

关于一类变分不等式的 LQP 算法

吴富平, 黄崇超

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究一类 ξ - 单调的变分不等式问题. 利用 KKT 条件将原问题转换为非线性互补问题 (nonlinear complementarity problem, NCP) 的方法, 获得了基于 logarithmic-quadratic proximal (LQP) 的算法及其改进形式, 推广了 LQP 算法的适用范围.

关键词: 变分不等式; LQP 算法; 非线性互补问题

MR(2010) 主题分类号: 65K10; 90C30

中图分类号: O221.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)02-0419-06

1 引言

单调向量函数在变分不等式和互补问题 (variational inequality/complementarity problem, VI/CP) 中有着重要意义, 正如凸函数在优化问题中有着重要作用一般. 特别地, 在 ξ - 单调条件下, VI 解的唯一性和存在性能够得到保证 (参考文献, 如 [1] 中定理 2.3.3). 本文研究一类 ξ - 单调的变分不等式问题 (I), 记为 $VI(K, F)$, 问题表述如下: 求解 $x \in K \subseteq R^n$, 使得

$$(y - x)^T F(x) \geq 0, \forall y \in K, \quad (1)$$

$K = \{x | g^i(x) \leq 0, i \in I\}, I = \{1, 2, \dots, m\}, g^i(x)$ 是凸函数, $F(x)$ 是 ξ - 单调的, 且 $0 < \xi \leq 2$, 即存在常数 $\alpha > 0, 0 < \xi \leq 2$ 使得

$$(y - x)^T (F(y) - F(x)) \geq \alpha \|x - y\|_2^\xi, \forall x, y \in R^n. \quad (2)$$

当 $\xi = 2$ 时, 称 $F(x)$ 是一致单调的.

对于上述类型的问题, 至今已深入研究了方法, 具体可参考文献 [1-3]. 本文中, 我们首先利用 KKT 条件 (假设 $g(x)$ 在解 x 处满足 LICQ) 将原问题转换成如下等价问题 (II): 求解向量 $x \in R^n, \lambda \in R^m$ 使得

$$0 \leq \lambda \perp -g(x) \geq 0, F(x) + \sum_{i=0}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x) = 0, \quad (3)$$

λ 是关于问题 (I) 的 Lagrangian 乘子向量. 经分析, 问题 (II) 又可以转换为关于 λ 的非线性互补问题. 由此我们可以用那些解决 NCP 的算法解决原问题.

*收稿日期: 2015-01-19

接收日期: 2015-04-21

基金项目: 复杂不确定性多主体多目标合作博弈与协商谈判的合作机制与合作模式基金资助 (71231007).

作者简介: 吴富平 (1990-), 男, 安徽省枞阳县, 硕士, 主要研究方向: 最优化理论与算法.

非线性互补问题 (NCP) 即求解向量 $x \in R^n$, 使得

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T \cdot F(x) = 0, \quad (4)$$

其中 $F(x) : R^n \rightarrow R^n$. 若 $F(x)$ 关于 $R_+^n = \{x \in R^n | x \geq 0\}$ 是连续单调的, 且当 $F(x) = Mx + q$ ($M \in R^{n \times n}, q \in R^{n \times 1}$) 是线性映射时, 这类问题已被大量研究, 尤其当 M 是半正定矩阵时, 已有很多有效算法被提出, 如文 [4]; 而当 $F(x)$ 非线性, 且问题 (4) 的解集非空时, 邻近点算法 (proximal point algorithm, PPA) 是一个相当有效的工具. PPA 是由 Martinet 提出 (参看文献 [5]), 并经很多研究人员推广, 如文 [6-7], 已发展出一套成熟的理论框架. 给定 $x^k \in R_+^n, \beta_k \geq \beta > 0$, 新的迭代点 x^{k+1} 是如下 NCP 的唯一解:

$$(PPA) \quad x \geq 0, \beta_k \cdot F(x) + (x - x^k) \geq 0 \text{ 及 } x^T (\beta_k \cdot F(x) + (x - x^k)) = 0. \quad (5)$$

相比于问题 (4), 问题 (5) 是强单调的, 更便于操作.

