Vol. 36 (2016)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

广义分数次积分算子在齐次加权 Morrey-Herz 空间上的有界性

张超楠, 周 疆, 曹勇辉

(新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要: 本文研究了广义分数次积分算子在齐次加权 Morrey-Herz 空间上的有界性. 利用对函数进行环形分解技术和算子截断的方法, 获得了广义分数次积分算子 $L^{-\frac{\beta}{2}}(f)$ 从 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})$ 空间到 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\omega_1,\omega_2^{q_2})$ 空间是有界的, 从而将分数次积分算子在齐次加权 Morrey-Herz 空间上的有界性推广到广义分数次积分算子.

关 键 词: 广义分数次积分算子; 齐次加权 Morrey-Herz 空间; A_p 权

MR(2010) **主题分类号**: 42B20; 42B25; 42B35 　　**中图分类号**: O174.2

文献标识码: A 　　**文章编号**: 0255-7797(2016)01-0199-08

1 引言

在偏微分方程中, 为了更好的研究 Possion 方程, Sobolev[1] 引入了经典的分数次积分算子 (又称 Riesz 位势算子):

$$I_\beta f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\beta}}dy,\ 0<\beta<n.$$

并证明了 $I_\beta(f)$ 是 $(L^p(\mathbb{R}^n),L^q(\mathbb{R}^n))$ 型的.

1995 年, Fan Dashan 等 [2] 给出了奇异积分算子在 Morrey 空间上的有界性. 2004 年, Duong 等 [4] 给出了广义分数次积分算子 $L^{-\frac{\beta}{2}}$ 在一定条件下从 $(L^p(\mathbb{R}^n),L^q(\mathbb{R}^n))$ 是有界的. 2005 年, Lu Shanzhen 等 [5−6] 在研究奇异积分算子时, 引入了一类与 PDE 相关的, 比 Herz 空间和 Morrey 空间更一般的齐次 Morrey-Herz 空间, 这类空间很快受到人们的重视, 随后, Morrey-Herz 空间上的一些极具研究价值的结果不断出现. 2009 年, Yasuo Komori 等 [7] 证明了分数次积分算子在加权 Herz 空间上的有界性. 受此启示, 本文研究广义分数次积分算子在齐次加权 Morrey-Herz 空间上的有界性.

在叙述主要的结果之前, 首先给出一些必要的记号和定义, 设 $B_k=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 2^k\}$, $A_k=B_k\backslash B_{k-1}, k\in Z, \chi_k=\chi_{A_k}$, 其中 χ_{A_k} 表示 A_k 的特征函数.

对于 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 和非负的权函数 $\omega(x)$, 记 $\|f\|_{L^p(\omega)}=(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\omega(x)dx)^{1/p}$, 用 $L^p(\omega)$ 表示 $L^p(\mathbb{R}^n,\omega)$, 特别地 $\omega=1$ 时, 记为 $L^p(\mathbb{R}^n)$.

全文中, C 表示一个不依赖于主要参数的常数, 但其值在不同的地方可能不尽相同; p 与 p' 满足共轭关系, 即 $1/p+1/p'=1$.

*收稿日期: 2013-05-07 　　接收日期: 2013-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11261055); 新疆自然科学基金资助项目 (2011211A005); 新疆大学自然科学基金资助项目 (BS120104).

作者简介: 张超楠 (1988-), 男, 河南郸城, 硕士, 研究方向: 调和分析.

通讯作者: 周疆

2 预备知识

二阶散度型椭圆算子 $Lf=-\mathrm{div}(A\nabla f)$, $A=A(x)$ 是指一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^∞ 系数的 $n\times n$ 矩阵, 且满足一致性椭圆条件: 存在 $0<\lambda\le\gamma<\infty$, 使得 $\lambda|\xi|^2\le ReA\xi\cdot\overline{\xi}$, $|A\xi\cdot\overline{\xi}|\le\gamma|\xi|\zeta$, 其中 ξ, $\zeta\in\mathbf{C}^n$.

利用算子的谱理论, 算子 L 的广义分数次积分定义为

$$L^{-\frac{\beta}{2}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\beta}{2})}\int_0^\infty e^{-tL}(f)\frac{dt}{t^{1-\beta/2}},\ 0<\beta<n.$$

当 $L=-\Delta$ 即 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子时, 以上的广义分数次积分算子就是经典的分数次积分算子.

