、期权信息以及表 1 中参数, 给出了一些看涨裂解价差期权定价结果的实例. 文中相关数据从彭博终端下载得到.

表 1: 模型参数

θ_1	κ_1	σ_1	x_1	γ_1	μ_1	ν_1	ρ_1
0.585029	0.394129	0.185962	1.0	0	1.0	0.821607	1.021917
θ_2	κ_2	σ_2	x_2	γ_2	μ_2	ν_2	ρ_2
0.604520	0.095331	0.215423	0.520914	0	1.0	0.918643	0.829497

表 2: 计算期权价格所用时间比较 (单位: 秒)

期权到期	0.079452	0.161644	0.249315	0.328767	0.580822	0.671233
LI Jing	498	237	92.5	64.5	29.8	11.4
Fourier	21.1	6.50	4.00	2.10	1.81	1.21

表 3: 价差期权定价结果举例

原油到期	原油初价	燃料油到期	燃料油初价	期权到期	行权价格	期权价格
0.153425	101.12	0.175342	126.2856	0.079452	30.1987	0.3570
0.230137	100.24	0.257534	125.7186	0.161644	30.5743	0.7175
0.315068	99.31	0.312466	125.3154	0.249315	28.6059	1.6854
0.402740	98.29	0.427397	124.9626	0.249315	29.3399	1.6541
0.482192	97.26	0.506849	124.7064	0.328767	30.1910	1.9325
0.572603	96.26	0.594521	124.4586	0.328767	31.0184	1.8931
0.652055	95.39	0.679452	124.2276	0.580822	31.7213	2.6454
0.734247	94.54	0.756164	123.9714	0.580822	32.3745	2.6059
0.813699	93.58	0.846575	123.6354	0.671233	33.0609	2.7981
0.901370	92.64	0.928767	122.9718	0.671233	33.3650	2.7582

注: 原油到期、原油初价、燃料油到期、燃料油初价均指对应期货的到期时间和初始价格.

从上表中的结果可以看到, 利用 Fourier 变换能够得到在不同执行价格、到期时间下的期权价格, 而且通过对两因素期货期权价格的计算时间上的比较, 发现 Fourier 变换方法在计算速度上有明显的优势, 这对于期权定价公式在实际中的应用具有重要的意义.

5 结束语

基于 Fourier 变换方法对于期权进行定价, 为期权定价提供了一种较好的思路. 相对于一般的期权定价方法, Fourier 变换方法主要有以下优势: (1) 运用 ASubCIR 过程刻画商品期货标的价格, 符合商品市场本身的均值回归等特点; (2) 能够更好地拟合两个期货期权的隐含波动率曲面和相应的价差期权隐含相关系数; (3) 给出了执行价格不为 0 的一般情况下的价差期权价格的表达式; (4) 虽然 LI JING 的特征函数展开法也能计算出期权的价格, 但本文的方法定价速度更快更稳定.

参 考 文 献

[1] 李静, 程希骏. 可转换债券中一类两期双边障碍巴黎期权的定价 [J]. 工程数学学报, 2013, 30(3): 361–369.

[2] 化宏宇, 程希骏. 分离交易可转换债研究 [J]. 中国科学院研究生院学报, 2008, 25(4): 439–444.

[3] 化宏宇, 程希骏. 基于跳扩散过程的可转换债券的定价 [J]. 数理统计与管理, 2009, 28(2): 347–351.

[4] 程希骏. 金融资产定价理论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.

[5] 王志明, 朱芳芳. 连续支付红利的 Black-Scholes 期权定价模型的新解法 [J]. 数学杂志, 2008, 28(1): 105–108.

[6] Li Jing, Li Lingfei, Mendoza-Arriaga R. Additive subordination and its applications in finance[R]. Hong Kong: Chinese University of Hong Kong, 2014.

[7] Hikspoors S, Jaimungal S. Energy spot price models and spread options pricing [J]. Intern. J. The. Appl. Fin., 2007, 10(7): 1111–1135.

[8] Li Lingfei, Mendoza-Arriaga R. Ornstein-Uhlenbeck processes time changed with additive subordinators and their applications in commodity derivative models [J]. Oper. Res. Lett., 2013, 41(5): 521–525.

[9] Lim D, Li Lingfei, Linetsky V. Evaluating callable and putable bonds: an eigenfunction expansion approach [J]. J. Econ. Dyn. Contr., 2012, 36(12): 1888–1908.

[10] Andersen L B, Piterbarg V V. Interest rate modeling[M]. Vol. 1, Foundations and Vanilla Models, London: Atlantic Financial Press, 2010.

[11] Jeffrey A, Zwillinger D. Table of integrals, series, and products (7th ed.)[M]. New York: Academic Press, 2007.

FOURIER TRANSFORM APPROACH FOR PRICING CRACK SPREAD OPTIONS

ZHUANG Qian-qian , CHENG Xi-Jun , LI Jing

(*Dpt. of Statistic and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of pricing future options and crack spread options. By using Fourier transform, we get the pricing formula of one-factor future options, two-factor future options and spread options under ASubCIR model. Finally, we show that the price of options can be obtained by C++ and MATLAB, and the problems of slowness and unstablity brought by eigenfunction expansion approach are also solved.

Keywords: ASubCIR model; Fourier transform; future option; spread option

2010 MR Subject Classification: 91B25