

弱交换空间的极大维数

王淑娟, 刘文德

(哈尔滨师范大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150025)

摘 要: 本文研究了特征 0 代数闭域上弱交换空间的极大维数. 利用了矩阵相似变换的方法, 获得了在共轭意义下极大弱交换空间的分类结果, 推广了 Schur 定理的结果.

关键词: 弱交换; 极大维数; 相似变换

MR(2010) 主题分类号: 17B05; 17B10

中图分类号: O152.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)02-0293-05

1 有关概念及主要结果

Schur^[1] 指出一般线性李代数 $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$ 的 Abel 子代数的极大维数, 由此可确定 Abel 李代数 L 的忠实表示的极小维数^[2,3]. 2012 年, 本文作者采用文献 [4] 的思想确定了 n 阶矩阵全体构成的 Jordan 代数的 Abel 子代数的极大维数, 从而得到了有限维 Abel Jordan 代数的忠实表示的极小维数^[5]. 本文主要目的是确定极大弱交换子空间 (定义见下一段), 从而从另一个角度得到上述结论.

本文约定基域 $\mathbb{F}$ 是特征 0 代数闭域. $M(n, \mathbb{F}), M(m, n, \mathbb{F})$ 分别为所有 $n, m \times n$ 阶矩阵构成的向量空间, $\mathfrak{J}(n)$ 为 $M(n, \mathbb{F})$ 按照新的乘法所构成的 Jordan 代数. 设 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 为所有严格上三角的 n 阶矩阵构成的向量空间, $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ 为所有上三角的 n 阶矩阵构成的向量空间. 为叙述方便, 给出以下几个定义. 设任一 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$, 称 (i, j) 为元 a_{ij} 所在的位置. 定义 $(i, j) < (k, l) \iff i = k$ 且 $j < l$; 或者 $i < k$, 于是 A 的 n^2 个位置构成了字典序. 在这个字典序下, 称矩阵 A 中第一个非零元出现的位置 (i, j) 为 A 的水平, 记为 $\text{lv}(A) = (i, j)$, 称 i 为矩阵 A 的高度, 记为 $\text{ht}(A)$. 设 V 是矩阵代数 $M(n, \mathbb{F})$ 的任意子空间, 定义 $\text{lv}(V) := \min \{\text{lv}(A) \mid A \in V\}, \text{ht}(V) := \min \{\text{ht}(A) \mid A \in V\}$. 约定 $\text{lv}(O) = (\infty, \infty), \text{ht}(O) = \infty$, 其中 O 为零矩阵或零空间. 如果 $\text{lv}(A) = (k, l)$ 且第 k 行为 $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 那么称 A 是一个广义矩阵单位, 此时将 A 记为 U_{kl} . 设 $A, B \in \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$, 如果存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ (λ 由 A, B 决定), 使得 $AB = \lambda BA$, 那么称 A, B 弱交换. 如果 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的子空间 V 中任意两个元素都弱交换, 那么称 V 为弱交换空间.

现将主要结果及相关推论叙述如下:

定理 1.1 设 V 是 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的具有极大维数的弱交换子空间. 那么 $\dim V = \lfloor n^2/4 \rfloor$ 且

(1) 若 $n = 2m$, 则 V 共轭于 $\mathcal{A}_{2m}$;

*收稿日期: 2013-05-12

接收日期: 2013-06-25

基金项目: 国家自然科学基金资助 (10871057; 11171055); 黑龙江省教育厅科学基金资助 (12521158).

作者简介: 王淑娟 (1983-), 女, 黑龙江哈尔滨, 博士, 主要研究方向: 李超代数.

(2) 若 $n = 2m + 1$, 则 V 共轭于 $\mathcal{B}_{2m+1}$ 或 $\mathcal{B}'_{2m+1}$,
其中

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{2m} &:= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} O & A \\ O & O \end{bmatrix} \in M(2m, \mathbb{F}) \mid A \in M(m, \mathbb{F}) \right\}, \\ \mathcal{B}_{2m+1} &:= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} O & B \\ O & O \end{bmatrix} \in M(2m+1, \mathbb{F}) \mid B \in M(m+1, m, \mathbb{F}) \right\}, \\ \mathcal{B}'_{2m+1} &:= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} O & B \\ O & O \end{bmatrix} \in M(2m+1, \mathbb{F}) \mid B \in M(m, m+1, \mathbb{F}) \right\}.\end{aligned}$$

定理 1.1 的证明将在下一节给出, 下面是两个重要的推论.