本文所用的 LQP 法, 最初出现于文献 [8-9], 是上述 PPA 的一种推广. 由于 LQP 法所产生的迭代序列严格位于 R_+^n 的内部 (记为 R_{++}^n), 因此非常适合用于求解 (4) 类问题, 且每步迭代任务等价于求解方程组.

具体地, 给定 $x^k \in R_{++}^n := \text{int } R_+^n, \beta_k \geq \beta > 0$, 由 LQP 法产生的新的迭代点 x^{k+1} 是如下非线性互补问题的唯一解: 求解向量 $x \in R^n$, 使得

$$x \geq 0, \beta_k F(x) + \nabla_x D(x, x^k) \geq 0 \text{ 及 } x^T (\beta_k F(x) + \nabla_x D(x, x^k)) = 0,$$

其中 $\nabla_x D(x, x^k) = (x - x^T) + \mu(x^k - X_k^2 \cdot x^{-1})$, 参数

$$\mu \in (0, 1), \beta_k > 0, X_k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k), x^{-1}$$

的第 j 元为 $1/x_j (j = 1, 2, \dots, n)$. 由于满足 $D(x^k, x^k) = 0$ 的 $\nabla_x D(x, x^k)$ 的积分形式为

$$D(x, x^k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \mu \sum_{j=1}^n ((x_j^k)^2 \log \frac{x_j^k}{x_j} + x_j x_j^k - (x_j^k)^2), & x \in R_{++}^n, \\ +\infty, & \text{其他,} \end{cases}$$

故称为 LQP 法, 其中 $\nabla_x D(x, x^k)$ 的第二项保证了新的迭代点位于 R_{++}^n . 而上述非线性互补问题等价于求解以下方程组的正值向量解:

$$\beta_k F(x) + \nabla_x D(x, x^k) = 0,$$

即

$$\beta_k \cdot F(x) + x - (1 - \mu)x^k - \mu \cdot X_k^2 \cdot x^{-1} = 0. \quad (6)$$

一般来讲, 问题 (6) 比 (4) 要更加容易处理. 因此 LQP 法提供了一种全新的算法 – 即通过求解如 (6) 形式的方程组来解决问题 (4).

对于问题 (III), 用 LQP 法我们可得到下述迭代形式: 给定 $\lambda^k \in R_{++}^m, \lambda^{k+1}$ 是以下方程组的解

$$\begin{cases} -\beta_k \cdot g(x) + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \\ F(x) + (\nabla g(x))^T \cdot \lambda = 0, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Psi_k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_m^k)$, 向量 λ^{-1} 的第 j 元为 $1/\lambda_j (j = 1, 2, \dots, m)$.

2 分析

我们首先给出引理 2.1, 其证明可参见文献 [11] 中定理 2.4.3.

引理 2.1 若映射 $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$ 在开凸集 $D_0 \subset D$ 上是连续可微的, F 在 D_0 上单调的当且仅当 $\nabla F(x)$ 对所有 $x \in D_0$ 是半正定的. 特别地, 当 F 是 ξ -单调的, 且 $0 < \xi \leq 2$ 时, $\nabla F(x)$ 对所有 $x \in D_0$ 是正定的.

再分析 (3) 式, 并记 $G(x, \lambda) = F(x) + (\nabla g(x))^T \cdot \lambda$, 可得引理 2.2.

引理 2.2 当 $\lambda \geq 0$ 时, 由 $G(x, \lambda) = 0$ 唯一决定 $x = x(\lambda)$.

