Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

指数 Diophantine 方程 $4^x+b^y=(b+4)^2$

朱敏慧 [1], 李小雪 [2]

(1. 西安工程大学理学院, 陕西 西安 710048)

(2. 西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

摘 要: 本文研究了指数 Diophantine 方程 $4^x+b^y=(b+4)^2$ 的解. 设 $b>1$ 是给定的正奇数, 运用有关指数 Diophantine 方程的已知结果以及有关 Pell 方程的 Stormer 定理的推广, 证明了方程 $4^x+b^y=(b+4)^2$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(1,1,1)$.

关 键 词: 指数 Diophantine 方程; Pell 方程; Stomer 定理

MR(2010) **主题分类号**: 11D61 **中图分类号**: O156.7

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)04-0782-05

1 引言

设 $\mathbb{N}$ 是全体正整数的集合. 设 a, b, c 是给定的互素的正整数且 $\min\{a,b,c\}>1$. 最近, 许多学者对方程

$$a^x+b^y=c^z,\ x,y,z\in\mathbb{N} \tag{1.1}$$

的解 (x,y,z) 进行了研究 (参见文献 [2, 7, 8, 9, 11]). 在本文中, 考虑 $a=4$, $c=b+4$ 并且 $b>1$ 是奇整数. 那么, 方程 (1.1) 可写为

$$4^x+b^y=(b+4)^z,\ x,y,z\in\mathbb{N}. \tag{1.2}$$

运用有关指数 Diophantine 方程的已知结果以及有关 Pell 方程的 Stormer 定理的推广 (引理 2.3), 可完全得到方程 (1.2) 的解, 即

定理 方程 (1.2) 仅有解 $(x,y,z)=(1,1,1)$.

2 若干引理

引理 2.1 (见文 [6, 公式 1.76]) 设 n 是任意的正整数, α 和 β 是任意复数, 有

$$\alpha^n+\beta^n=\sum_{i=0}^{[n/2]}\left[{n \atop i}\right](\alpha+\beta)^{n-2i}(-\alpha\beta)^i,$$

这里 $[n/2]$ 是 $n/2$ 的整数部分,

$$\left[{n \atop i}\right]=\frac{(n-i-1)!n}{(n-2i)!i!},\ i=0,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right] \tag{2.1}$$

*收稿日期: 2014-11-03 接收日期: 2015-04-03

基金项目: 国家自然科学基金 (11226038); 陕西省自然科学基础研究计划资助项目 (2014JM2-1010) 资助.

作者简介: 朱敏慧 (1977–), 女, 陕西富平, 副教授, 主要研究方向: 数论的教学与研究.

作者简介: 李小雪.

是正整数.

设 A, B 是正整数满足 $\min\{A,B\} > 1$, $2 \nmid AB$, $\gcd(A,B)=1$, 且 AB 是无平方因子数.

引理 2.2 (见文 [10]) 如果方程

$$AU^2 - BV^2 = 4,\ U,V \in \mathbb{N},\ 2 \nmid UV \tag{2.2}$$

有解 (U,V), 那么它有满足 $U_1\sqrt{A}+V_1\sqrt{B} \le U\sqrt{A}+V\sqrt{B}$ 的唯一解 (U_1,V_1), 这里 (U,V) 通过方程 (2.2) 的全部解. (U_1,V_1) 叫做方程 (2.2) 的最小解. 方程 (2.2) 的任意一个解 (U,V) 可表示为

$$\frac{U\sqrt{A}+V\sqrt{B}}{2} = \left(\frac{U_1\sqrt{A}+V_1\sqrt{B}}{2}\right)^l,\ l \in \mathbb{N},\ \gcd(6,l)=1. \tag{2.3}$$

因此由 (2.3) 式, 对方程 (2.2) 的任意解 (U,V), 有 $V_1 \mid V$.

引理 2.3 方程 (2.2) 没有适合 $V/V_1 > 1$ 的解 (U,V), 且 V/V_1 的每一个素因子都整除 B.

证 设方程 (2.2) 的解 (U,V) 满足 $V/V_1 > 1$, 并且 V/V_1 的每一个素因子都整除 B. 因为 $V/V_1 > 1$, 由引理 2.2, (U,V) 可表示为 (2.3) 式, 其中 $l > 1$. 设

$$\alpha = \frac{U_1\sqrt{A}+V_1\sqrt{B}}{2},\ \beta = \frac{U_1\sqrt{A}-V_1\sqrt{B}}{2}. \tag{2.4}$$

那么有

$$\alpha+\beta = U_1\sqrt{A},\ \alpha-\beta = V_1\sqrt{B},\ \alpha\beta = 1. \tag{2.5}$$