推论 1.2 $\mathfrak{J}(n)$ 的极大 Abel 子代数在共轭意义下只有以下几类: $\mathcal{A}_{2m}$ 或 $\mathcal{B}_{2m+1}, \mathcal{B}'_{2m+1}$. 特别的, 其维数为 $\lfloor n^2/4 \rfloor$; 当 $n > 3$ 时, 一般线性李代数 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的极大 Abel 子代数在共轭意义下只有以下几类:

$$\mathcal{A}_{2m} \oplus \mathbb{F}I \text{ 或 } \mathcal{B}_{2m+1} \oplus \mathbb{F}I, \mathcal{B}'_{2m+1} \oplus \mathbb{F}I.$$

特别的, 其维数为 $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$.

证 设 M 是 $\mathfrak{J}(n)$ 的任一个 Abel 子代数. 由 Abel Jordan 代数的定义可知, M 中任两个元皆反交换. 根据 Jacobson 弱闭集定理, 不妨认为 M 为 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的弱交换子空间. 由定理 1.1 可推得 $\dim M \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. 考虑到定理 1.1 中 $\mathcal{A}_{2m}$ 或 $\mathcal{B}_{2m+1}, \mathcal{B}'_{2m+1}$ 的结构, 可知 $\mathfrak{J}(n)$ 的 Abel 子代数的极大维数不小于 $\lfloor n^2/4 \rfloor$. 于是 $\mathfrak{J}(n)$ 的极大 Abel 子代数是 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的具有极大维数的弱交换空间. 从而第一个结论正确.

易见, 当 $n > 3$ 时, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ 的具有极大维数的 Abel 子代数必为 $\mathbb{F}I \oplus N (N \subseteq \mathfrak{n}(n, \mathbb{F}))$ 形式 (也可参见文献 [4]). 于是迫使 N 为 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的具有极大维数的弱交换空间. 故第二个结论正确.

推论 1.3 两两反交换的 n 阶矩阵线性无关的最大个数为 $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

证 设两两反交换的 n 阶矩阵线性无关的最大个数为 $\varphi(n)$. 一方面, 单位矩阵一定在极大的弱交换子空间内, 于是 $\varphi(n) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$. 另一方面, 根据定理 1.1 中 $\mathcal{A}_{2m}$ 或 $\mathcal{B}_{2m+1}, \mathcal{B}'_{2m+1}$ 的结构可知 $\varphi(n) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

上述推论覆盖了文献 [1, 4, 5] 的结果.

同理可得下面推论:

推论 1.4 $M(n, \mathbb{F})$ 的极大零乘子代数的维数为 $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

2 相关引理

引理 2.1 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 及其弱交换子空间在下面两种相似变换下都保持不变.

(A) 将第 i 列乘以非零数 λ , 同时将第 i 行乘以 $1/\lambda$;

(B) 将第 i 列的 λ 倍加到第 j 列而第 i 列保持不变, 同时将第 j 行的 $-\lambda$ 倍加到第 i 行而第 j 行保持不变, 这里约定 $i < j$.

引理 2.2 设 V 是 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的弱交换子空间. 若 $\text{lv}(V) = (i, k_1)$, 则 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 中存在广义矩阵单位 $U_{i, k_1}, U_{i, k_2}, \dots, U_{i, k_r}$ 以及 $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ 的一个水平大于 (i, n) 的子空间 $\mathfrak{k}$, 使得 $\mathfrak{h}$ 相似于

$$T^{-1}\mathfrak{h}T = \mathbb{F}U_{i, k_1} \oplus \mathbb{F}U_{i, k_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}U_{i, k_r} \oplus \mathfrak{k}, \quad (2.1)$$

于是

$$\begin{aligned}\dim V &= r_1 + \cdots + r_t \leq tn - (i_1 + \cdots + i_t) - (1 + \cdots + t - 1) \\ &\leq tn - (1 + \cdots + t) - (1 + \cdots + t - 1) = t(n - t) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor.\end{aligned}$$

另一方面, 考虑到前面定义的 $\mathcal{A}_{2m}$ 或 $\mathcal{B}_{2m+1}, \mathcal{B}'_{2m+1}$ 的结构, 可知 $\dim V \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$. 故 $\dim V = \lfloor n^2/4 \rfloor$. 从而

$$i_k = k, r_k = n - t, \text{ 其中 } k = 1, \cdots, t. \quad (2.6)$$

若 $n = 2m$, 则 $t = m$. 由 (2.6) 式知当 $k = 1, \cdots, m$ 时, 有 $r_k = m$. 由 (2.5) 与 (2.6) 式, 知前面出现的广义矩阵单位的水平分别为

$$\begin{array}{cccc}(1, m+1) & (1, m+2) & \cdots & (1, n) \\ (2, m+1) & (2, m+2) & \cdots & (2, n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m, m+1) & (m, m+2) & \cdots & (m, n).\end{array} \quad (2.7)$$