证 $g_i(x)$ 是凸函数, 可知 $\nabla g_i(x)$ 是单调的 ($\forall x \in R^n$) (参见文献 [11] 中定理 3.4.5). 又 $F(x)$ 是 ξ -单调的, $\forall \lambda \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)^T (G(x_1, \lambda) - G(x_2, \lambda)) \\ &= (x_1 - x_2)^T (F(x_1) - F(x_2)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot (x_1 - x_2)^T (\nabla g_i(x_1) - \nabla g_i(x_2)) \\ &\geq \alpha \|x_1 - x_2\|_2^\xi (\forall x_1, x_2 \in R^n, \lambda \geq 0). \end{aligned}$$

因此 $\forall \lambda \geq 0$, $G(x, \lambda)$ 关于 $x \in R^n$ 是 ξ -单调的. 由此可得 $\forall \lambda \geq 0$, $G(x, \lambda) = 0$ 有唯一解 $x = x(\lambda)$.

对方程 $G(x, \lambda) = 0$ 用隐函数定理, 有

$$\nabla_x G(x, \lambda) \cdot \nabla x(\lambda) + \nabla_\lambda G(x, \lambda) = 0, \quad (8)$$

$F(x)$ 是 ξ -单调的, 由引理 2.1, $\nabla F(x)$ 对所有 $x \in R^n$ 是正定的, 计算 $G(x, \lambda)$ 对于 x 的偏导数

$$\begin{aligned} \nabla_x G(x, \lambda) &= \nabla_x (F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla g_i(x)) \\ &= \nabla F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla^2 g_i(x), \end{aligned}$$

$\nabla^2 g_i(x)$ 是 $g_i(x)$ 的 Hessian 矩阵. $g_i(x)$ 是凸函数, 可知 $\nabla^2 g_i(x)$ 是半正定的 ($\forall x \in R^n$). 因此 $\nabla_x G(x, \lambda)$ ($\forall x \in R^n, \lambda \geq 0$) 是正定的, $\nabla_x^{-1} G(x, \lambda)$ ($\forall x \in R^n, \lambda \geq 0$) 是正定的. 由 (8) 式得

$$\begin{aligned} \nabla x(\lambda) &= -(\nabla_x G(x, \lambda))^{-1} \cdot \nabla_\lambda G(x, \lambda) \\ &= -(\nabla F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla^2 g_i(x))^{-1} \cdot (\nabla g(x))^T. \end{aligned}$$

由上述分析, 问题 (II) 等价于求解下述问题 (III): 求解向量 $\lambda \in R^m$ 使得 $0 \leq \lambda \perp -g(x(\lambda)) \geq 0$, 其中 $x(\lambda)$ 由方程组 $G(x, \lambda) = 0$ 决定. 记 $h(\lambda) = -g(x(\lambda))$, 计算 $\nabla h(\lambda)$

$$\begin{aligned} \nabla h(\lambda) &= -\nabla g(x) \cdot \nabla x(\lambda) \\ &= \nabla g(x) \cdot (\nabla F(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \nabla^2 g_i(x))^{-1} \cdot (\nabla g(x))^T, \end{aligned}$$

故 $\nabla h(\lambda) \forall \lambda \geq 0$ 是半正定的, 由引理 2.1, $h(\lambda)$ 关于 $\lambda \geq 0$ 是单调的.

因为原问题 (I) 有唯一解, 可知问题 (III) 的解集非空, 问题 (III) 可用 LQP 法得到以下迭代形式

$$-\beta_k \cdot g(x(\lambda)) + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0,$$

于是得到一般的等价形式:

$$\begin{cases} -\beta_k \cdot g(x) + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \\ F(x) + (\nabla g(x))^T \cdot \lambda = 0. \end{cases}$$

算法 2.1

步骤 0 初始值: 给定 $\varepsilon > 0, \mu \in (0, 1), \beta > 0, \beta_k \geq \beta, \lambda^0 > 0$. 令 $k = 0$.

步骤 1 迭代: 已知 λ^k, λ^{k+1} 是下列方程组的解

$$\begin{cases} -\beta_k \cdot g(x) + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \\ F(x) + (\nabla g(x))^T \cdot \lambda = 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\Psi_k = \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_m^k), \lambda^{-1}$ 的第 j 元 $1/\lambda_j (j = 1, 2, \dots, m)$.

