Vol. 36 (2016)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Brown 运动在 Hölder 范数下的拟必然 Strassen 重对数律的收敛速率

黎协锐 [1], 刘永宏 [2]

(1. 广西财经学院信息与统计学院, 广西 南宁 530003)
(2. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

摘 要: 本文研究了 Brown 运动的泛函极限问题. 利用 Brown 运动在 Hölder 范数下关于容度的大偏差与小偏差, 获得了 Brown 运动在 Hölder 范数下的 Strassen 型重对数律的拟必然收敛速率, 推广了文 [2] 中的结果.

关 键 词: Brown 运动; 拟必然收敛速率; Hölder 范数
MR(2010) **主题分类号**: 60F10; 60F15; 60F17 **中 图 分 类 号**: O211.4
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2016)02-0310-09

1 引言

设 (B, H, μ) 是抽象的 Wiener 空间, 具有 Ornstein-Uhlenbeck 算子 $\mathcal{L}$. 用 $D^{r,p} = (1 - \mathcal{L})^{-\frac{r}{2}} L^p$ 记 Sobolev 空间 $D^{r,p}$, 赋予范数

$$\|F\|_{r,p} = \|(1-\mathcal{L})^{r/2} F\|_p, \quad F \in D^{r,p},\ r > 0,\ 1 \le p < \infty,$$

其中 L^p 记 (B, μ) 上实值函数 L^p - 空间.

(r, p) - 容度的定义如下: 对 B 上开集 O,

$$C_{r,p}(O) = \inf\{\|F\|_{r,p}^p : F \ge 1,\ \mu\text{- a.s. on } O\},$$

对任意集 $A \subset B$,

$$C_{r,p}(A) = \inf\{C_{r,p}(O) : A \subset O \subset B,\ O \text{ 是开集}\}.$$

容度是 B 上的集函数具有性质: 它可以取正值即使对 μ - 零集, 而容度为零的集合总有 μ - 测度零. 容度 $C_{r,p}$ 有下面性质:

- 若 $A_n \uparrow$, 则 $C_{r,p}(\cup_n A_n) = \sup_n C_{r,p}(A_n)$;
- $C_{r.p}(\cup_{n=1}^\infty A_n) \le \sum\limits_{n=1}^\infty C_{r.p}(A_n)$;
- 第一 Borel-Cantelli 引理成立: 若 $\sum\limits_{n=1}^\infty C_{r.p}(A_n) < \infty$, 则 $C_{r,p}(\limsup_n A_n) = 0$.

容度 $C_{r,p}$ 和 μ 之间的重要差别是对 $C_{r,p}$ 第二 Borel-Cantelli 引理不成立, 而对 μ 成立.

*收稿日期: 2014-05-05 接收日期:2014-10-16
基金项目: 广西教育厅高校科研基金资助 (YB2014117); 桂林电子科技大学科研基金资助 (LD14052B); 广西财经学院数量经济学自治区级重点实验室资助 (2015ZDKT06).

作者简介: 黎协锐 (1964–), 男, 广西梧州, 副教授, 主要研究方向: 贝叶斯估计理论、概率论极限理论.

设 $\{w(t) : t \geq 0\}$ 是 d - 维标准 Brown 运动. $C_{r,p}$ - 容度大偏差原理被 Yoshida [1] 建立, Brown 运动在 Hölder 范数下的收敛速率被 Baldi 和 Roynette [2] 得到. 近几年 Brown 运动在 Hölder 范数下拟必然泛函极限定理被广泛研究. 例如, Chen 和 Balakrishnan 得出了 Brown 运动在 Hölder 范数下关于 $C_{r,p}$ - 容度的 Strassen 泛函重对数律. 本文中, 我们研究了 Brown 运动在 Hölder 范数下关于 $C_{r,p}$ - 容度的 Strassen 泛函重对数律的收敛速率, 同时加强了文 [2] 中类似结果.