由 (2.3), (2.4) 和 (2.5) 式, 有

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\alpha^l-\beta^l}{V_1\sqrt{B}} = \frac{\alpha^l-\beta^l}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^l+(-\beta)^l}{\alpha+(-\beta)}. \tag{2.6}$$

利用引理 2.1 和 (2.6) 式有

$$\frac{V}{V_1} = \sum_{i=0}^{(l-1)/2} \left[{l \atop i}\right](\alpha-\beta)^{l-2i-1}(\alpha\beta)^i = \sum_{i=0}^{(l-1)/2} \left[{l \atop i}\right](BV_1^2)^{(l-1)/2-i} = \sum_{i=0}^{(l-1)/2} \left[{1 \atop \frac{l-1}{2}-i}\right](BV_1^2)^i. \tag{2.7}$$

设 p 是 V/V_1 的素因子, 因为

$$\left[{l \atop \frac{l-1}{2}}\right] = l, \tag{2.8}$$

由 (2.1) 式, 利用 (2.7) 和 (2.8) 式有 $p \mid l$. 进一步, 因为 $\gcd(6,l)=1$, 由 (2.3) 式, 有

$$p \ge 5. \tag{2.9}$$

设

$$p^r \| \frac{V}{V_1},\ p^s \| B,\ p^t \| l,\ p^{f_i} \| 2i+1,\ i = 1,\cdots,\frac{l-1}{2}. \tag{2.10}$$

那么, 由 (2.9) 和 (2.10) 式, 有

$$f_i \le \frac{\log(2i+1)}{\log p} \le \frac{\log(2i+1)}{\log 5} < i,\ i = 1,\cdots,\frac{l-1}{2}, \tag{2.11}$$

由 (2.1) 式, 有

$$\left[{l \atop \frac{l-1}{2}-i}\right](BV_1^2)^i = l\binom{\frac{l-1}{2}+i}{2i}\frac{(BV_1^2)^i}{2i+1},\ i=1,\cdots,\frac{l-1}{2}, \tag{2.12}$$

因此由 (2.10), (2.11) 和 (2.12) 式有

$$\left[{l \atop \frac{l-1}{2}-i}\right](BV_1^2)^i \equiv 0 \pmod{p^{t+1}},\ i=1,\cdots,\frac{l-1}{2}. \tag{2.13}$$

进一步, 由 (2.8), (2.10) 和 (2.13) 式, 有

$$p^t \| \sum_{i=0}^{(l-1)/2} \left[{l \atop \frac{l-1}{2}-i}\right](BV_1^2)^i. \tag{2.14}$$

如此, 结合 (2.7) 和 (2.14) 式有

$$r=t. \tag{2.15}$$

设 P 通过 V/V_1 的所有不同素因子, 由 (2.10) 和 (2.15) 式有 $l\equiv 0 \pmod{V/V_1}$, 并且

$$l \geq \frac{V}{V_1}, \tag{2.16}$$

又因为 $\left[{l \atop i}\right](i=0,\cdots,(l-1)/2)$ 是正整数, 由 (2.7) 和 (2.8) 式, (2.16) 式是不可能的. 引理证完.

引理 2.4 (见文 [5]) 方程

$$X^2+1=Y^n,\ X,Y,n\in\mathbb{N},\ n\geq 2 \tag{2.17}$$

没有解 (X,Y,n).

引理 2.5 (见文 [1, 4]) 方程

$$X^2+2^m=Y^n,\ X,Y,m,n\in\mathbb{N},\ \gcd(X,Y)=1 \tag{2.18}$$

仅有解 $(X,Y,m,n)=(5,3,1,3),(7,3,5,4)$ 和 $(11,5,2,3)$, 且 $n\geq 3$.

引理 2.6 (见文 [3]) 方程

$$X^2-2^m=Y^n,\ X,Y,m,n\in\mathbb{N},\ \gcd(X,Y)=1,\ Y>1,\ m\geq 2 \tag{2.19}$$

仅有解 $(X,Y,m,n)=(71,17,7,3)$, 且 $n\geq 3$.

3 定理的证明

设 (x,y,z) 是方程 (1.2) 的一组解.

如果 $2\mid y$ 且 $2\mid z$, 那么由 (1.2) 式有 $(b+4)^{z/2}+b^{y/2}=2^{2x-1}$ 和 $(b+4)^{z/2}-b^{y/2}=2$. 即有

$$(b+4)^{z/2}=2^{2x-2}+1 \tag{3.1}$$

和

$$b^{y/2}=2^{2x-2}-1. \tag{3.2}$$

由引理 2.4 和 (3.1) 式, 有 $z/2=1$, $b=2^{2x-2}-3$ 和 $2^{2x-2}\equiv 3 \pmod b$.

另一方面, 由 (3.2) 式可得 $2^{2x-2}\equiv 1 \pmod b$, 因此有 $2\equiv 0 \pmod b$. 又因为 $b>1$ 是奇整数, 故不可能.