步骤 2 收敛条件: 若 $\|\lambda^k - \lambda^{k+1}\|_\infty < \varepsilon$, 停止迭代; 否则令 $k := k + 1$, 并返回步骤 1.

收敛性分析

类似文献 [8, 12–13] 中 LQP 法的收敛性分析, 同样可得由算法 2.1 所得序列 $\{\lambda^k\}$ 的收敛性. 又由隐函数定理可知 $x(\lambda) (\lambda \geq 0)$ 的连续性, 故当 $\lambda^k \rightarrow \lambda^*$ 时, $x^k \rightarrow x^* (x^{k+1}$ 由方程组 (9) 所得).

注 2.1 当 $g(x) = -x$, 原问题即为 NCP, 相应的迭代方程组变为

$$\begin{cases} \beta_k \cdot x + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \\ F(x) - \lambda = 0. \end{cases}$$

注 2.2 类似方法可用于下述数学规划问题:

$$\begin{aligned} & \min f(x), \\ & x \in K = \{x \in R^n | g(x) \leq 0\}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x) \leq 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $f(x)$ 是一致凸函数, $g_i(x)$ 是凸函数. 显然 $\nabla f(x)$ 是一致单调算子, 由 KKT 条件可得类似 (3) 式所示问题, 便得到相同的基于 LQP 的算法.

3 改进算法

受文献 [10, 12–13] 中改进的 LQP 算法的启发, 下面给出算法 2.1 的改良算法.

算法 3.1 令 $\mu, \nu \in (0, 1), \beta > 0$, 给定 $\lambda^k > 0$ 及 $\beta_k \geq \beta$, 改进算法中新的迭代点 λ^{k+1} 由下述步骤产生:

对数 - 二次邻近步 解方程组

$$\begin{cases} -\beta_k \cdot g(x) + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \\ F(x) + (\nabla g(x))^T \cdot \lambda = 0, \end{cases} \quad (10)$$

解记为 $(x^{k+1}, \tilde{\lambda}^k)$.

扩展 新的迭代点 $\lambda^{k+1}(\alpha)$ 为下述方程组的正解

$$-\alpha \cdot \beta_k \cdot g(x^{k+1}) + \lambda - (1 - \nu) \cdot \lambda^k - \nu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \quad (11)$$

其中 α 是正的标量, 据文 [12] 中的讨论, 选取 $0 \leq \nu \leq \frac{\mu^2}{2-\mu^2}$, $\alpha = \frac{1-\nu}{(1+\mu)^2}$.

注 3.1 比较前面两种算法, 可知 $\tilde{\lambda}^k$ 是算法 2.1 中的新的迭代点, 算法 3.1 增加的计算量相当小. 事实上, 方程组 (11) 的解的每个元素可以由下面的显式直接计算可得

$$\lambda_j^{k+1} = \frac{(1 - \nu)\lambda_j^k + \alpha\beta_k \cdot g_j(x^{k+1}) + \sqrt{((1 - \nu)\lambda_j^k + \alpha\beta_k \cdot g_j(x^{k+1}))^2 + 4\nu(\lambda_j^k)^2}}{2},$$

而且, 当 $\lambda^k > 0$ 时, 容易验证 $\lambda^{k+1} > 0$, 因此算法 3.1 产生的所有迭代点均为 R_{++}^m 的内点, 从而新算法很好的保留的原 LQP 算法的理论性质.

算法 3.2 类似于文献 [10] 中所讨论的基于 LQP 的内点预估 - 校正算法, 可以下列步骤产生新的迭代点 λ^{k+1} : 给定 $\mu \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $\lambda^k > 0$, $\beta_k \geq \beta$.

预测 求解 $\tilde{\lambda}^k \in R_{++}^m$, $x^{k+1} \in R^n$, 以及 $\zeta^k \in R^m$, 使得下式成立

$$\begin{cases} \zeta^k := -\beta_k \cdot g(x^{k+1}) + \tilde{\lambda}^k - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot (\tilde{\lambda}^k)^{-1} \approx 0, \\ F(x^{k+1}) + (\nabla g(x^{k+1}))^T \cdot \tilde{\lambda}^k = 0, \end{cases}$$

其中 ζ^k 满足 $\|\zeta^k\| \leq \eta\sqrt{1 - \mu^2} \|\lambda^k - \tilde{\lambda}^k\|$.