若 $n = 2m + 1$, 则 $t = m$ 或 $m + 1$. 由 (2.6) 式知当 $k = 1, \cdots, m$ 时, 有 $r_k = m + 1$; 或者当 $k = 1, \cdots, m + 1$ 时, 有 $r_k = m$. 由于 (2.5) 与 (2.6) 式, 所以前面出现的广义矩阵单位的水平分别为

$$\begin{array}{cccc}(1, m+1) & (1, m+2) & \cdots & (1, n) \\ (2, m+1) & (2, m+2) & \cdots & (2, n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m, m+1) & (m, m+2) & \cdots & (m, n)\end{array}$$

或

$$\begin{array}{cccc}(1, m+2) & (1, m+3) & \cdots & (1, n) \\ (2, m+2) & (2, m+3) & \cdots & (2, n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (m+1, m+2) & (m+1, m+3) & \cdots & (m+1, n).\end{array}$$

首先假设 $n = 2m$. 由 (2.2)–(2.4) 及 (2.7) 式, 知 $\text{ht}(V_{m-i}) = m - i + 1$ 及 $\dim V_{m-i} = im$, $1 \leq i \leq m$, 其中 $V_0 := V$. 对 i 归纳且由引理, 知 V_{m-i} 由如下形式矩阵组成

$$\begin{bmatrix} O_{m \times m} & B \\ O_{m \times m} & O_{m \times m} \end{bmatrix},$$

其中

$$\text{ht}(V_{m-i}) = m - i + 1 \leq \text{ht}(B) \leq m, 1 \leq i < m.$$

关于任意取定的 i , 若 $1 \leq j \leq m$, 则 $U_{m-i, m+j}$ 与 V_{m-i} 中每个矩阵都弱交换. 进而, 通过简单的计算, 知 $U_{m-i, m+j} = \begin{bmatrix} O_{m \times m} & A \\ O_{m \times m} & O_{m \times m} \end{bmatrix}$, 其中 A 的前 $m - i$ 行构成 $m - i \times j$ 的矩阵单位 $E_{m-i, j}$. 即

$$V_{m-i} \cup \{U_{m-i, m+j} \mid 1 \leq j \leq m\} \subseteq \mathcal{A}_{2m}.$$

特别的, 当 $i = m - 1$ 时, 有

$$V_1 \cup \{U_{1,m+j} \mid 1 \leq j \leq m\} \subseteq \mathcal{A}_{2m},$$

进而

$$T_1^{-1}VT_1 = \mathbb{F}U_{1,m+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}U_{1,m+n} \oplus V_1 \subseteq \mathcal{A}_{2m},$$

因为

$$\dim \mathcal{A}_{2m} = m^2 = \lfloor n^2/4 \rfloor = \dim V = \dim T_1^{-1}VT_1,$$

所以

$$T_1^{-1}VT_1 = \mathcal{A}_{2m}.$$

若 $n = 2m + 1$, 可作类似的讨论, 此处略.

参 考 文 献

- [1] Schur I. Zur Theorie vertauschbaren Matrizen[J]. J. Reine Angew. Math., 1905, 130: 66–76.
- [2] Burde D. On a refinement of Ado's theorem[J]. Arch. Math., 1998, 70: 118–127.
- [3] Burde D, Moens W. Minimal faithful representation of reductive Lie algebras[J]. Arch. Math., 2008, 89: 513–523.
- [4] Jacobson N. Schur's theorems on commutative matrices[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50: 431–436.
- [5] Liu W, Wang S. Minimal faithful representations of abelian Jordan algebras and Lie superalgebras[J]. Linear Algebra Appl., 2012, 437: 1293–1299.

THE MAXIMAL DIMENSION FOR WEAKLY COMMUTATIVE SPACES

WANG Shu-juan, LIU Wen-de

(School of Mathematical Sciences, Harbin Normal University, Harbin 150025, China)

Abstract: In this paper, we study the maximal dimension of weakly commutative spaces over algebraically closed fields of characteristic zero. By similar operations for matrices, we obtain the classification for the maximal weakly commutative spaces in the sense of conjugation and generalize Schur's theorem.

Keywords: weakly commutative; maximal dimension; similar operation

2010 MR Subject Classification: 17B05; 17B10