设 $p_t(x,y)$ 是解析半群 e^{-tL} 的热核, 若满足 A 是实矩阵, 或者 A 是 $n\le 2$ 的复矩阵, 或者当 $n\ge 3$ 时, 核是 Hölder 连续的, 那么 $p_t(x,y)$ 具有 Gaussian 上界, 即

$$|p_t(x,y)|\le\frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-C\frac{|x-y|^2}{t}}. \tag{2.1}$$

容易验证: 对于几乎处处 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|L^{-\frac{\beta}{2}}f(x)|\le CI_\beta(|f|)(x). \tag{2.2}$$

详见文献 [4].

定义 2.1 [8] 设 $\alpha\in R$, $\lambda\ge 0$, $0<p,q<\infty$, 齐次 Morrey-Herz 空间定义如下

$$M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}):\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)}=\sup\limits_{k_0\in Z}2^{-k_0\lambda}\{\sum\limits_{k=-\infty}^{k_0}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|^p_{L^q(\mathbb{R}^n)}\}^{1/p}$.

容易得出 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\dot{K}^{\alpha,\lambda}_q(\mathbb{R}^n)$ 以及 $M^\lambda_q(\mathbb{R}^n)\subseteq M\dot{K}^{0,\lambda}_{q,q}(\mathbb{R}^n)$.

定义 2.2 [9] 设 $\alpha\in R$, $\lambda\ge 0$, $0<p,q<\infty$, 齐次加权 Morrey-Herz 空间定义如下

$$M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)=\{f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ \omega_2):\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}<\infty\},$$

其中 $\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q}(\omega_1,\omega_2)}=\sup\limits_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum\limits_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f\chi_k\|^p_{L^q(\omega_2)}\}^{1/p}$.

定义 2.3 [7] 设 $1<p<\infty$, 称 $\omega\in A_p$, 是指如果对于任意球体 Q, 有

$$(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)dx)(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{-1/(p-1)}dx)^{p-1}\le C.$$

定义 2.4 [7] 设 $1<p_1,p_2<\infty$, 称 $\omega\in A_{(p_1,p_2)}$, 是指

$$(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{p_2}dx)^{1/p_2}(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{-p_1'}dx)^{1/p_1'}\le C.$$

定义 2.5 [7] 设 $\delta>0$, 称 $\omega\in RD(\delta)$ 是指

$$\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_j)}\geq C2^{\delta(k-j)},\ k>j.$$

以下引理在本文证明中是必要的:

引理 2.1 [3] 如果 $\omega\in A_p$, 则 $\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_j)}\leq C2^{np(k-j)},\ k>j$.

引理 2.2 [3] 设 $1<p<\infty$, 如果 $\omega\in A_p$, 则存在 $\bar{p}<p$, 使得 $\omega\in A_{\bar{p}}$.

引理 2.3 [3] 如果 $\omega\in A_{(p_1,p_2)}$, $1<p_1,p_2<\infty$, 则

$$\omega^{-p_1'}(Q)^{1/p_1'}\omega^{p_2}(Q)^{1/p_2}\leq C|Q|^{1/p_1'+1/p_2}.$$

注 $\omega\in A_(p_1,p_2)$ 当且仅当 $\omega^{p_2}\in A_{1+p_2/p_1'}$, 其中 $1<p_1,p_2<\infty$.

引理 2.4 [3] 设 $0<\beta<n$, $1<q_1<n/\beta$, 且 $1/q_2=1/q_1-\beta/n$, 如果 $\omega\in A_{(q_1,q_2)}$, 则 I_β 是 $L^{q_1}(\omega^{q_1})$ 空间到 $L^{q_2}(\omega^{q_2})$ 空间上的有界算子.

引理 2.5 [4] 假设条件 (2.1) 成立, 设 $0<\beta<n$, $1<q_1<n/\beta$, 且 $1/q_2=1/q_1-\beta/n$, 那么 $\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}$.