2 大偏差和小偏差

设 $\mathcal{C}$ 记从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}^d$ 连续函数空间赋予通常范数 $\|f\| := \sup\limits_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$. 记 $\mathcal{C}_0 := \{f \in \mathcal{C} : f(0) = 0\}$,

$$\mathcal{H}^d := \left\{ f \in \mathcal{C}_0 \, : \, f(t) = \int_0^t \dot{f}(s)ds, \ \|f\|^2_{\mathcal{H}^d} := \int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

显然 $\mathcal{H}^d$ 是 Hilbert 空间, 具有内积

$$\langle r_1, r_2 \rangle_{\mathcal{H}^d} = \int_0^1 (\dot{r}_1(s), \dot{r}_2(s))ds.$$

如 μ 是 Wiener 测度, 则 $(\mathcal{C}_0, \mathcal{H}^d, \mu)$ 构成抽象的 Wiener 空间. 对 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 定义两个 Banach 空间如下

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^\alpha &= \left\{ f \in \mathcal{C}_0 \, : \, \|f\|_\alpha = \sup_{s,\ t\in[0,1],\ s\neq t} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}; \\
\mathcal{C}^{\alpha,\, 0} &= \left\{ f \in \mathcal{C}^\alpha \, : \, \lim_{\delta\to 0} \sup_{s,\ t\in[0,1],\ 0<|t-s|<\delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0 \right\},
\end{aligned}$$

则 $\mathcal{C}^{\alpha,\,0}$ 是 $\mathcal{C}^\alpha$ 的闭凸子空间. 由文 [6, 定理 2.4], 易证 $(\mathcal{C}^{\alpha,\,0}, \mathcal{H}^d, \mu)$ 也是抽象的 Wiener 空间.

设函数 $I : B \to [0, \infty]$ 定义为 $I(z) = \frac{\|z\|^2_{\mathcal{H}^d}}{2}$, 若 $z \in \mathcal{H}^d$, $= \infty$ 否则. 用文 [3, 定理 2.1] 和文 [4, 定理 2.2], 有下面结果:

定理 2.1 设 $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是 $\mathcal{C}^{\alpha,0}$ 上一簇双射, 连续线性算子, 使得对所有 Borel 子集 $A \subset \mathcal{C}^{\alpha,0}$ 和 $\varepsilon > 0$,

$$\mu(S_\varepsilon^{-1}A) = \mu(\varepsilon^{-1/2}A).$$

那么对任何 $A \subset \mathcal{C}^{\alpha,0}$ 和 $(r,p) \in [0,\infty) \times (1,\infty)$, 下面结论成立

$$-\inf_{f\in \mathring{A}} I(f) \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log C_{r,p}(S_\varepsilon^{-1}A) \leq \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log C_{r,p}(S_\varepsilon^{-1}A) \leq -\inf_{f\in \bar{A}} I(f).$$

设 $K = \{f \in \mathcal{H}^d : I(f) \leq 1\}$. 在文 [2] 中, 作者们证明存在常数 $k(\alpha) > 0$ 使得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2/(1-2\alpha)} \log \mu\{\|w\|_\alpha \leq \varepsilon\} = -k(\alpha), \tag{2.1}$$

并且对每个 $f \in K$, $\gamma = (1-2\alpha)/2$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1/\gamma} \log \mu\left(\left\| w - \frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}} \right\|_\alpha \leq r\varepsilon \right) = -I(f) - \frac{k(\alpha)}{r^{1/\gamma}}. \tag{2.2}$$

陈述本节的主要结果如下:

定理 2.2 设 $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$, $f\in K=\{f\in\mathcal{H}^d\ :\ I(f)\le 1\}$, $k(\alpha)>0$ 如式 (2.1) 中定义. 那么, 对任何 $\tau>0$, $t\ge 0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/\gamma}\log C_{r,p}\left(\left\|\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon\tau\right)\\=\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/\gamma}\log\mu\left(\left\|\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon\tau\right)\\=\ &-\frac{k(\alpha)}{\tau^{1/\gamma}}-I(f).\end{aligned}$$

为证明定理 2.2, 下面的引理被用到.