校正 取下面非线性方程组的正解为算法新的迭代点 λ^{k+1} :

$$-\tau \cdot \beta_k \cdot g(x^{k+1}) + \lambda - (1 - \mu) \cdot \lambda^k - \mu \cdot \Psi_k^2 \cdot \lambda^{-1} = 0, \quad (12)$$

τ 可看作纠正步骤 (12) 的步长. 据文 [10] 中的讨论, τ 值可由下面的方法选取:

$$\tau := \tau_k = \frac{(1 - \mu)(\|\lambda^k - \tilde{\lambda}^k\|^2 + (\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^T \zeta^k)}{(1 + \mu)^2 \|\lambda^k - \tilde{\lambda}^k + \frac{1}{1+\mu}\zeta^k\|^2}.$$

当然, τ 值也可以按文 [13] 中所讨论的策略选取.

4 结论

由 KKT 条件和隐函数定理, 得到原问题 (I) 的等价形式, 即问题 (III). 问题 (III) 是典型的 NCP, 因此可用 LQP 法解决, 且可以保证所有迭代点均位于 R_{++}^m 的内部. 最后, 受文献 [10, 12-13] 提出的改进 LQP 算法的启发, 提出了相应的算法 2.1 的两种改进算法.

参 考 文 献

- [1] Fecchinei F, Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems, vol. I, II[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [2] Kinderlehrer D, Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications[M]. New York: Academic Press, 2003.
- [3] Glowinski R. Numerical methods for nonlinear variational problems[M]. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [4] 王雪, 黄崇超, 柏钦玺. 求解线性互补问题的一种新的势下降内点算法 [J]. 数学杂志, 2006, 26(6): 685–688.
- [5] Martinet, B. Regularization d' inequations variationnelles par approximations sucesives[J]. Rev. Fr. Inform. Rech. Opér., 1970, 4: 154–159.
- [6] Rockafellar R T. Monotone operators and the proximal point algorithm[J]. SIAM J. Control Optim., 1976, 14(5): 877–898.
- [7] Teboulle M. Convergence of proximal-like algorithms[J]. SIAM J. Optim., 1997, 7: 1069–1083.
- [8] Auslender A, Teboulle M, Ben-Tiba S. A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities[J]. Comput. Optim. Appl., 1999, 12: 31–40.
- [9] Auslender A, Haddou M. An interior proximal point method for convex linearly constrained problems and its extension to variational inequalities[J]. Math. Prog., 1995, 71: 77–100.
- [10] He B S, Liao, L Z, Yuan X M. A LQP based interior prediction-correction method for nonlinear complementarity problems[J]. J. Comput. Math., 2006, 24: 33–44.
- [11] Ortega J M, Rheinboldt W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables[M]. Philadelphia: SIAM, 2000.
- [12] Bnouhachem A, Yuan X M. Extended LQP method for monotone nonlinear complementarity problems[J]. J. Optim. The. Appl., 2007, 135: 343–353.
- [13] Min Li, Yuan Xiaoming. An improved LQP-based method for solving nonlinear complementarity problems[J]. Front. Math. China, 2010, 5(1): 23–35.

A NEW APPROACH BASED ON LQP METHOD FOR A CLASS OF VARIATIONAL INEQUALITIES

WU Fu-ping, HUANG Chong-chao

(*School of Mathematics and Statistics, WuHan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we study a class of ξ -monotone variational inequalities. Using the KKT conditions and by transforming the original problem into the NCP, we obtain its parallel algorithm based on the LQP method and improved algorithms, which extend the application range of the LQP method.

Keywords: variational inequalities; logarithmic-quadratic proximal method; nonlinear complementarity problem

2010 MR Subject Classification: 65K10; 90C30