3 主要定理及证明

定理 3.1 假设条件 (2.1) 成立, 设 $1<q_1<n/\beta$, $1/q_2=1/q_1-\beta/n$, 且 $\omega\in A_{(q_1,q_2)}$, 则 $L^{-\frac{\beta}{2}}$ 是 $L^{q_1}(\omega^{q_1})$ 空间到 $L^{q_2}(\omega^{q_2})$ 空间上的有界算子.

定理 3.2 假设条件 (2.1) 成立, 设 $n\geq 2$, $0\leq\lambda<\infty$, $0<p<\infty$, $1<q_1<n/\beta$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ 且 $1/q_2=1/q_1-\beta/n$, 如果

(1) $\omega_1\in A_m$, $\omega_1\in RD(\delta_1)$, $1\leq m<\infty$,

(2) $\omega_2^{q_2}\in A_r$, $r=1+q_2/q_1'$, 且 $\omega_2^{q_2}\in RD(\delta_2)$,

(3) $-\delta_2/\delta_1q_2<\alpha<(1-\beta/n-\bar{r}/q_2)n/m$,

则 $L^{-\frac{\beta}{2}}(f)$ 是 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})$ 空间到 $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\omega_1,\omega_2^{q_2})$ 空间的有界算子.

定理 3.1 的证明 当 $\omega\in A_{(q_1,q_2)}$ 时, 根据 (2.2) 式, 引理 2.4 及引理 2.5, 有

$$\|I_\beta(|f|)\|_{L^{q_2}(\omega^{q_2})}\leq C\|f\|_{L^{q_1}(\omega^{q_1})},$$

由 $\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|I_\beta(|f|)\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}$, 知

$$\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\|_{L^{q_2}(\omega^{q_2})}\leq C\|I_\beta(|f|)\|_{L^{q_2}(\omega^{q_2})}.$$

综上所述, 得

$$\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\|_{L^{q_2}(\omega^{q_2})}\leq C\|f\|_{L^{q_1}(\omega^{q_1})}.$$

定理 3.1 证明完毕.

定理 3.2 的证明 记 $f(x)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\chi_j f(x)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}f_j(x)$, 则

$$\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\omega_1,\omega_2^{q_2})}=\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\chi_k\|^p_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})}\}^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})})^p\}^{1/p}\\
&\quad+C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=k-1}^{k+1}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})})^p\}^{1/p}\\
&\quad+C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=k+2}^{\infty}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})})^p\}^{1/p}\\
&\triangleq E+F+G.
\end{aligned}$$

首先对 F 进行估计

$$F\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=k-1}^{k+1}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})})^p\}^{1/p}.$$

由定理 3.1 知

$$\begin{aligned}
F&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f\chi_k\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\}^{1/p}\\
&\le C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}.
\end{aligned}$$

其次, 对 E 进行估计, 当 $j\le k-2$, $x\in A_k$, $y\in B_j$ 时, 显然有 $2^{k-2}\le|x-y|\le 2^{k+1}$, 根据 Minkowski 不等式及 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
|L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j)(x)|&\le C(\int_{B_j}(\int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}}|f_j(y)|e^{-C\frac{|x-y|^2}{t}}\frac{dtdy}{t^{1-\frac{\beta}{2}}}))\le C\int_{B_j}|f_j(y)|(\int_0^\infty t^{\frac{\beta-n}{2}-1}e^{-C\frac{|x-y|^2}{t}}dt)dy\\
&\le C\int_{B_j}|f_j(y)|(\int_0^{(2^k)^2}t^{\frac{\beta-n}{2}-1}e^{-C\frac{(2^k)^2}{t}}dt+\int_{(2^k)^2}^\infty t^{\frac{\beta-n}{2}-1}e^{-C\frac{(2^k)^2}{t}}dt)dy\\
&\le C2^{k(\beta-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\omega_2^{-q_1'}(B_j)^{1/q_1'}.
\end{aligned}$$

那么

$$\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})}\le C2^{k(\beta-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\omega_2^{-q_1'}(B_j)^{1/q_1'}\omega_2^{q_2}(B_k)^{1/q_2}.$$