引理 2.1 (见文 [7, 引理 2.1]) 设 k 是一个自然数, 给定 $q_1,q_2\in(1,\infty)$ 使得 $\frac{1}{p}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$. 那么, 存在常数 $c=c(k,p,q_1,q_2)>0$, 使得对任何 $\delta\in(0,1)$, $F_i\in D^{k,kq_1}$ 和 $-\infty<a_i<b_i<\infty$,

$$\begin{aligned}&C_{k,p}\left(\bigcap_{i=1}^n\left\{a_i<\tilde{F}_i(z)<b_i\right\}\right)^{1/p}\\\le\ &c\left(\frac{n}{\delta}\right)^k\left(1+\max_{1\le i\le n}\|F_i\|_{k,kq_1}\right)^k\mu\left(\bigcap_{i=1}^n\{a_i-\delta<F_i(z)<b_i+\delta\}\right)^{1/q_2}\end{aligned}$$

成立, 其中 $\tilde{F}_i$ 记 F_i 的一个拟必然修正.

引理 2.2 设 k,p,q_1,q_2 如引理 2.1 定义. 对任何 $f\in K$, $\varepsilon>0$, 令

$$F_\varepsilon^{(i)}(w)=\left\|\varepsilon\left(\frac{w(t_i+\cdot h_i)-w(t_i)}{\sqrt{h_i}}\right)-f\right\|_\alpha,\quad 0\le t_i<\infty,\ h_i>0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

那么存在一个常数 $c=c(k,p,q_1,f)>0$, 对任何 $\delta\in(0,1],\varepsilon\in(0,1]$, 有

$$\begin{aligned}&C_{k,p}\left(\bigcap_{i=1}^n\{z:a_i<F_\varepsilon^{(i)}(z)<b_i\}\right)^{\frac{1}{p}}\\\le\ &c\,\delta^{-2k^2-k}n^k\mu\left(\bigcap_{i=1}^n\{z:a_i-\delta<F_\varepsilon^{(i)}(z)<b_i+\delta\}\right)^{\frac{1}{q_2}}.\end{aligned}$$

证 类似文 [7] 中引理 2.2 的证明.

定理 2.2 的证明 设 k,p,q_1,q_2 如引理 2.1 中定义. 因为 $C_{r,p}(\cdot)\ge\mu(\cdot)$, 只需证明

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/\gamma}\log C_{r,p}\left(\left\|\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon\tau\right)\\\le\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/\gamma}\log\mu\left(\left\|\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon\tau\right).\end{aligned}$$

令 $k=[r]+1$. 由容度的性质 $C_{r_1,p}(\cdot)\le C_{r_2,p}(\cdot)(r_1\le r_2)$ 与引理 2.2, 对任何 $1>\delta>0$, $c_0>0$, 有

$$\begin{aligned}
& C_{r,p}\left(\left\|\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon\tau\right)^{1/p}\\
= \ & C_{r,p}\left(\left\|\varepsilon^{1/(2\gamma)}\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-f\right\|_\alpha\le\varepsilon^{1/(2\gamma)+1}\tau\right)^{1/p}\\
\le \ & C_{k,p}\left(\left\|\varepsilon^{1/(2\gamma)}\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-f\right\|_\alpha\le\varepsilon^{1/(2\gamma)+1}\tau\right)^{1/p}\\
\le \ & c_0(\varepsilon^{1/(2\gamma)+1}\delta)^{-2k^2-k}\mu\left(\left\|\varepsilon^{1/(2\gamma)}\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-f\right\|_\alpha\le\varepsilon^{1/(2\gamma)+1}(\tau+\delta)\right)^{1/q_2}.
\end{aligned}$$

由式 (2.2), 得到

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{1/\gamma}\log C_{r,p}\left(\left\|\frac{w(t+h\cdot)-w(t)}{\sqrt{h}}-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon\tau\right)\\
\le \ & \frac{p}{q_2}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{1/\gamma}\log\mu\left(\left\|w(\cdot)-\frac{f}{\varepsilon^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha\le\varepsilon(\tau+\delta)\right)\\
= \ & \frac{p}{q_2}(-k(\alpha)(\tau+\delta)^{-\frac{1}{\gamma}}-I(f)).
\end{aligned}$$

令 $\delta\to0, q_2\to p$, 完成定理 2.2 的证明.

3 Strassen 型泛函收敛速率

用记号 $LL(t):=\log\log t$. 本节主要结果如下.