如果 $2\mid y$ 且 $2\nmid z$, 那么 (2.18) 式有解

$$(X,Y,m,n)=\left(b^{\frac{y}{2}},b+4,2x,z\right), \tag{3.3}$$

并且 $2\nmid n$. 由引理 2.5 和 (3.3) 式, 有 $z=1$. 因此由 (1.2) 式, 有 $b+4=(b+4)^z>b^y\geq b^2$, 矛盾.

如果 $2\nmid y$ 且 $2\mid z$, 那么 (2.19) 式有解

$$(X,Y,m,n)=\left((b+4)^{\frac{z}{2}},b,2x,y\right), \tag{3.4}$$

且 $2\nmid n$. 由引理 2.6 和 (3.4) 式, 有 $y=1$. 因此由 (1.2) 式, 有 $b=b^y=\left((b+4)^{\frac{z}{2}}\right)^2-(2^x)^2\geq (b+4)^{\frac{z}{2}}+2^x>b+4$, 矛盾.

如果 $2\nmid y$ 且 $2\nmid z$, 因为 $b^{y-1}\equiv(b+4)^{z-1}\equiv 1 \pmod 8$, 那么由 (1.2) 式有 $2^{2x}\equiv (b+4)^z-b^y\equiv(b+4)-b\equiv 4 \pmod 8$ 和 $x=1$. 因此有

$$(b+4)\left((b+4)^{\frac{z-1}{2}}\right)^2-b\left(b^{\frac{y-1}{2}}\right)^2=4, \tag{3.5}$$

由 (3.5) 式有

$$(b+4)U^2-bV^2=4,\ U,V\in\mathbb{N},\ \gcd(U,V)=1 \tag{3.6}$$

有解

$$(U,V)=\left((b+4)^{\frac{z-1}{2}},b^{\frac{y-1}{2}}\right). \tag{3.7}$$

显然, 方程 (3.6) 的最小解是 $(U_1,V_1)=(1,1)$. 因此由引理 2.3 和 (3.7) 式, 有 $y=z=1$. 因此方程 (1.2) 仅有解 $(x,y,z)=(1,1,1)$. 定理证完.

参 考 文 献

[1] Cohn J H E. The Diophantine equation $x^2+2^k=y^n$[J]. Arch. Math. Basel., 1992, 59(4): 341–344.

[2] He B, Togbe A. The exponential Diophantine equation $n^x+(n+1)^y=(n+2)^z$ revisited[J]. Glasgow Math J., 2009, 51(4): 659–667.

[3] Ivorra W. Sur les equations $x^p+2^\beta y^p=z^2$ et $x^p+2^\beta y^p=2z^2$[J]. Acta Arith., 2003, 108(4): 327–338.

[4] Le M H. On Cohn's conjecture concerning the Diophantine equation $x^2+2^m=y^n$[J]. Arch Math Basel, 2002, 78(1): 26–35.

[5] Lebesque V. A. Sur impossibilite, ennombres entiers, de I'equation $x^m=y^2+1$[J]. Nouv. Ann. Math., 1850, 9(1): 178–181.

[6] Lidl R, Niederreiter H. Finite fields[M]. Massachusetts: Addison-Wesley, Reading, 1983.

[7] Luca F. On the system of Diophantine equations $a^2+b^2=(m^2+1)^r$ and $a^x+b^y=(m^2+1)^z$[J]. Acta Arith., 2012, 153(4): 373–392.

[8] Miyazaki T. Generalization of classical results on Jesmanowicz' conjecture concerning Pythaqorean triples[J]. J. Number The., 2013, 133(3): 583–595.

[9] Miyazaki T, Topbe' A. The Diophantine equation $(2am-1)^x+(2m)^y=(2am+1)^z$[J]. Int. J. Number The., 2012, 8(8): 2035–2044.

[10] Negell T. On a special class of diophantine equations of the second degree[J]. Ark. Mat., 1954, 3(1): 51–65.

[11] 林木元. 一个指数 Diophantine 方程的正整数解 [J]. 数学杂志, 2006, 26(4): 409–414.

THE EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATION $4^x+b^y=(b+4)^2$

ZHU Min-hui[1], LI Xiao-xue[2]

(*1.School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China*)

(*2.School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

Abstract: In this paper, we study the solution of the exponential Diophantine equation $4^x+b^y=(b+4)^2$. Let b be a fixed odd positive integer with $b>1$, using some known results on exponential Diophantine equations and an extension of the stormer theorem on Pell's equations, we prove that the equation $4^x+b^y=(b+4)^2$ has only the positive integer solution $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Keywords: exponential Diophantine equation; Pell's equations; Stormer theorem

2010 MR Subject Classification: 11D61