结合 引理 2.1, 引理 2.2 及引理 2.3, 得

$$\begin{aligned}
\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})}&\le C2^{k(\beta-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\omega_2^{-q_1'}(B_j)^{1/q_1'}\omega_2^{q_2}(B_j)^{1/q_2}(\frac{\omega_2^{q_2}(B_k)}{\omega_2^{q_2}(B_j)})^{1/q_2}\\
&\le C2^{k(\beta-n)}2^{nj(1/q_1'+1/q_2)}2^{n\bar{r}(k-j)/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\\
&\le C2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar{r}/q_2)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}.
\end{aligned}$$

将上述结果应用到 E 中, 有

$$
\begin{aligned}
E &\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})})^p\}^{1/p}\\
&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\
&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2)}(\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)})^{\frac{\alpha}{n}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\
&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}.
\end{aligned}
$$

当 $0<p\le 1$ 时, 根据不等式 $(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|)^p\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^p$, 以及 $\alpha<(1-\beta/n-\bar r/q_2)n/m$, 有

$$
\begin{aligned}
E^p &\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)p}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})\}\\
&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{j=-\infty}^{k_0-2}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}(\sum_{k=j+2}^{k_0}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)p})\}\\
&\le C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{j=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\}\\
&\le C\|f\|^p_{M\dot K^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}.
\end{aligned}
$$

当 $1<p<\infty$ 时, 根据 Hölder 不等式, 得

$$
\begin{aligned}
E^p \le& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}\\
\le& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)\frac{p}{2}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})\\
&\times(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)\frac{p'}{2}})^{p/p'}\}\\
\le& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{n(j-k)(1-\beta/n-\bar r/q_2-\alpha m/n)\frac{p}{2}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})\}\\
\le& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{j=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\}\\
\le& C\|f\|^p_{M\dot K^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}.
\end{aligned}
$$

最后来估计 G, 当 $j\geq k-2$, $x\in A_k$, $y\in B_j$ 时, $2^{j-2}\leq|x-y|\leq 2^{j+1}$, 根据 Minkowski 不等式及 Hölder 不等式, 有

$$|L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j)(x)|\leq C2^{j(\beta-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\omega_2^{-q_1'}(B_j)^{1/q_1'}$$

以及

$$\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})}\leq C2^{j(\beta-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\omega_2^{-q_1'}(B_j)^{1/q_1'}\omega_2^{q_2}(B_k)^{1/q_2}.$$

结合引理 2.2 及 引理 2.3 得

$$\begin{aligned}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})}&\leq C2^{j(\beta-n)}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\omega_2^{-q_1'}(B_j)^{1/q_1'}\omega_2^{q_2}(B_j)^{1/q_2}(\frac{\omega_2^{q_2}(B_k)}{\omega_2^{q_2}(B_j)})^{1/q_2}\\&\leq C2^{j(\beta-n)}2^{nj(1/q_1'+1/q_2)}2^{(k-j)\delta_2/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}\\&\leq C2^{(k-j)\delta_2/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})},\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}G&\leq C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=k+2}^{\infty}\|(L^{-\frac{\beta}{2}}(f_j))\chi_k\|_{L^{q_2}(\omega_2^{q_2})})^p\}^{1/p}\\&\leq C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\alpha p}{n}}(\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{(k-j)\delta_2/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\&\leq C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k+2}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}.\end{aligned}$$

当 $0<p\leq 1$ 时, 根据不等式 $(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|)^p\leq\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^p$ 以及 $\alpha>-\delta_2/\delta_1q_2$, 有

$$\begin{aligned}G\leq&C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\&+C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\\leq&C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{j=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}(\sum_{k=-\infty}^{j-2}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)p})\}^{1/p}\\&+C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)p}[\omega_1(B_j)]^{-\frac{\alpha p}{n}}\\&\times[\omega_1(B_j)]^{\frac{\lambda p}{n}}([\omega_1(B_j)]^{-\frac{\lambda}{n}}(\sum_{l=-\infty}^{j}[\omega_1(B_l)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^{1/p})^p\}^{1/p}\\\leq&C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}+C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{j=k_0+1}^{\infty} 2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)p}[\omega_1(B_j)]^{-\frac{\alpha p}{n}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\lambda p}{n}}\}^{1/p}$$