定理 3.1 设 $0<\alpha<\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}-\alpha$, $f\in K$. 若 f 满足 $I(f)<1$, 那么有

$$\liminf_{t\to\infty}\Big(LL(t)\Big)^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t\cdot)}{\sqrt{tLL(t)}}-f\right\|_\alpha=\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma,\qquad C_{r,p}\text{-q.s.},\tag{3.1}$$

其中 $k(\alpha)>0$ 如式 (2.1) 中定义.

证 用定理 3.1 中的记号, 需要证明下面两个不等式

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty}\Big(LL(t)\Big)^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t\cdot)}{\sqrt{tLL(t)}}-f\right\|_\alpha &\ge \left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma,\qquad C_{r,p}\text{-q.s.},\\
\liminf_{t\to\infty}\Big(LL(t)\Big)^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t\cdot)}{\sqrt{tLL(t)}}-f\right\|_\alpha &\le \left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma,\qquad C_{r,p}\text{-q.s.},
\end{aligned}$$

在引理 3.2 和引理 3.3 中估计上述不等式, 即完成了定理的证明.

引理 3.1 对 $f\in K$ 且 $I(f)<1$, 有

$$\liminf_{n\to\infty}(LL(t_n))^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_nLL(t_n)}}-f\right\|_\alpha\ge\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma,\quad C_{r,p}\text{-q.s.},\tag{3.2}$$

其中

$$t_n = \exp\left(\frac{n}{(\log n)^a}\right), \ \ a > 0.$$

证 对任何 $\varepsilon \in (0,1), f \in K$, 因为 $I(f) < 1$, 选 $\delta_1 > 0$, 使得

$$\eta_0 = I(f) + \frac{1 - I(f)}{(1-\varepsilon)^{1/\gamma}} - \delta_1 > 1.$$

那么由定理 2.2, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任何 $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0$,

$$C_{r,p}\left(\left\|\frac{w(h\cdot)}{\sqrt{h}} - \frac{f}{\tilde{\varepsilon}^{1/(2\gamma)}}\right\|_\alpha \le \tilde{\varepsilon}\tau\right) \le \exp\left\{\tilde{\varepsilon}^{-(1/\gamma)}\left(-\frac{k(\alpha)}{\tau^{1/\gamma}} - I(f) + \delta_1\right)\right\}.$$

现在取 $\tilde{\varepsilon}^{1/\gamma} = (LL(t_n))^{-1}$ 和 $\tau = (1-\varepsilon)\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma$. 那么对足够大的 n, 有

$$\begin{aligned} & C_{r,p}\left((LL(t_n))^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_n LL(t_n)}} - f\right\|_\alpha \le (1-\varepsilon)\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma\right) \\ = \ & C_{r,p}\left(\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_n}} - (LL(t_n))^{1/2} f\right\|_\alpha \le (LL(t_n))^{-\frac{1}{2}+\alpha}(1-\varepsilon)\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma\right) \\ \le \ & \exp\left\{LL(t_n)\left(-\frac{1-I(f)}{(1-\varepsilon)^{1/\gamma}} - I(f) + \delta_1\right)\right\} = \left(\frac{1}{\log t_n}\right)^{\eta_0}. \end{aligned}$$

由 Borel-Cantelli's 引理

$$\liminf_{n\to\infty}(LL(t_n))^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_n LL(t_n)}} - f\right\|_\alpha \ge \left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma, \quad C_{r,p}\text{-q.s..} \tag{3.3}$$

引理 3.2 对任何 $f \in K$ 且 $I(f) < 1$, 有

$$\liminf_{t\to\infty}(LL(t))^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t\cdot)}{\sqrt{tLL(t)}} - f\right\|_\alpha \ge \left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^\gamma, \quad C_{r,p}\text{-q.s..} \tag{3.4}$$

证 设

$$\psi_t(s) = \frac{w(ts)}{\sqrt{tLL(t)}},$$

$s \in [0,1]$, t_n 如引理 3.1 中定义. 对 $t_n < t \le t_{n+1}$, 令

$$X(t) = (LL(t))^{1-\alpha}\|\psi_t(\cdot) - f\|_\alpha, \quad X_n = \inf_{t_n < t \le t_{n+1}} X(t).$$