$$\leq C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}.$$

当 $1<p<\infty$ 时, 根据 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
G \leq& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\
&+C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha}{n}}\|f_j\|_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^p\}^{1/p}\\
&\triangleq G_1+G_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1 \leq& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p}{2}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})\\
&\times(\sum_{j=k+2}^{k_0}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p'}{2}})^{p/p'}\}^{1/p}\\
\leq& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda}{n}}\{\sum_{j=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})}(\sum_{k=-\infty}^{j-2}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p}{2}})\}^{1/p}\\
\leq& C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2^p \leq& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p}{2}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})\\
&\times(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p'}{2}})^{p/p'}\}\\
\leq& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p}{2}}\sum_{l=-\infty}^{j}[\omega_1(B_l)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})\}\\
\leq& C\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\sum_{j=k_0+1}^{\infty}2^{(k-j)(\alpha\delta_1+\delta_2/q_2)\frac{p}{2}}[\omega_1(B_j)]^{\frac{\lambda p}{n}}([\omega_1(B_j)]^{-\frac{\lambda}{n}}\\
&\times(\sum_{l=-\infty}^{j}[\omega_1(B_l)]^{\frac{\alpha p}{n}}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(\omega_2^{q_1})})^{1/p})^p\}\\
\leq& C\|f\|^p_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}\sup_{k_0\in Z}[\omega_1(B_{k_0})]^{-\frac{\lambda p}{n}}\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}[\omega_1(B_k)]^{\frac{\lambda p}{n}}\}\\
\leq& C\|f\|^p_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}.
\end{aligned}$$

故有 $G\leq G_1+G_2\leq C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}$.

综上所述, 得 $\|L^{-\frac{\beta}{2}}(f)\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\omega_1,\omega_2^{q_2})}\leq C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})}$, 证明完毕.

参 考 文 献

[1] Stein E M. Singular integrals and differentiability properties of function [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[2] Fan Dashan, Lu Shanzhen, Yang Dachun. Boundedness of operators in Morrey spaces on homogenous spaces and its applications [J]. Acta Math. Sinica (N.S) Suppl., 1998, 14: 625–634.

[3] Torchinsky A. Real-variable methods in harmonic analysis [M]. Beijing: Academic Press, 1986.

[4] Duong X T, Yan Lixin. On commutators of fractional integrals [J]. Soc. Math. American, 2004 (132): 35–49.

[5] Lu Shanzhen, Ding yong. Singular integral and related topics [M]. Singapore: World Scientific Press, 2006.

[6] Lu Shanzhen, Yang Dachun, Zhou Zusheng. Sublinear operators with rough Kernel on generalized Morrey spaces [J]. Hokkaido Math. J., 1998, 27: 219–232.

[7] Yasuo Komori, Katsuo Matsuoka. Boundedness of several on weighted Herz spaces [J]. J. Funct. Space Appl., 2009, 1: 1–12.

[8] Lu Shanzhen, Xu Lifang. Boundedness of rough singular integral operators on the homageneous Morrey-Herz spaces [J]. Hokkaido Math. J., 2005, 34(2): 219–314.

[9] Kuang Jichang. Weighted Morrey-Herz spaces and its application [J]. Appl. Math. E-Notes, 2010, (10): 159–166.

THE BOUNDEDNESS OF GENERALIZED FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS ON THE WEIGHTED HOMOGENEOUS MORREY-HERZ SPACES

ZHANG Chao-nan, ZHOU Jiang, CAO Yong-hui

(*College of Math. and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China*)

Abstract: In this article, we study the boundedness of the generalized fractional integral operators on the weighted homogeneous Morrey-Herz spaces. By the methods of studying ring decomposition of functions and truncated operators, we get that the generalized fractional integral operator $L^{-\frac{\beta}{2}}(f)$ is bounded from $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(\omega_1,\omega_2^{q_1})$ space to $M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}(\omega_1,\omega_2^{q_2})$ space. Thus, we extend the results of the boundedness of the fractional integral operators on the weighted homogeneous Morrey-Herz spaces to generalized fractional integral operators.

Keywords: generalized fractional integral operators; the weighted homogeneous Morrey-Herz spaces; A_p weight

2010 MR Subject Classification: 42B20; 42B25; 42B35