对任何 $\varepsilon > 0$, 由下确界定义, 存在 $T_n \in (t_n, t_{n+1}]$ 使得 $X_n \ge X(T_n) - \varepsilon$. 对任何 $u, v \in [0,1]$, 设

$$x = \frac{ut_n}{T_n}, y = \frac{vt_n}{T_n},$$

那么 $0 \le x, y \le \frac{t_n}{T_n} \le 1$. 因此有

$$\begin{aligned}\|\psi_{t_n}(\cdot) - f\|_\alpha &= \sup_{0\le u<v\le 1} \frac{|[\psi_{t_n}(u) - f(u)] - [\psi_{t_n}(v) - f(v)]|}{|u-v|^\alpha} \\ &\le \sup_{0\le x<y\le \frac{tn}{Tn}} \frac{\left|[\psi_{t_n}(\frac{T_n}{t_n}x) - f(\frac{T_n}{t_n}x)] - [\psi_{t_n}(\frac{T_n}{t_n}y) - f(\frac{T_n}{t_n}y)]\right|}{|x-y|^\alpha} \\ &\le \gamma_n\|\psi_{T_n}(\cdot) - f(\cdot)\|_\alpha + |\gamma_n - 1|\cdot\|f(\cdot)\|_\alpha + \left\|f(\cdot) - f(\frac{T_n}{t_n}\cdot)\right\|_\alpha, \quad (3.5)\end{aligned}$$

这里用记号

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{T_n LL(T_n)}}{\sqrt{t_n LL(t_n)}}.$$

类似文 [2] 中式 (5.3) 的证明, 有

$$\left\|f(\frac{T_n}{t_n}\cdot) - f(\cdot)\right\|_\alpha \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{T_n}{t_n}}\left(\frac{T_n}{t_n} - 1\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \le 2\sqrt{\frac{t_{n+1}}{t_n}}\left(\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}. \tag{3.6}$$

用不等式 $\exp(-x) \ge 1 - x$, 有

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} \ge 1 - \frac{n+1}{(\log(n+1))^a} + \frac{n}{(\log n)^a}.$$

这推出

$$1 - \frac{t_n}{t_{n+1}} < (\log n)^{-a}. \tag{3.7}$$

注意到

$$\left|\frac{(T_n LL(T_n))^{1/2}}{(t_n LL(t_n))^{1/2}} - 1\right| \le \left|\frac{t_{n+1}}{t_n} - 1\right|. \tag{3.8}$$

选适当的 a, 由式 (3.5)–(3.8) 和引理 3.1, 有

$$\liminf_{n\to\infty} X(T_n) \ge \left(\frac{k(\alpha)}{1 - I(f)}\right)^\gamma, \quad C_{r,p}\text{-q.s.}.$$

因为 $\liminf\limits_{t\to\infty} X(t) \ge \liminf\limits_{n\to\infty} X_n \ge \liminf\limits_{n\to\infty} X(T_n) - \varepsilon$, 得到了式 (3.4).

引理 3.3 对 $f \in K$ 且 $I(f) < 1$, 有

$$\liminf_{t\to\infty} (LL(t))^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t\cdot)}{\sqrt{tLL(t)}} - f\right\|_\alpha \le \left(\frac{k(\alpha)}{1 - I(f)}\right)^\gamma, \quad C_{r,p}\text{-q.s.}.$$

证 只需证明对 $f \in K$ 且 $I(f) < 1$, $t_n = n^n$, 有

$$\liminf_{n\to\infty} (LL(t_n))^{1-\alpha}\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_n LL(t_n)}} - f\right\|_\alpha \le \left(\frac{k(\alpha)}{1 - I(f)}\right)^\gamma, \quad C_{r,p}\text{-q.s.}.$$

由 Hölder 范数的定义和文 [6] 中第 179 页第 11 行结果, 有

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{w(t_{n+1}\cdot)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f\right\|_\alpha &= \sup_{0\le t<s\le 1}\frac{\left|\frac{w(t_{n+1}s)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(s)-[\frac{w(t_{n+1}t)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(t)]\right|}{|s-t|^\alpha}\\
&\le \left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)^\alpha\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(\frac{t_n}{t_{n+1}}\cdot)\right\|_\alpha\\
&\quad+\sup_{\frac{t_n}{t_{n+1}}\le t<s\le 1}\frac{\left|\frac{w(t_{n+1}s)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(s)-[\frac{w(t_{n+1}t)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(t)]\right|}{|s-t|^\alpha}.
\end{aligned}$$

易证明

$$\limsup_{n\to\infty}(LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)^\alpha\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(\frac{t_n}{t_{n+1}}\cdot)\right\|_\alpha=0,\quad C_{r,p}\text{-q.s..}\qquad(3.9)$$

事实上, 注意

$$\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(\frac{t_n}{t_{n+1}}\cdot)\right\|_\alpha\le\frac{\sqrt{t_nLL(t_n)}}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_nLL(t_n)}}\right\|_\alpha+\left\|f(\frac{t_n}{t_{n+1}}\cdot)\right\|_\alpha.$$

由 Strassen's 律 (见文 [3] 中定理 3.2), $\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_nLL(t_n)}}\right\|_\alpha$ 是 $C_{r,p}$-q.s. 有界的, 得到

$$(LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)^\alpha\frac{\sqrt{t_nLL(t_n)}}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}\left\|\frac{w(t_n\cdot)}{\sqrt{t_nLL(t_n)}}\right\|_\alpha\to 0,\ n\to\infty.$$

因为 $f\in K$, 对 $\gamma\le 1$, 有

$$\|f(\gamma\cdot)\|_\alpha\le\|f(\gamma\cdot)\|_{\mathcal{H}^d}\le\gamma^{1/2}\|f\|_{\mathcal{H}^d}$$

(见文 [2] 中定理 5.1 的证明). 因此有

$$\begin{aligned}
&(LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)^\alpha\left\|f(\frac{t_n}{t_{n+1}}\cdot)\right\|_\alpha\\
<\ &2(LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)^\alpha\sqrt{\frac{t_n}{t_{n+1}}}\\
=\ &2(\log(n+1)+\log\log(n+1))^{1-\alpha}\left(\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}}\right)^{1/2-\alpha}\to 0,\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

于是得到式 (3.9).

最后, 证明

$$\liminf_{n\to\infty}(LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}w_n\le(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)})^\gamma,\ C_{r,p}\text{-q.s.},$$

其中

$$w_n=\sup_{\frac{t_n}{t_{n+1}}\le t<s\le 1}\frac{\left|\frac{w(t_{n+1}s)-w(t_n)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(s)-[\frac{w(t_{n+1}t)-w(t_n)}{\sqrt{t_{n+1}LL(t_{n+1})}}-f(t)]\right|}{|s-t|^{\alpha}}.$$

为完成证明, 令

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_n(s) &:= \frac{w[(t_{n+1}-t_n)s+t_n]-w(t_n)}{\sqrt{t_{n+1}-t_n}},\quad s\ge 0,\\ g(s_1) &:= \left(\frac{t_{n+1}}{t_{n+1}-t_n}\right)^{1/2}\left[f\left(\frac{t_n+s_1(t_{n+1}-t_n)}{t_{n+1}}\right)-f\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}\right)\right],\quad s_1\in[0,1].\end{aligned}$$

那么 $\widetilde{w}_n=\{\widetilde{w}_n(s):s\ge 0\}$ 也是标准 Brown 运动, 且 $g\in K$, $I(g)\le I(f)$. 显然 $\frac{t_{n+1}}{t_{n+1}-t_n}\to 1$, 当 $n\to\infty$. 对任何 $\varepsilon>0$, 选 $\delta>0$ 使得

$$\sigma:=\frac{1-I(g)}{(1+\varepsilon)^{(\frac{1}{2}+\alpha)/\gamma}}+I(g)+\delta<1.$$

由引理 2.2,

$$\begin{aligned}&C_{r,p}\left\{\bigcap_{n=n_0}^{N}\left((LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}w_n\ge\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^{\gamma}(1+2\varepsilon)\right)\right\}^{\frac{1}{p}}\\ =\;&C_{r,p}\left\{\bigcap_{n=n_0}^{N}\left(\left(\frac{t_{n+1}}{t_{n+1}-t_n}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\|W(\cdot)\|_{\alpha}\ge\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^{\gamma}\frac{1+2\varepsilon}{(LL(t_{n+1}))^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right)\right\}^{\frac{1}{p}}\\ \le\;&cN^k\left((LL(t_{N+1}))^{\frac{1}{2}-\alpha}\right)^{2k^2+k}\mu\left\{\bigcap_{n=n_0}^{N}\left(\|W(\cdot)\|_{\alpha}\ge\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(g)}\right)^{\gamma}\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{(LL(t_{n+1}))^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right)\right\}^{1/q_2},\end{aligned}$$

其中 $W(\cdot)=\widetilde{w}_n(\cdot)-\sqrt{LL(t_{n+1})}\,g(\cdot)$. 对足够大的 n, 由式 (2.2),

$$\begin{aligned}&C_{r,p}\left\{\bigcap_{n=n_0}^{N}\left((LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}w_n\ge(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)})^{\gamma}(1+2\varepsilon)\right)\right\}^{1/p}\\ \le\;&cN^k((LL(t_{N+1}))^{\frac{1}{2}-\alpha})^{2k^2+k}\prod_{n=n_0}^{N}(1-\exp(-\sigma LL(t_{n+1})))^{1/q_2}\\ \le\;&c_0N^k((\log N)^{\frac{1}{2}-\alpha})^{2k^2+k}\exp\left(-\frac{1}{q_2}\sum_{n=n_0+1}^{N+1}(n\log n)^{-\sigma}\right)\to 0,\;\; N\to\infty.\end{aligned}$$

因此

$$C_{r,p}\left\{\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{n=l}^{\infty}\left((LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}w_n\ge\left(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)}\right)^{\gamma}(1+2\varepsilon)\right)\right\}=0,$$

这得到

$$\liminf_{n\to\infty}(LL(t_{n+1}))^{1-\alpha}w_n\le(\frac{k(\alpha)}{1-I(f)})^{\gamma},\ C_{r,p}\text{-q.s.}.$$

完成了证明.

参 考 文 献

[1] Yoshida N. A large deviation principle for (r,p)-capacities on the Wiener space[J]. Prob. The. Relat. Fields, 1993, 94(4): 473–488.

[2] Baldi P, Roynette B. Some exact equivalents for the Brownian motion in Hölder norm[J]. Prob. The. Relat. Fields, 1992, 93(4): 457–483.

[3] Chen X, Balakrishnan N. Extensions of functional LIL w.r.t. (r,p)-capacities on Wiemer space[J]. Stat. & Prob. Lett., 2007, 77(4): 468–473.

[4] Liu J, Ren J. A functional modulus of continuity for Brownian motion[J]. Bull. Sci. Math., 2007, 131(1): 60–71.

[5] Wang W. A generalization of functional law of the iterated logarithm for (r,p)-capacities on the Wiener space[J]. Stoch. Proc. Appl., 2001, 96(1): 1–16.

[6] Baldi P, Ben Arous G and Kerkyacharian G. Large deviations and the Strassen theorem in Hölder norm[J]. Stoch. Proc. Appl., 1992, 42(1): 171–180.

[7] Liu Y, Li L. The rate of quasi sure convergence in the functional limit theorem for increments of a Brownian motion[J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 356: 21–29.

[8] 樊军, 高付清. 线性模型的最小二乘估计的中偏差及其重对数律 [J]. 数学杂志, 2007, 27(1): 60–64.

THE RATE OF QUASI SURE CONVERGENCE OF STRASSEN'S TYPE FUNCTIONAL LAW OF THE ITERATED LOGARITHM FOR A BROWNIAN MOTION IN HÖLDER NORM

LI Xie-rui[1], LIU Yong-hong[2]

(*1. School of Information and Statistics, Guangxi University of Finance and Economics, Nanning 530003, China*)

(*2. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China*)

Abstract: In this paper, limit question of Brownian motion is investigated. By using large and small deviations for Brownian motion in the Hölder norm with respect to $C_{r,p}$-capacity, the quasi sure convergence rate of Strassen's type functional law of the iterated logarithm for Brownian motion in Hölder norm with respect to $C_{r,p}$-capacity is derived, which generalizes the result in [2].

Keywords: Brownian motion; quasi sure rate of convergence; Hölder norm

2010 MR Subject Classification: 60F10; 60F15; 60F17